

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

**FACULTADA MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**SECCIÓN DE MATEMÁTICA**



**INFORME FINAL DEL CURSO DE ESPECIALIZACIÓN:**

**EN 3-VARIEDADES Y NUDOS TOPOLÓGICOS**

**TÍTULO DEL INFORME FINAL:**

**NUDOS EN VARIEDADES NO TRIVIALES**

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:**

**LICENCIATURA EN MATEMÁTICA**

**PRESENTADO POR:**

**ESDRAS WUALIBERTO MARTÍNEZ LAÍNEZ N° CARNET ML11031**

**DOCENTE ASESOR:**

**M.SC. JOSÉ JOAQUÍN APARICIO RAMÍREZ**

**SEPTIEMBRE 2024**

**SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA**

# UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Autoridades



M.SC. JUAN ROSA QUINTANILLA

**RECTOR**

DRA. EVELYN BEATRÍZ FARFÁN

**VICERRECTORA ACADÉMICA**

M.SC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

**VICERRECTOR ADMINISTRATIVO**

LIC. PEDRO ROSALÍO ESCOBAR CASTANEDA

**SECRETARIO GENERAL**

LIC. CARLOS ALMILCAR SERRANO RIVERA

**FISCAL GENERAL**

# UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Autoridades



M.SC. CARLOS IVÁN HERNÁNDEZ FRANCO

**DECANO**

DRA. NORMA AZUCENA FLORES RETANA

**VICEDECANA**

LIC. CARLOS DE JESÚS SANCHÉZ

**SECRETARIO**

ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA MARTÍNEZ

**JEFE DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES**

**Y MATEMÁTICA**

M.SC. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

**COORDINADORA DEL PROCESO DE GRADO DEL**

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y**

**MATEMÁTICA**

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Definiciones . . . . .	5
<b>2. Variedades no triviales</b>	<b>7</b>
2.1. El toro . . . . .	7
2.2. Espacios de Seifert . . . . .	9
2.2.1. Superficies en variedades de Seifert. . . . .	11
<b>3. Nudos en variedades no triviales</b>	<b>14</b>
3.1. Nudos tóricos . . . . .	14
3.2. Nudos en las superficies de Seifert . . . . .	21
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>28</b>

## Resumen

Las variedades no triviales son espacios topológicos que tienen estructuras complejas y propiedades topológicas que las distinguen de variedades más simples, como la esfera. En el contexto de 3-variedades, una variedad es no trivial si no es homeomorfa a la 3-esfera ( $S^3$ ). Estas variedades presentan características topológicas y geométricas que hacen que su estudio sea fundamental en la topología y la geometría. En general, una variedad es un espacio topológico que, localmente, se asemeja a un espacio euclidiano ( $\mathbb{R}^n$ ) de alguna dimensión ( $n$ ). De las muchas variedades no triviales que existen tratamos dos: El toro y las superficies de Seifert. En el toro definimos lo que son los nudos toricos que son un tipo especial de nudo que se pueden describir como aquellos que residen en la superficie de un toro embebido en el espacio tridimensional ( $\mathbb{R}^3$ ) o en la 3-esfera ( $S^3$ ). Y las superficies que forman el espacio de Seifert que es una 3-variedad que admite una foliación en círculos, es decir, una descomposición en fibras donde cada fibra es homeomorfa a  $S^1$ .

**Palabras clave:** variedades no triviales, nudos.

## Abstrac

Non-trivial manifolds are topological spaces that have complex structures and topological properties that distinguish them from simpler manifolds, such as the sphere. In the context of 3-manifolds, a manifold is non-trivial if it is not homeomorphic to the 3-sphere ( $S^3$ ). These varieties present topological and geometric characteristics that make their study fundamental in topology and geometry. In general, a manifold is a topological space that locally resembles a Euclidean space ( $\mathbb{R}^n$ ) of some dimension ( $n$ ). Of the many non-trivial varieties that exist, we discuss two: The torus and the Seifert surfaces. In the torus we define what toric knots are, which are a special type of knot that can be described as those that reside on the surface of a torus embedded in the three-dimensional space ( $\mathbb{R}^3$ ) or in the 3-sphere ( $S^3$ ). And the surfaces that form the Seifert space, which is a 3-manifold that admits a foliation in circles, that is, a division into fibers where each fiber is homeomorphic to  $S^1$ .

**Keywords:** non-trivial varieties, knots.

## Introducción

Los nudos en variedades no triviales representan una expansión fascinante y compleja de la teoría de nudos tradicionales, que generalmente se enfoca en nudos dentro de la 3-esfera  $S^3$ . En este contexto, un **nudo** es una curva cerrada y suave embebida en un espacio tridimensional, que no se puede desenredar sin cortar la cuerda. Al trasladar el estudio de nudos a variedades más complejas que  $S^3$ , se abren nuevas preguntas y fenómenos topológicos únicos.

Trataremos dos casos bastantes especiales de variedades no triviales uno de esas variedades es el **toroide**, geométricamente el toroide es la superficie de revolución generada por un polígono o una curva plana cerrada simple que gira alrededor de una recta exterior coplanar con la que no se interseca, veremos como son los nudos en esta variedad llamados **nudos tóricos** y definiremos una clase de superficies especiales que tienen relacion con los nudos llamadas **superficies de Seifert**. En un espacio de Seifert, los nudos pueden ser descritos en términos de cómo se comportan respecto a las fibras de la variedad. Un nudo puede ser "transversal" a las fibras, o puede estar "fibrado", es decir, puede estar compuesto de segmentos que son parte de las fibras individuales.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Definiciones

**Definición 1.1.1** (Variedad). *Una variedad topológica de dimensión  $n$  es un espacio topológico  $\mathcal{M}$  que debe cumplir:*

- *Ser localmente euclídeo (i.e. para cada punto  $x \in \mathcal{M}$  existe un abierto  $U$ , entorno de  $x$ , homeomorfo mediante  $\phi : U \rightarrow V$  a un abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ ).*
- *Ser Hausdorff ( $T_2$ ).*
- *Verificar el segundo axioma de numerabilidad (ANII).*

**Definición 1.1.2** (Nudo). *Un nudo topológico es un mapeo de la circunferencia  $S^1$  en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , o en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$  dotado de una topología adecuada. Formalmente, es una inmersión continua de  $S^1$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que el nudo resultante no se puede deshacer (deformar continuamente) a una forma simple sin cortarlo.*

**Definición 1.1.3.** *Dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  son **semejantes** si existe un homeomorfismo*

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } h(K_1) = K_2$$

**Definición 1.1.4.** *Dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  son **equivalentes** si existe un homeomorfismo*

*$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que preserve la orientación tal que  $h(K_1) = K_2$ . La equivalencia de nudos la denotaremos por  $K_1 \cong K_2$ .*

**Definición 1.1.5.** *Un enlace es una colección ordenada finita de nudos que no se intersectan entre sí. Cada nudo  $K_i$  se dice que es una componente del enlace.*

**Definición 1.1.6** (Isotopía). *Una isotopía es una deformación continua de una función (o de un objeto) en un espacio topológico que puede transformarse en otra función (o en otro objeto) de manera continua, sin cortes ni interrupciones. En otras palabras, dos funciones (o dos objetos) son isotópicos si puedes "deformar una en la otra mediante una familia continua de funciones (o deformaciones) parametrizadas por el tiempo*

**Definición 1.1.7.** *Una superficie esencial es una superficie embebida en una 3-variedad  $M$  que cumple las siguientes propiedades:*

- *Incompresible: La superficie no puede ser comprimida en la 3-variedad, es decir, cualquier disco en  $M$  que tenga su frontera en la superficie no puede ser aplastado en la superficie. En otras palabras, la superficie no tiene discos de compresión. Matemáticamente, esto significa que cualquier curva cerrada simple que esté en la superficie y que sea contráctil ( que se pueda aplastar o contraer) en la variedad también debe ser contráctil ( que se pueda aplastar o contraer) en la propia superficie.*
- *No Isotópica a la Frontera: Si la 3-variedad  $M$  tiene frontera, la superficie no debe ser isotópica a la frontera de la variedad. Esto significa que la superficie no puede ser deformada continuamente para coincidir con parte de la frontera de  $M$ . Si la superficie pudiera ser isotópica a la frontera, entonces no sería considerada esencial porque sería topológicamente trivial.*

# Capítulo 2

## Variedades no triviales

Se refiere a una variedad que tiene una estructura más compleja, como la presencia de agujeros, curvatura, o una topología no simple. Ejemplos de variedades no triviales incluyen un toro (como la superficie de un donut) y el espacio de seifert.

### 2.1. El toro

Varios objetos cotidianos tienen forma de toro: el aro salvavidas, la banda de rodadura de una llanta, etc. La palabra “toro” proviene del latín *torus*, que significa protuberancia o elevación curva, en términos simples un toro puede visualizarse como la superficie de un donut, matemáticamente se define como el producto cartesiano de dos circunferencias:  $S^1 \times S^1$ . Es una superficie bidimensional embebida en un espacio tridimensional.

El toro tridimensional es un ejemplo clásico de una 3-variedad no trivial. Es una extensión del concepto de un toro en dos dimensiones y ofrece una rica estructura topológica que lo distingue claramente de la 3-esfera  $S^3$ . El toro tridimensional, denotado comúnmente como  $T^3$ , es el producto cartesiano de tres círculos:

$$[T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1.]$$

Aquí,  $S^1$  representa un círculo, y  $T^3$  puede ser visualizado como un espacio que resulta de “envolver” tres dimensiones circulares, una sobre otra. En otras palabras, es

el espacio tridimensional donde cada coordenada es periódica, repitiéndose cada cierto intervalo.

La superficie de revolución obtenida al hacer girar una circunferencia alrededor de un eje que no la corta también es una forma de generar un toro; ver Figura 2.1.

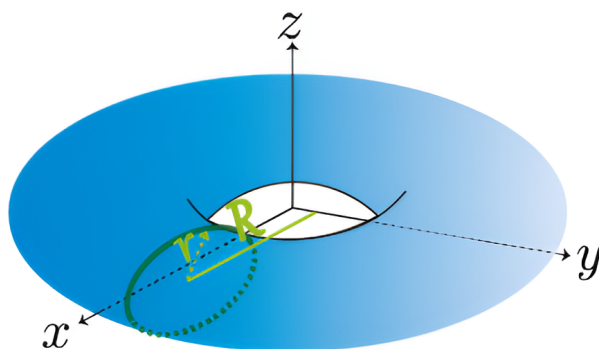


Figura 2.1: El toro como superficie de revolución [Presentando al toro y sus simetrías Rita Jiménez Rolland, Juanita Claribel Santiago, 2 de mayo de 2022 ]

Esta superficie está contenida en  $\mathbb{R}^3$  y es un espacio topológico con la topología de subespacio. Consideramos una circunferencia de radio  $r$  en el plano  $xz$  con centro  $(R, 0, 0)$  y la giramos alrededor del eje  $z$ , entonces las ecuaciones paramétricas que definen a esta superficie son:

$$x = \cos\theta(R + r\cos\varphi),$$

$$y = \sin\theta(R + r\cos\varphi), y$$

$$z = r\sin\varphi, \text{ donde } 0 < r < R \text{ y } \theta, \varphi \in [0, 2\pi[$$

Otra forma sería la siguiente: El cuadrado con lados opuestos identificados y la topología cociente. Es decir,  $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$  módulo la relación de equivalencia, donde  $(0, t) \sim (1, t)$  y  $(t, 0) \sim (t, 1)$  si  $0 \leq t \leq 1$  y también  $(s, t) \sim (s, t)$  si  $s, t \neq 0, 1$  Figura 2.2.

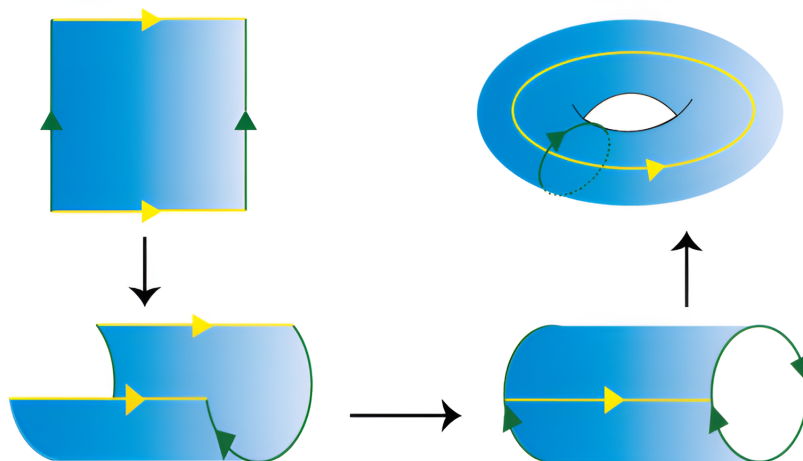


Figura 2.2: Cuadrado con lados opuestos identificados [Presentando al toro y sus simetrías  
Rita Jiménez Rolland, Juanita Claribel Santiago, 2 de mayo de 2022 ]

Estas son formas de como podemos generar un toro tridimensional .

## 2.2. Espacios de Seifert

Los espacios de Seifert son un tipo especial de 3-variedades no trivial que juega un papel fundamental en la topología de las 3-variedades. Se caracterizan por su estructura fibrada, donde cada punto en la 3-variedad está asociada con un círculo  $S^1$ . Estos espacios ofrecen ejemplos importantes de 3-variedades con estructuras complejas y ricas propiedades topológicas.

**Definición 2.2.1** (Espacio de Seifert). *Es una 3-variedad que se puede descomponer en una colección de círculos, llamados "fibras", donde la 3-variedad se construye como un fibrado sobre una superficie bidimensional. Específicamente, en un espacio de Seifert, la variedad tiene la estructura de un fibrado de círculos  $S^1$  sobre una superficie 2-dimensional,  $\Sigma$ , que podría ser una esfera, un toro, o alguna otra superficie más complicada.*

**Definición 2.2.2** (Fibración de Seifert). *Es una descomposición de una 3-variedad en círculos, de modo que cada círculo tiene una vecindad que es un toro sólido fibrado por círculos obtenido de  $D^2 \times [0, 1]$  identificando las tapas por una rotación de  $2\pi p/q$  radianes, donde  $p/q \in \mathbb{Q}$ .*

Los círculos son las imágenes de uno o varios intervalos  $z \times [0, 1]$  que se pegan al

hacer la identificación, como se ve como en la figura 2.3.

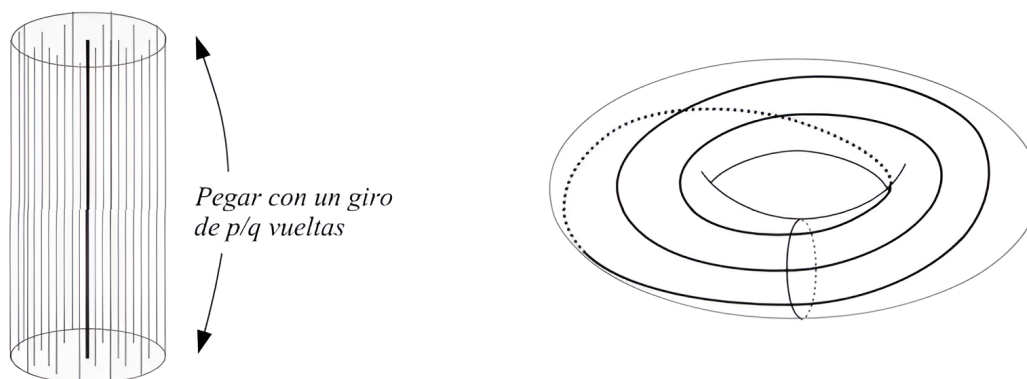


Figura 2.3: Notas del curso 3-variedades, [Max Neumann Coto]

Una variedad de Seifert es una variedad que admite una fibration de Seifert. Cada fibra de una fibration de Seifert tiene una multiplicidad bien definida, que es el número de veces que un disco transversal a la fibra, toca a las fibras vecinas. Las fibras de multiplicidad 1 se llaman regulares y las otras se llaman excepcionales. En la fibration del toro sólido obtenido identificando las tapas de  $D^2 \times [0, 1]$  con una rotación de  $p/q$  vueltas, el círculo central tiene multiplicidad  $q$  y las otras fibras tienen multiplicidad 1.

Algunas observaciones son:

- Las fibras excepcionales son aisladas y están en el interior de  $M$  (ya que cada fibra tiene una vecindad que es un toro sólido sin más fibras excepcionales).
- Si no hay fibras excepcionales la variedad es un haz de círculos.
- La frontera de una variedad de Seifert consta de toros y/o botellas de Klein.

El espacio de orbitas de una variedad de Seifert, obtenido al identificar a cada círculo a un punto, es una superficie  $S$ , llamada la base de la fibration. Geométricamente,  $S$  tiene puntos singulares correspondientes a las fibras excepcionales, que se ven como conos con ángulo  $2\pi/q$  si la fibra tiene multiplicidad  $q$ . Figura 2.4

Ejemplos de variedades de Seifert .

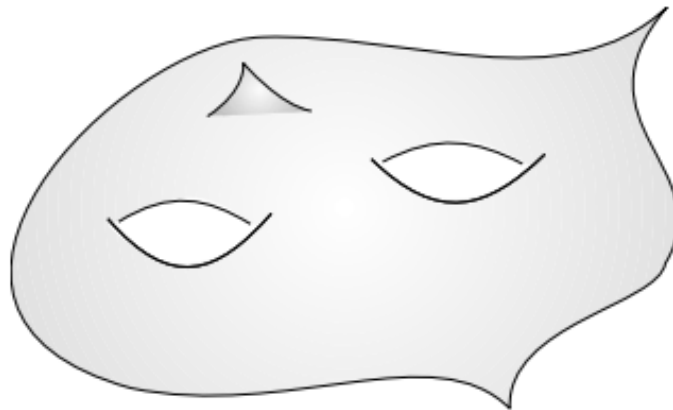


Figura 2.4:

- $S^3$  es la unión de dos toros sólidos  $V$  y  $V'$ , pegados de modo que la longitud de unos se identifica con el meridiano del otro. Podemos fibrar a los toros sólidos con fibras que dan una vuelta al meridiano y una vuelta a la longitud, de modo que las fibras coincidan en  $\partial V = \partial V'$ , obtenemos una fibración de  $S^3$  con base una esfera y sin fibras excepcionales. Esta es la **fibración de Hopf de  $S^3$**  Figura 2.5.
- Los espacios lente  $L(p, q)$  tienen fibraciones con base una esfera y 2 fibras excepcionales. En  $L(p, q)$  es la unión de dos toros sólidos  $V$  y  $V'$ . Cualquier descomposición de  $\partial V$  en círculos que no sean meridianos de  $V$  se extiende a una fibración de Seifert de  $V$ , y cualquier descomposición de  $\partial V'$  en círculos que no sean meridianos se extiende a una fibración de Seifert de  $V'$ . Así que cualquier descomposición de  $\partial V = \partial V'$  en círculos que no sean meridianos de ninguno de los dos toros sólidos, se extiende a una fibración de Seifert de  $L(p, q)$ .

### 2.2.1. Superficies en variedades de Seifert.

Una superficie  $F$  propiamente encajada en una 3-variedad  $M$  es paralela a la frontera si  $F$  es isotópica, fijando  $\partial F$ , a una superficie contenida en  $\partial M$ . Una superficie encajada en  $M$  es esencial si es incompresible y no es paralela a la frontera.

**Lema 2.2.1.** *En un toro sólido las únicas superficies esenciales son los discos meridionales.*

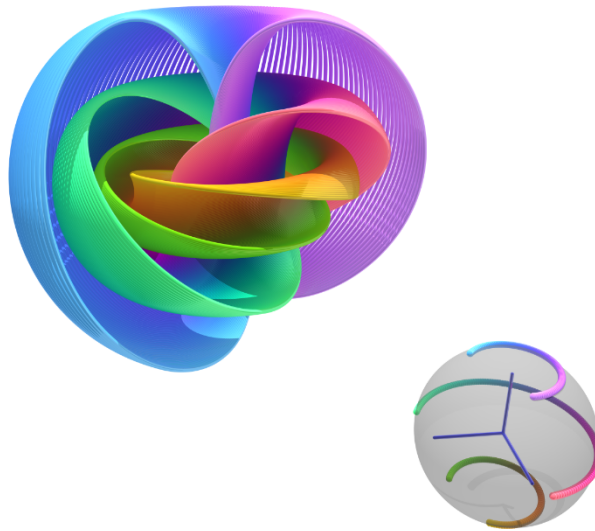


Figura 2.5: Fibración de Hopf de  $S^3$

Si  $M$  es una variedad de Seifert y  $S$  es una superficie en  $M$ , decimos que  $S$  es horizontal si cruza transversalmente a las fibras (es decir, si no es tangente a ninguna) y que  $S$  es vertical si es una unión de fibras.

Las superficies verticales están fibradas por círculos y por lo tanto son toros, botellas de Klein, anillos o bandas de Moebius. Las superficies horizontales son cubiertas ramificadas de la superficie de órbitas de  $M$  (las ramificaciones están en los puntos donde  $S$  cruza a las fibras excepcionales). Si cortamos a  $M$  por una superficie horizontal  $S$ , obtenemos una variedad  $H$  fibrada por intervalos (ya que  $H$  se ve localmente como un toro sólido cortado por discos meridionales). Si  $S$  tiene 2 lados entonces  $H$  tiene dos fronteras horizontales que son copias de  $S$ , y si  $S$  tiene un solo lado entonces  $H$  tiene una sola frontera horizontal, que es una cubierta doble de  $S$ . En el primer caso  $H$  debe ser un producto  $S \times [0, 1]$  o dos haces de intervalos sobre una superficie  $S'$  que es cubierta dos veces por  $S$ . En el segundo caso  $H$  debe ser un haz de intervalos no trivial sobre  $S$ .  $M$  se obtiene de estos haces de intervalos identificando las fronteras horizontales por medio de homeomorfismos.

**Teorema 2.2.1.** *En una variedad de Seifert todas las superficies esenciales son isotópicas a superficies horizontales (transversales a las fibras) o verticales (uniones de fibras).*

**Demostración** Si  $M$  es una variedad de Seifert y  $S$  es una superficie esencial en  $M$ , podemos suponer, haciendo una isotopía, que  $S$  es transversal a las fibras excepcionales  $c_1, c_2, \dots, c_k$ . Si  $N(c_i)$  una vecindad fibrada de  $c_i$  entonces  $M' = M - \cup N(c_i)$  es un haz de círculos, y existe una colección de anillos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tales que  $M|_{\cup A_i}$  es un haz trivial  $D^2 \times S^1$ . Entonces  $S' = S \cap M'$  es una superficie en  $M'$  que intercepta a  $\partial M'$  en meridianos de  $N(c_i)$  y curvas en  $\partial M$  y  $S'$  intercepta a cada anillo  $A_i$  en curvas y arcos simples. Las curvas que son triviales en un anillo también son triviales en  $S'$  y pueden ser removidas por isotopías de  $S'$ . Si hay arcos con ambos extremos en la misma frontera de un anillo, podemos empujar a  $S$  para quitar el arco, como en la siguiente figura, reduciendo o manteniendo el número de curvas de  $\partial S'$ .

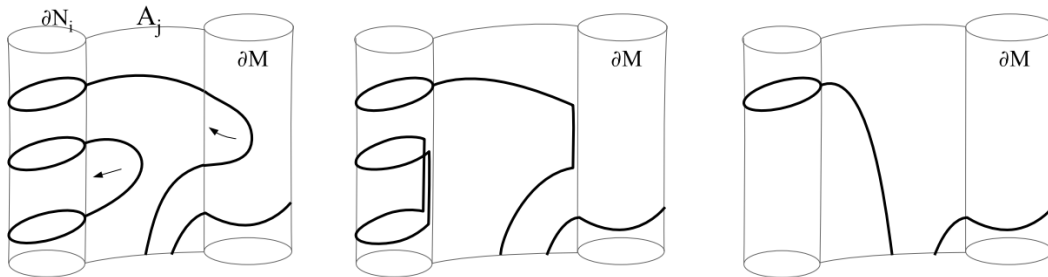


Figura 2.6: Notas del curso 3-variedades, [Max Neumann Coto]

Las fronteras de los  $A_i$  cortan a los toros  $\partial N(c_i)$  y a los toros que forman  $\partial M$  en anillos, y también podemos hacer isotopías para que  $S$  intersecte a estos anillos en curvas paralelas a las fronteras de los anillos o en arcos que van de una frontera a otra. Así podemos suponer que  $S'$  intersecta a cada toro de  $\partial M'$  y a cada anillo  $A_i$  en curvas de la fibración, o que cruza a cada toro y cada anillo en arcos transversales a las fibras. Si ahora cortamos a  $M'$  y a  $S'$  por los anillos  $A_i$ , obtenemos una superficie incompresible  $S''$  en  $D^2 \times S^1$  cuya frontera es vertical u horizontal. En el primer caso  $S''$  debe ser una colección de anillos verticales, y podemos recuperar a  $S$  pegando los anillos por sus bordes, por lo que  $S$  es un toro vertical que no toca a las fibras excepcionales. En el segundo caso  $S''$  debe ser una colección de discos meridionales transversales a las fibras, podemos recuperar a  $S'$  identificando arcos de las fronteras de estos discos y  $S$  se obtiene pegándole a  $S'$  discos meridionales de los toros sólidos  $N(c_i)$ .

# Capítulo 3

## Nudos en variedades no triviales

### 3.1. Nudos tóricos

En la teoría de nudos, un nudo de toro es un tipo especial de nudo que se encuentra en la superficie de un toro en  $\mathbb{R}^3$ . Cada nudo de toro se especifica por un par de números enteros coprimos  $p$  y  $q$ . Un enlace de toro surge si  $p$  y  $q$  no son coprimos (en cuyo caso el número de componentes es  $\gcd(p, q)$ ). Un nudo de toro es trivial si y sólo si  $p$  o  $q$  es igual a 1 o  $-1$ . El ejemplo más simple no trivial es el nudo  $(2, 3)$  – *torus*, también conocido como nudo de trébol.

El nudo  $(p, q)$  – *toro* puede ser dado por la parametrización:

$$x = r \cos(p \phi)$$

$$y = r \sin(p \phi)$$

$$z = -\sin(q \phi)$$

donde  $r = \cos(q \phi) + 2$  y  $0 < \phi < 2\pi$ . Esto se encuentra en la superficie del toro dada por  $(r - 2)^2 + z^2 = 1$  (dada en coordenadas cilíndricas).

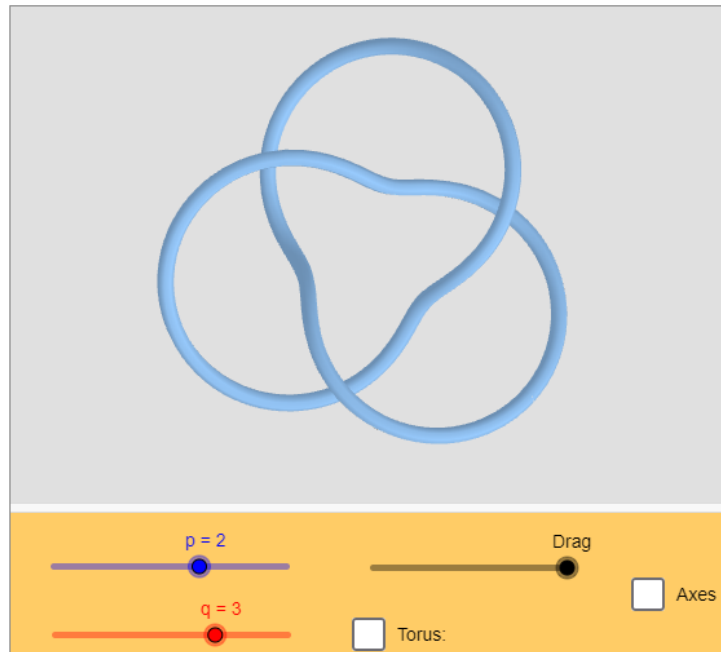


Figura 3.1: (2,3)-toro <https://www.geogebra.org/m/p9TzREHj>

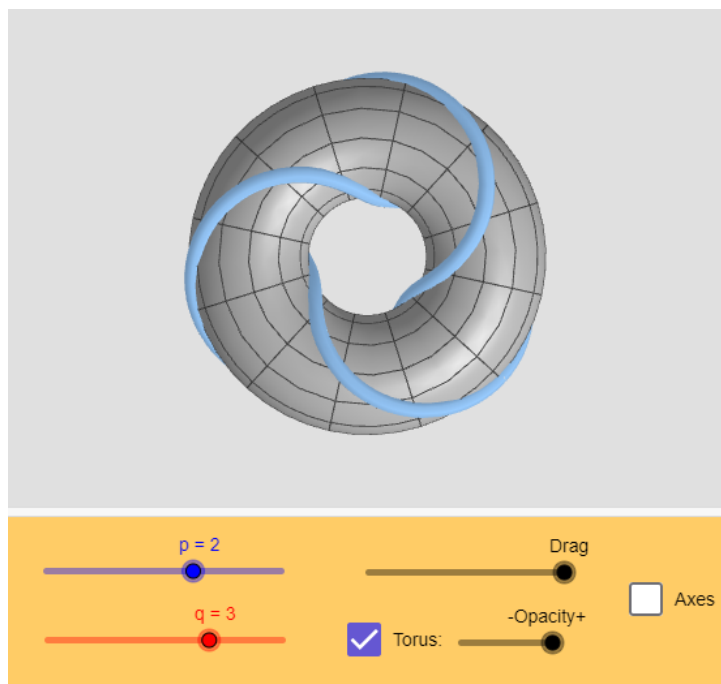


Figura 3.2: (2,3)-toro <https://www.geogebra.org/m/p9TzREHj>

A continuación definiremos un conjunto de nudos que tienen ciertas propiedades en común. A este conjunto de nudos se les llama nudos tóricos porque se construyen sobre la superficie que lleva su nombre (Toro). Los nudos tóricos no solo son interesantes por si mismos, sino que tambien son importantes por que en muchas ocasiones ayudan a intuir propiedades generales de los nudos.

El toro  $T$ , intuitivamente, es el espacio dado por la superficie de una dona. A continuación daremos tres descripciones diferentes del toro que a su vez nos darán diferentes maneras de construir los nudos tóricos.

**a) Como espacio producto:** Considérese al círculo unitario en el plano complejo  $\mathbb{C}$ , es decir el conjunto de puntos dado por

$$S^1 = \exp(i\theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Entonces el toro es el espacio  $S^1 \times S^1$ .

**b) Como espacio cociente:** Sea  $X$  el cuadrado unitario en  $\mathbb{R}^2$  es decir,

$$X = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}.$$

Entonces el toro  $T$  es el espacio cociente  $X/\sim$  donde la relación de equivalencia está dada por

$$(0, y) \sim (1, y) \quad (x, 0) \sim (x, 1).$$

Intuitivamente, lo anterior equivale a identificar los lados del cuadrado como lo indican las flechas en la figura 3.3

**c) Como subespacio de  $\mathbb{R}^3$ ,** el toro está definido por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{(x^2 + y^2)} - 2)^2 + z^2 = 1\},$$

que es la superficie obtenida rotando la circunferencia  $(x - 2)^2 + z^2 = 1$  en el plano  $xz$  con centro en  $(2, 0, 0)$ , alrededor del eje  $z$ , dándonos la superficie de una dona, como en

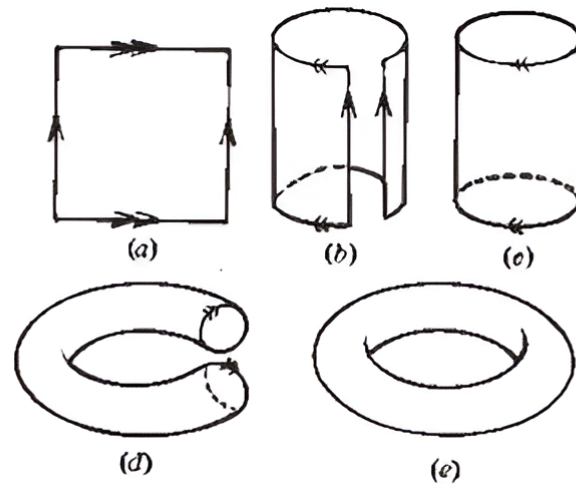


Figura 3.3: El toro como espacio cociente [Introducción a la Teoría de Nudos, José Luis Cisneros Molina]

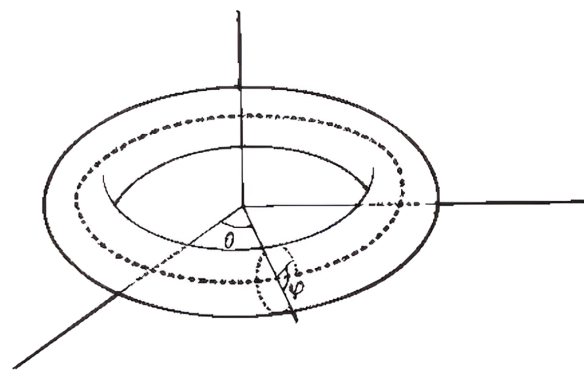


Figura 3.4: El toro como subespacio de  $\mathbb{R}^3$  [Introducción a la Teoría de Nudos, José Luis Cisneros Molina]

la figura 3.4

Para ver que todas estas descripciones nos dan el mismo espacio, podemos dar homeomorfismos en forma explícita. Primero damos un homeomorfismo de  $X/\sim$  a  $S^1 \times S^1$ .

$$X/\sim \longrightarrow S^1 \times S^1$$

$$(x, y) \longmapsto (\exp(2\pi ix), \exp(2\pi iy)).$$

Intuitivamente esto corresponde a ver los lados horizontales del cuadrado como la primera circunferencia, y a los lados verticales como la segunda.

Ahora daremos una aplicación  $f$  de  $S^1 \times S^1$  en  $\mathbb{R}^3$  cuya imagen  $f(S^1 \times S^1)$  coincide con el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  que define al toro en (c). Para definir dicha función, es conveniente pensar a  $\mathbb{R}^3$  como  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  y usar coordenadas polares  $(r, \theta) = re^{i\theta}$  en  $\mathbb{C}$ . Así pues, un punto de  $\mathbb{R}^3$  está representado por una terna  $(r, \theta, z)$ . En estos términos, la función  $f$  está dada por:

$$f(\exp(i\phi), \exp(i\theta)) = \left(1 + \frac{1}{2}\cos\phi, \theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

Y  $S^1 \times S^1$  es homeomorfo a la imagen  $f(S^1 \times S^1)$ . Ver la figura 3.4.

Un nudo que yace sobre la superficie del toro es llamado **nudo tórico** y puede ser expresado de diferentes maneras.

1. La forma mas fácil de construir los nudos tóricos es utilizando la función  $f$  que da el homeomorfismo entre  $S^1 \times S^1$  y la superficie de la dona. Sean  $m$  y  $n$  un par de enteros primos entre si. Definimos  $K_{m,n}$  como el siguiente subconjunto del toro en  $\mathbb{R}^3$

$$K_{m,n} = \{f(\exp(2\pi imt), \exp(2\pi int)) \mid t \in I\}$$

No es difícil comprobar que la aplicación  $g : S^1 \longleftrightarrow K_{m,n}$  definida por

$$g(\exp(2\pi it)) = f(\exp(2\pi imt), \exp(2\pi int))$$

es un homeomorfismo y por lo tanto,  $K_{m,n}$  es un nudo. A  $K_{m,n}$  se le llama **nudo tórico de tipo (m,n)**.

En el toro existen dos circunferencias estandar; la primera está dada por  $f(\exp(2\pi it), 1)$ , llamada **meridiano** y la segunda por  $f(1, \exp(2\pi it))$ , llamada **longitud**. Un nudo tórico de tipo  $(m, n)$  da  $n$  vueltas alrededor del meridiano y  $m$  vueltas alrededor de la longitud.

2. Si consideramos al toro  $T$  como el espacio cociente  $X/\sim$  descrito en (b), entonces  $K_{m,n}$  es la imagen en  $T$  del segmento rectilíneo en  $\mathbb{R}^2$  que pasa por el origen y tiene una pendiente  $\frac{n}{m}$ .

3. Una tercera forma de construir los nudos tóricos es la siguiente. Considerese el cilindro de altura 1 y con base el círculo unitario en el plano  $xy$ . Consideremos los  $r$  puntos  $A_0, \dots, A_{r-1}$  en la base  $C_1$  y los  $r$  puntos  $B_0, \dots, B_{r-1}$  en la tapa superior  $C_2$  dados por las siguientes coordenadas. (figura 3.5):

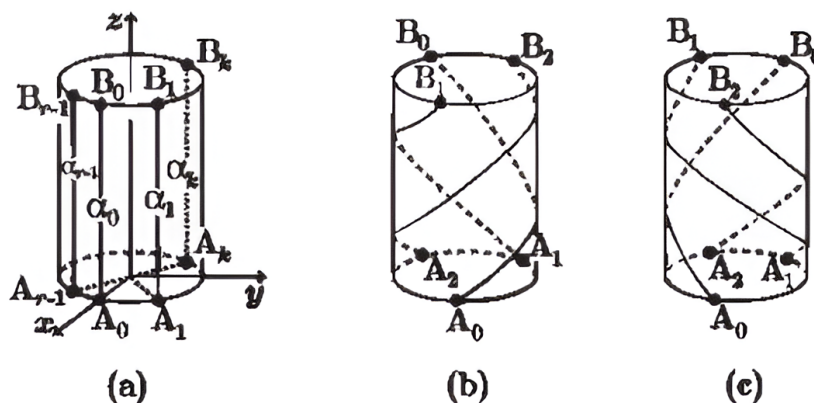


Figura 3.5: Construcción de nudos tóricos [Introducción a la Teoría de Nudos, José Luis Cisneros Molina]

$$A_0 = (1, 0, 0), A_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 0\right), \dots, A_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 0\right)$$

$$B_0 = (1, 0, 1), B_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 1\right), \dots, B_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 1\right)$$

A continuación, conéctense los puntos  $A_k$  y  $B_k$ ,  $K = 0, 1, \dots, r - 1$  en el cilindro mediante los segmentos  $\alpha_k$ . Manteniendo fija la base  $C$ , torcemos el cilindro rotando la tapa  $C_2$  respecto al eje  $z$  por un ángulo de  $\frac{2\pi q}{r}$ , donde  $q$  es un entero que puede ser positivo o negativo y  $r$  y  $q$  son primos relativos. Finalmente identificando los puntos  $(x, y, 0)$  de  $C_1$  con los puntos  $(x, y, 1)$  de  $C_2$  obtenemos un toro con  $r$  segmentos  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$  los cuales se han unido formando el nudo  $K_{q,r}$ .

En la figura 3.6 se dan algunos ejemplos de nudos tóricos, en particular el nudo trébol es un nudo tórico de tipo  $(3, 2)$ .

Podemos dar una orientación a los nudos tóricos  $K_{m,n}$ , una forma de hacerlo es asignándole a los segmentos  $\alpha_i$  de la descripción (3) la orientación que fluye de  $A_i$  a

$B_i$ . Denotaremos a estos nudos tóricos orientados por  $K(m, n)$  y también denotaremos por  $K(-m, -n)$  al mismo nudo pero con la orientación invertida.

De la construcción se obtiene fácilmente la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.1.** *Sean  $q$  y  $r$  dos enteros primos relativos y  $r \neq 0$ . Entonces*

- *Si  $q = 0, \pm 1$  ó  $r = \pm 1$ , entonces  $K(q, r)$  es el nudo trivial.*
- *Si  $q, r$  son enteros tales que no son 0 ó  $\pm 1$ , entonces  $K(-q, r)$  es la imagen espectacular de  $K(q, r)$ .*

**Proposición 3.1.2.** *La esfera tridimensional  $S^3$  puede ser obtenida identificando las superficies de dos toros sólidos  $T_1$  y  $T_2$  de tal manera que el meridiano y la longitud de  $T_1$  se identifican con la longitud y el meridiano de  $T_2$  respectivamente.*

**Teorema 3.1.1.**

$$K(q, r) \cong K(r, q)$$

**Teorema 3.1.2.**

a) *Si  $q$  ó  $r$  es 0 ó  $\pm 1$ , entonces  $K(q, r)$  es el nudo trivial.*

b) *Supongase que  $q, r, p, s$  no son 0 o  $\pm 1$ . Entonces*

*$K(q, r) \cong K(p, s) \iff \{q, r\} = \{p, s\}$  ó  $\{q, r\} = \{-p, -s\}$  Existe, pues, una infinidad de nudos distintos.*

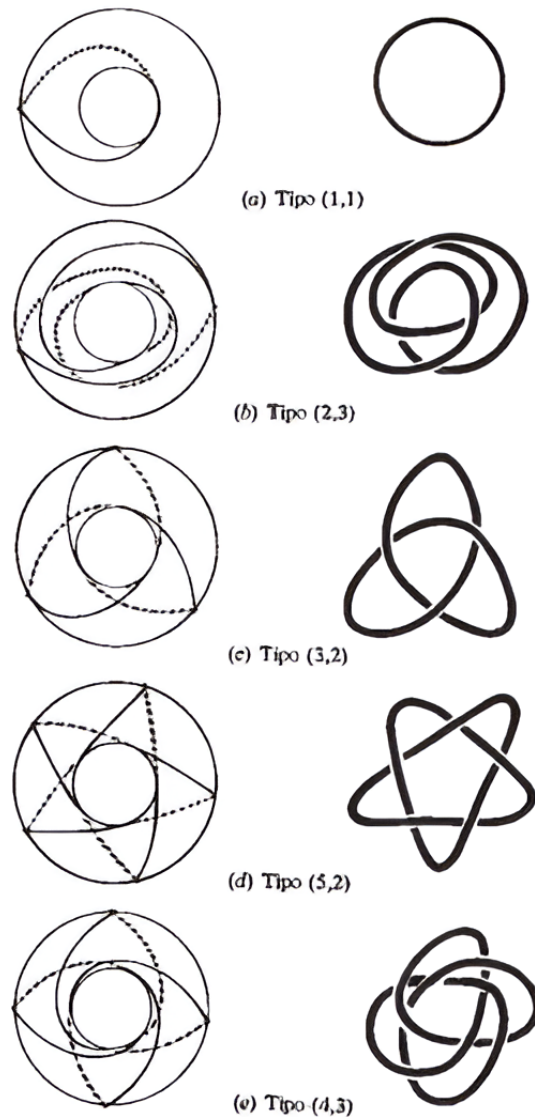


Figura 3.6: Nudos tóricos [Introducción a la Teoría de Nudos, José Luis Cisneros Molina]

## 3.2. Nudos en las superficies de Seifert

Ahora definiremos una clase de superficies especiales que tienen relación con nudos.

**Definición 3.2.1.** *Una superficie de definición **Seifert** de un nudo  $K$  es una superficie con borde compacta, conexa y orientable tal que el borde es  $K$ , se denota  $S_K$ . Como su borde es conexo,  $S_K$  es homeomorfa a una esfera o un  $n$ -toro al que se le ha quitado el interior de un disco.*

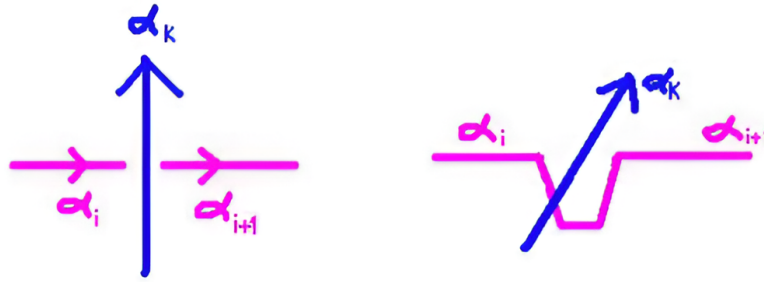


Figura 3.7: [Superficies, nudos y grupos localmente indicables, Jazmín Laila Schmunis]

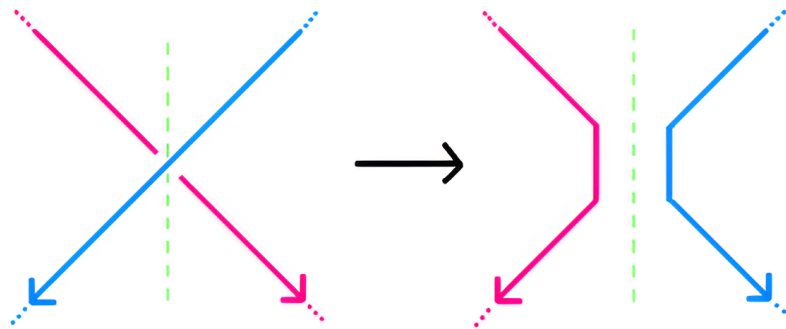


Figura 3.8: [Superficies, nudos y grupos localmente indicables, Jazmín Laila Schmunis]

**Corolario 3.2.1.** *Todo nudo tiene al menos una superficie de Seifert*

**Teorema 3.2.1** (Existencia de superficies de Seifert). *Sea  $K$  un nudo manso en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ , entonces  $K$  admite una superficie de Seifert (no es única).*

*Demostración:* Dado un nudo  $K$  en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ , vamos a describir un algoritmo que nos permitirá construir una superficie de Seifert a partir de una proyección regular de  $K$  sobre el plano  $\{z = 0\}$ . Construiremos una colección finita de superficies compactas y orientables cuya unión nos proporcionará la superficie de Seifert deseada.

1. Sea  $D$  la proyección que da una representación del nudo en  $\mathbb{R}^2$ , dada por  $n$  arcos, donde cada uno se corta en los cruces en los cuales el correspondiente tramo del nudo "pasa por abajo" (ver figura 3.7). Vamos a construir un nuevo dibujo en  $\mathbb{R}^2$ , al cual llamaremos  $D'$ , a partir del dado: tenemos entonces  $n$  cruces  $c_1, \dots, c_n$ . Vamos a ir modificando el dibujo cruce por cruce, como se muestra en la siguiente ilustración (figura 3.8), de modo que el dibujo final no posea ninguno.

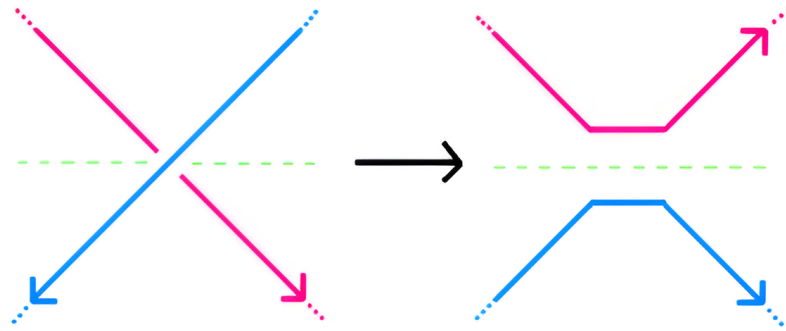


Figura 3.9: [Superficies, nudos y grupos localmente indicables, Jazmín Laila Schmunis]

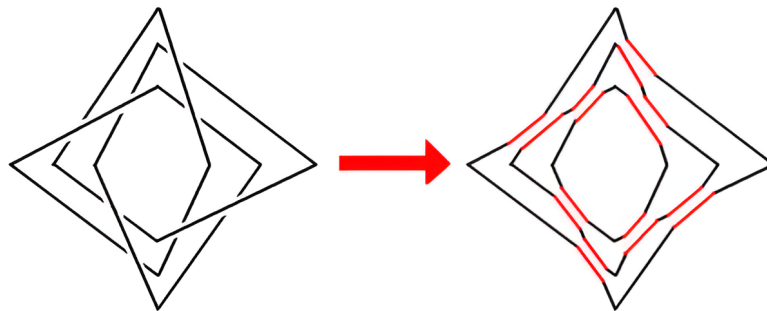


Figura 3.10: Ejemplo: modificamos la proyección del nudo  $T_{3,4}$  [Superficies, nudos y grupos localmente indicables, Jazmín Laila Schmunis]

Observemos que la línea de corte es la que deja una “flecha” de cada lado, de modo que se mantenga la orientación en la nueva figura. Es decir, no sería lo mismo hacerlo de este modo (figura 3.9).

Observemos que:

- a) En cada paso eliminamos un cruce, de modo que la figura final no poseerá ninguno.
- b) En cada cruce, un arco terminaba y otro empezaba. Con las modificaciones realizadas, ya ningún arco se cortará.
- c) Por (a) y (b), la nueva figura  $D'$  consta de finitas curvas CERRADAS que no se intersecan. Obtenemos entonces una colección finita de curvas simples cerradas disjuntas y concéntricas que reciben el nombre de *circuitos de Seifert*

2. Supongamos que tenemos  $m$  curvas concéntricas, llamémosles  $L_0, \dots, L_{m-1}$ ,

numeradas de afuera hacia adentro. Consideraremos ahora una copia  $L_i$  de cada una en el plano  $\{z = i\}$ . Cada una encierra una región homeomorfa a  $D^2$  en el

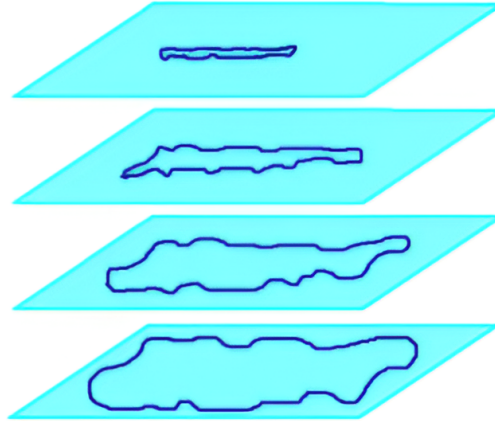


Figura 3.11: [Superficies, nudos y grupos localmente indicables, Jazmín Laila Schmunis]

plano correspondiente. Si tomamos dicha porción de cada plano, obtenemos una superficie compacta y orientable que llamaremos  $S_i$ .

- Ahora, por cada cruce  $c_i$  definimos una superficie  $B_i$  rectangular que conectará dos superficies  $S_k$  y  $S_{k+1}$  de la siguiente manera:

Tengamos en cuenta que el objetivo final es obtener una superficie orientable cuyo borde sea  $K$ . Para asegurarnos de que la superficie que construiremos resulte orientable, bastará asegurarnos de que tenga 2 "lados". Para simplificar la visualización y sin pérdida de generalidad, diremos que un lado es azul y el otro, verde. Para cada  $S_i$  el lado azul será el que mira "hacia arriba".  $B_i$  también tendrá un lado de cada color (Figura 3.12).

Observemos que, de ser  $S'$  la superficie dada por la unión de las  $S_i$ , su borde resulta una unión disjunta de  $\mathbb{S}^1$  que se corresponde con  $D'$ . Queremos modificar  $S'$  para que su borde sea  $K$ . La idea es, en cierto modo, volver de  $D'$  a  $D$  recuperando los cruces. Si observamos las figuras 3.9 y 3.11, veremos que, donde antes había un cruce, ahora hay dos segmentos enfrentados, uno perteneciente a  $L_k = \partial S_k$  y el otro a  $L_{k+1} = \partial S_{k+1}$ . Pegamos un lado de  $B_i$  a uno de estos, de manera que el lado azul de  $S_k$  se continúe con el lado azul de  $B_i$ , y el lado apuesto

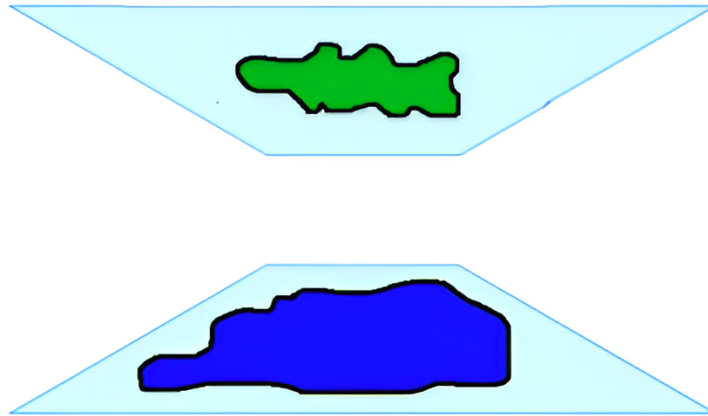


Figura 3.12: [Superficies, nudos y grupos localmente indicables, Jazmín Laila Schmunis]

al otro, pero con una torsión de por medio (que permitirá que nuevamente el lado azul de  $B_i$  se continúe con el lado azul de  $S_{k+1}$ ) según qué segmento pasaba originalmente por arriba como en la siguiente ilustración ¿Por qué esto

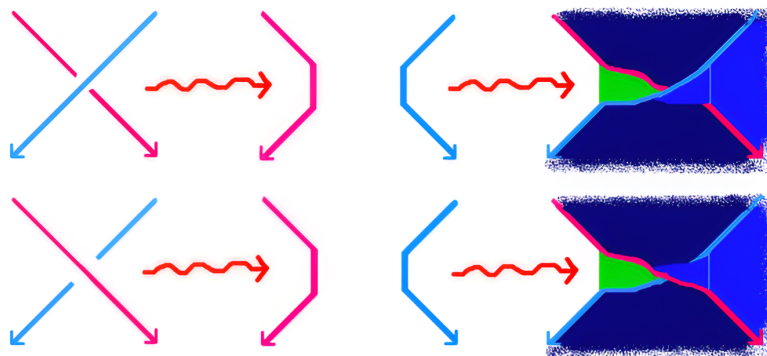


Figura 3.13: [Superficies, nudos y grupos localmente indicables, Jazmín Laila Schmunis]

efectivamente reconstruye el cruce  $c_i$  correspondiente? Observemos que, viendo  $L_k$  y  $L_{k+1}$  como poligonales, podemos suponer que este procedimiento sólo involucra 3 segmentos consecutivos de cada una de ellas como se ve en la Figura 3.13.

Al pegar  $B_i$  en el segmento del medio de cada una, dicho segmento ya no formará parte del borde de la nueva superficie, y ahora los segmentos de los extremos serán continuados por los lados de  $B_i$  que no fueron pegados, cruzándose uno por debajo y el otro por arriba según corresponda. En perspectiva se vería algo así (Figura 3.14).

Luego de finitos pasos, obtenemos la superficie  $S = S_1 \cup \dots \cup S_m \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$

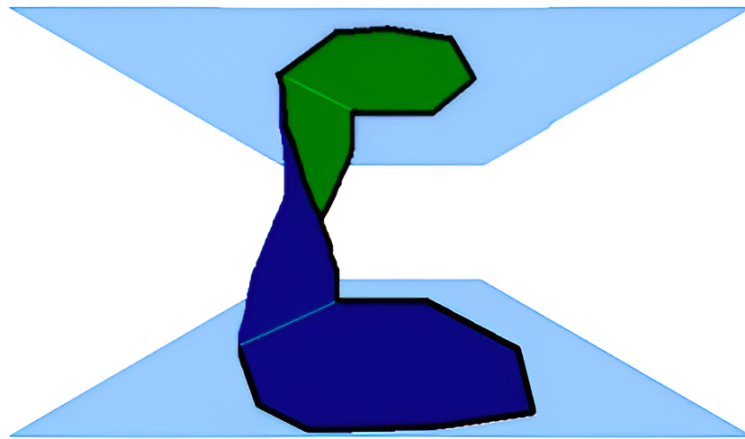


Figura 3.14: [Superficies, nudos y grupos localmente indicables, Jazmín Laila Schmunis]

que verifica ser orientable, compacta y tal que  $\partial S = K$ .

**Definición 3.2.2** (Género de un nudo). *Dado  $K$  un nudo en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$  y  $M$  una superficie de Seifert del mismo, decimos que  $M$  es minimal si  $g(M) \leq g(N)$  para toda superficie de Seifert  $N$  de  $K$ . en este caso, decimos que  $g(M)$  es el género de  $K$  y lo notamos  $g(K)$ . Si dos nudos  $K$  y  $K'$  son equivalentes, entonces existe  $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $h(K) = K'$ . en consecuencia, el género resulta ser un invariante de nudos.*

**Ejemplo 1.** *Todo 2-disco es superficie de Seifert para el nudo trivial. Por lo tanto, el nudo trivial tiene género cero.*

Dos superficies de Seifert con el mismo género son homeomorfas, pero no por ello su borde corresponde a nudos equivalentes

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $K$  un nudo, entonces  $K$  es equivalente al nudo trivial si y sólo si  $K$  es frontera de un disco.*

**Corolario 3.2.2.** *Sea  $K$  un nudo,  $K$  es equivalente al nudo trivial si y sólo si el género de  $K$  es cero.*

**Definición 3.2.3.** *Si un nudo  $K$  no puede ser descompuesto en dos nudos, entonces diremos que  $K$  es un nudo **primo**.*

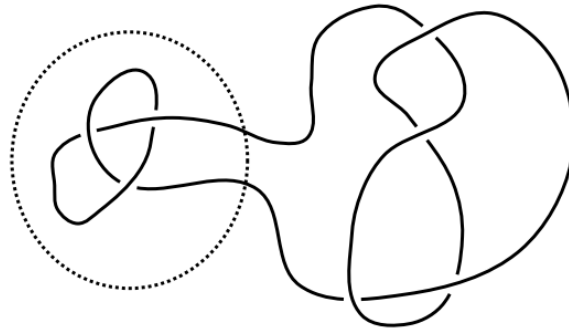


Figura 3.15: Descomposición de un nudo en un trébol y un nudo ocho, [superficies de Seifert, Marcos Torres Vivanco]

**Teorema 3.2.3** (Suma conexa). Sean  $K_1, K_2$  nudos,  $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$ .

**Corolario 3.2.3.** Existen infinitos nudos distintos, ya que si  $g(K_1), g(K_2) > 0$ ,

$$g(K_1 \# K_2) > g(K_1), g(K_2).$$

**Corolario 3.2.4.**  $g(A \# B) = g(A) + g(B)$  también se cumple para  $A, B$  superficies.

# Referencias Bibliográficas

- [1] Max Neumann Coto. “Notas del curso 3-variedades”. En: Instituto de Matematicas UNAM.
- [2] José Luis Cisneros Molina. “Introducción a la Teoría de Nudos”. En: Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, 2011.
- [3] Juan Carlos Ponce. “Nudos en el toro”. En: 2016.
- [4] Jazmín Laila Schmunis. “Superficies, nudos y grupos localmente indicables”. En: Universidad de Buenos Aires, 2015.