

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
ESCUELA DE POSGRADO



**COMPARACIÓN DE LAS REDES NEURONALES
INFORMADAS POR FÍSICA Y MÉTODOS NUMÉRICOS
TRADICIONALES PARA LA SIMULACIÓN DE ONDAS
SÍSMICAS**

PRESENTADO POR:

JOSÉ ANTONIO FUENTES VELÁSQUEZ
DEYSI TATIANA MARTÍNEZ MONTALVO

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

**MAESTRO(A) EN INGENIERÍA PARA LA INDUSTRIA
CON ESPECIALIZACION EN CIENCIAS DE LA
COMPUTACIÓN**

CIUDAD UNIVERSITARIA, ENERO 2026

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

MSc. JUAN ROSA QUINTANILLA

SECRETARIO GENERAL:

LCDO. PEDRO ROSALÍO ESCOBAR CASTANEDA

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

DECANO:

MSc. LUIS SALVADOR BARRERA MANCÍA

SECRETARIO:

ARQ. RAÚL ALEXANDER FABIÁN ORELLANA

ESCUELA DE POSGRADO

DIRECTOR:

MSc. ELMER ARTURO CARBALLO RUÍZ

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
ESCUELA DE POSGRADO

Trabajo de Graduación previo a la opción al Grado de:

**MAESTRO(A) EN INGENIERÍA PARA LA INDUSTRIA
CON ESPECIALIZACION EN CIENCIAS DE LA
COMPUTACIÓN**

Título :

**COMPARACIÓN DE LAS REDES NEURONALES
INFORMADAS POR FÍSICA Y MÉTODOS NUMÉRICOS
TRADICIONALES PARA LA SIMULACIÓN DE ONDAS
SÍSMICAS**

Presentado por:

JOSÉ ANTONIO FUENTES VELÁSQUEZ

DEYSI TATIANA MARTÍNEZ MONTALVO

Trabajo de Graduación Aprobado por:

Docente Asesor:

Dr. MIGUEL GARCÍA TORRES

SAN SALVADOR, ENERO 2026

Trabajo de Graduación Aprobado por:

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'Miguel García Torres', enclosed within a horizontal oval shape.

Docente Asesor:

Dr. MIGUEL GARCÍA TORRES

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
ESCUELA DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN INGENIERÍA PARA LA INDUSTRIA
CON ESPECIALIZACIÓN EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN



Proyecto de Tesis:

*Comparación de las Redes Neuronales Informadas por la Física Y
Métodos Numéricos Tradicionales para la Simulación De Ondas
Sísmicas*

Realizado por

Deysi Tatiana Martinez Montalvo
José Antonio Fuentes Velásquez

Para la obtención del título de

Grado en Ingeniería Para La Industria Con Especialización En
Ciencias De La Computación

Dirigido por

Dr. Miguel García Torres

Fecha:

19 de enero de 2026

Índice general

Resumen	II
Abstract	II
1 Introducción	1
1.1. Objetivos	3
1.1.1. Objetivo General	3
1.1.2. Objetivos Específicos	3
1.2. Estado del Arte	4
1.3. Sismología	7
1.3.1. Conceptos básicos	7
1.3.2. Propósitos de la sismología	7
1.3.3. Sismología Computacional	8
1.3.4. Sismicidad Histórica	9
1.4. Ondas elásticas en la Tierra	10
1.4.1. Ondas sísmicas	11
1.4.2. Tipos de Ondas Sísmicas	12
1.5. Propagación de ondas	13
1.6. Fenómenos Sísmicos	14
1.6.1. Características y comportamiento	15
1.6.2. Registros reales y sintéticos	16
2 Marco Teórico	17
2.1. Problema de la Ecuación Diferencial Parcial (PDE)	17
2.2. Problemas Inversos	19
2.2.1. Características de los Problemas Inversos	19
2.2.2. Soluciones por Regularización de Tikhonov	20
2.2.3. Soluciones por Optimización	21
2.2.4. Soluciones por Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs)	21
2.3. Redes Neuronales, PINNs, Arquitectura	22
2.3.1. Perceptrón	23
2.3.2. Perceptrón Multicapa	23
2.3.3. Funcional de Pérdida	25
2.3.4. Puntos de Colocación	25
2.3.5. Cálculo del Residual en los Puntos de Colocación	26
2.3.6. Funcional de Pérdida	26
2.3.7. Función de Costo	27
2.3.8. Error	27
2.3.9. Retropropagación (BackPropagation)	28
2.3.10. Optimizadores	30
2.3.11. Diferenciación Automática	30
2.3.12. Funciones de Activación	31

2.3.13. Hiperparámetros	31
2.3.14. Estructura General de una PINN para Resolver PDEs	32
2.3.15. Construcción del Operador Diferencial y Sustitución	32
2.3.16. Función de Pérdida Completa para PINNs	34
2.3.17. Término de Pérdida Física (\mathcal{L}_{PDE})	34
2.3.18. Término de Pérdida de Condiciones Iniciales (\mathcal{L}_{IC})	35
2.3.19. Término de Pérdida de Condiciones de Frontera (\mathcal{L}_{BC})	35
2.3.20. Función de Pérdida Final	35
2.3.21. Arquitectura de la PINNs	36
2.4. Métodos Numéricos	37
2.4.1. Método de Diferencias Finitas (FDM)	37
2.4.2. Método de Elementos Finitos (FEM)	40
3 Resultados	42
3.1. Métricas de Evaluación	42
3.2. Simulación de Problemas directos	43
3.2.1. Solución utilizando PINNs.	43
3.2.2. Solución utilizando FDM	46
3.2.3. Solución utilizando FEM.	47
3.3. Aplicación a los Problemas Inversos	48
3.3.1. Estimación de la Velocidad de Onda mediante Diferencias Finitas	49
3.3.2. Estimación de la Velocidad de Onda mediante Elementos Finitos	50
3.3.3. Estimación de la Velocidad de Onda mediante Redes Neuronales Informadas por la Física	51
4 Conclusiones	54
4.1. En la resolución de problemas directos (simulación con parámetros conocidos):	54
4.2. En la aplicación a problemas inversos (estimación de la velocidad de onda c , con $c_{true} = 1,0$):	55
4.3. Limitaciones y Desafíos	56
Bibliografía	58

Resumen

Los terremotos son fenómenos naturales impredecibles y devastadores, que generan daños significativos en poco tiempo. La complejidad de los procesos tectónicos y la variabilidad en el comportamiento de las placas hacen difícil predecir estos eventos de manera precisa. Aunque los avances tecnológicos han mejorado la recolección de datos sísmicos, la cobertura limitada y la baja resolución espacial de los sensores dificultan la detección temprana y la evaluación de riesgos en áreas menos monitoreadas.

En este contexto, las Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs) ofrecen una solución innovadora al integrar modelos geológicos y físicos con técnicas de aprendizaje profundo, mejorando la simulación de la propagación de ondas sísmicas. Este estudio se enfoca en la aplicación de PINNs para simular la ecuación de onda en una dimensión, utilizando el método de diferencias finitas como punto de comparación. Con la implementación en Python, se comparó el desempeño de los métodos.

Los resultados indican que, para problemas directos 1D, los métodos tradicionales (FDM y FEM) superan a las PINNs en eficacia computacional (tiempos $< 1s$ vs $> 600s$) y precisión (errores de 10^{-5} vs 10^{-2}). Sin embargo, las PINNs demostraron ser prometedoras en problemas inversos para la estimación de velocidad de onda (error absoluto $\approx 0,0015$), ofreciendo una flexibilidad geométrica y libre de malla ventajosa para escenarios complejos.

Palabras claves: Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs), Simulación de ondas sísmicas, Método de Diferencias Finitas (FDM), Predicción de terremotos, Aprendizaje profundo, Mitigación de riesgos

Abstract

Earthquakes are unpredictable and devastating natural phenomena that cause significant damage in a short time. The complexity of tectonic processes and the variability in plate behavior make it difficult to accurately predict these events. Although technological advances have improved the collection of seismic data, the limited coverage and low spatial resolution of sensors hinder early detection and risk assessment in less monitored areas.

In this context, Physics-Informed Neural Networks (PINNs) offer an innovative solution by integrating geological and physical models with deep learning techniques, enhancing the simulation of seismic wave propagation. This study focuses on the application of PINNs to simulate the one-dimensional wave equation, using the finite difference method as a benchmark. With an implementation in Python, the performance of both methods was compared.

The results indicate that for 1D forward problems, traditional methods (FDM and FEM) outperform PINNs in computational efficiency (times $< 1s$ vs $> 600s$) and accuracy (errors of 10^{-5} vs 10^{-2}). However, PINNs proved to be promising in inverse problems for wave speed estimation (absolute error $\approx 0,0015$), offering advantageous geometric flexibility and mesh-free modeling for complex scenarios.

Keywords: Physics-Informed Neural Networks (PINNs), Seismic wave simulation, Finite Difference Method (FDM), Earthquake prediction, Deep learning, Risk mitigation.

1. Introducción

En el ámbito de las simulaciones aplicadas a la sismología, un desafío fundamental reside en la predicción precisa de las ondas generadas durante un evento sísmico. Para abordar estos retos, es muy importante perfeccionar el modelado y la solución numérica de estos eventos geológicos y físicos que simulan la propagación de estas ondas, solo así se podrán establecer estrategias de mitigación de riesgos más robustas y sistemas de alerta temprana con mayor capacidad predictiva y eficacia.

La simulación de la propagación de ondas sísmicas es una herramienta esencial en sismología e ingeniería sísmica, permitiendo anticipar los efectos de los terremotos. Estas simulaciones se implementan utilizando métodos numéricos que discretizan las ecuaciones de onda en el espacio y el tiempo. La precisión con la que estos métodos pueden predecir cómo las ondas se desplazan a través de la Tierra y afectan las edificaciones no es trivial; depende intrínsecamente de un conjunto de factores interconectados. Estos abarcan desde la formulación matemática y la implementación del propio método numérico (por ejemplo, diferencias finitas, elementos finitos, elementos espectrales), hasta la detallada parametrización del modelo geológico que representa el medio de propagación. Asimismo, las características de la fuente sísmica (magnitud, profundidad, orientación de la falla) y las propiedades de las ondas que se investigan (amplitud, frecuencia, duración) deben ser cuidadosamente consideradas. La interacción de todos estos elementos determina la calidad y el realismo de las simulaciones, siendo fundamental para la evaluación del peligro y el diseño sismo-resistente.

Tradicionalmente, los métodos numéricos como las diferencias finitas (DF) y el método de elementos finitos (FEM) han sido las herramientas más utilizadas para resolver las ecuaciones de onda. Sin embargo, estos enfoques enfrentan limitaciones significativas a medida que los modelos geofísicos se vuelven más detallados y complejos.

Entre los desafíos más notables para el cálculo de las simulaciones se encuentran los altos costos computacionales y las dificultades para modelar medios heterogéneos y anisotrópicos, lo que limita la precisión y eficiencia de las simulaciones. Dada estas limitaciones, surge una nueva técnica basada en las Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs), la cual plantea una alternativa prometedora para resolver ecuaciones diferenciales parciales (PDEs).

Estas redes neuronales incorporan directamente las leyes físicas en el proceso de aprendizaje, lo que las hace potencialmente más eficientes y precisas en comparación con los métodos numéricos tradicionales. El presente trabajo de grado se centra en la comparación de las PINNs con los métodos tradicionales de DF y FEM para determinar si pueden ofrecer una mayor eficiencia computacional y precisión en la simulación de ondas sísmicas.

El desarrollo de una comparación detallada entre las PINNs y los métodos tradicionales no solo permitirá identificar las ventajas de estas nuevas herramientas, sino que también podría transformar la práctica en sismología, facilitando simulaciones rápidas y detalladas. Al evaluar y comparar la eficiencia y precisión de las Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs) con los métodos numéricos tradicionales (diferencias finitas y elementos finitos) en la simulación de ondas sísmicas.

Para lograrlo, se implementarán modelos de PINN que integren las ecuaciones de onda y se realizarán simulaciones comparativas utilizando DF y FEM en los mismos escenarios. Los resultados serán evaluados en términos de precisión y eficiencia computacional, con especial atención a la capacidad de los modelos para gestionar geometrías complejas y condiciones de frontera. Además de implementar modelos de PINN para simular la propagación de ondas sísmicas en medios heterogéneos, realizando simulaciones comparativas con DF y FEM; evaluar la precisión y eficiencia computacional de las PINN en comparación con los métodos tradicionales; e identificar escenarios en los que las PINNs presentan ventajas computacionales significativas.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo General

Demostrar la eficiencia de las Redes Neuronales Informadas por la Física en la modelación de la propagación de ondas sísmicas y la evaluación de riesgos sísmicos, ofreciendo una comparación detallada con las metodologías tradicionales Diferencias Finitas y Elemento Finito para establecer su potencial como una herramienta de simulación superior.

1.1.2. Objetivos Específicos

1. Implementar modelos de Redes Neuronales Informadas por la Física que incorporen las ecuaciones fundamentales de la dinámica sísmica para simular la propagación de ondas sísmicas en diferentes medios.
2. Realizar simulaciones paralelas utilizando los métodos Diferencias Finitas y

Elemento Finito para los mismos escenarios sísmicos modelados con Redes Neuronales Informadas por la Física asegurando una base comparativa equitativa.

3. Evaluar la precisión, eficiencia computacional y flexibilidad de los modelos Redes Neuronales Informadas por la Física en contraste con Diferencias Finitas y Elemento Finito, particularmente en términos de manejo de geometrías complejas y condiciones de frontera.

1.2. Estado del Arte

Partiendo del análisis de las simulaciones para conocer y predecir el comportamiento de las heterogeneidades en el subsuelo de la Tierra es una tarea crucial en geofísica, y las inversiones sísmicas son herramientas esenciales para lograrla. Tradicionalmente, la inversión de formas de onda completas (FWI- Forms Wave Inversion) ofrece resultados superiores a la tomografía de tiempos de viaje, especialmente cuando la longitud de onda dominante de la onda sísmica es mayor que la escala de las heterogeneidades objetivo [1, 2]. Sin embargo, la FWI sigue siendo un desafío técnico y computacional considerable; aunque los métodos adjuntos pueden reducir el costo computacional a solo dos simulaciones directas por paso de optimización, su derivación e implementación son complejas y específicas para cada caso.

La última década ha presenciado una explosión en la cantidad de datos sísmicos registrados y avances significativos en las técnicas de aprendizaje automático, particularmente en el aprendizaje profundo. Esto ha motivado a los sismólogos a buscar métodos más eficientes para problemas como la detección de terremotos, la selección automática de fases y la eliminación de ruido en las señales sísmicas. A pesar del éxito del aprendizaje profundo en campos con abundancia de

datos, las aplicaciones de imágenes sísmicas han enfrentado limitaciones debido a la escasez de conjuntos de datos espacialmente densos.

En este contexto, han surgido las redes neuronales informadas por la física (PINNs), una clase novedosa de redes neuronales profundas que ofrecen un marco mejorado para superar la dependencia de grandes volúmenes de datos etiquetados. Las PINNs aprovechan las leyes físicas que rigen los procesos que generan los datos, reduciendo significativamente la necesidad de datos etiquetados durante el entrenamiento [3].

Este enfoque se ha aplicado con éxito en diversas disciplinas, incluyendo mecánica de fluidos, sólidos y transferencia de calor. En sismología, se ha demostrado que las PINNs pueden usarse como solucionadores de la propagación de ondas acústicas[4, 2]. La aplicación de PINNs a la FWI para problemas sismológicos se ha presentado como un estudio pionero en este ámbito. También se han utilizado para resolver la ecuación de Eikonal, crucial para la predicción de tiempos de primera llegada y la tomografía de tiempos de viaje . Las ventajas clave de las PINNs en este campo incluyen su formalismo sin malla, que permite una implementación flexible de la ecuación de ondas y las condiciones de contorno, como las condiciones de contorno absorbentes, que se satisfacen automáticamente. Además, el conocimiento a priori de la estructura del subsuelo puede codificarse sin problemas en la formulación de las PINNs. Los estudios demuestran que las PINNs ofrecen excelentes resultados para las inversiones con una complejidad computacional limitada. También pueden manejar múltiples eventos sísmicos en una sola red neuronal, lo que optimiza significativamente el problema inverso. Incluso ante la presencia de datos potencialmente ruidosos o escasos, la integración de las ecuaciones gobernantes en el entrenamiento de las PINNs proporciona un marco que busca la robustez en la inversión al reducir la dependencia de grandes

volúmenes de datos etiquetados, abordando así el desafío de los datos imperfectos.

En la estimación de la estructura de velocidad sísmica y la determinación de hipocentros, el uso de PINNs ha permitido una cuantificación completa de la incertidumbre (UQ) y un cálculo rápido que es órdenes de magnitud más veloz que los métodos numéricos convencionales, lo cual es vital para la difusión rápida de información sísmica. A pesar de estos avances, persisten desafíos para las PINNs, especialmente al aplicar la misma estrategia a estructuras más complejas con gradientes de velocidad pronunciados o discontinuidades abruptas. La suavización excesiva en los resultados de la inversión puede mitigarse con conjuntos de datos de entrenamiento más grandes o la inclusión de conocimiento a priori sobre las discontinuidades.

La elección heurística de los pesos para los términos de la función de pérdida y el tamaño de la red también representa un desafío, así como los altos costos de memoria para dominios computacionales grandes. Futuras direcciones incluyen el uso de PINNs conservadoras (cPINN) y PINNs extendidas (XPINN) para descomponer el dominio computacional, lo que podría mejorar la flexibilidad y eficiencia al tratar con campos de ondas complejos y superar el sesgo espectral de las redes neuronales para componentes de alta frecuencia. Además, se están explorando modelos sustitutos para la carga paramétrica, que infieren directamente las formas de onda completas para diferentes ubicaciones de carga. La descomposición temporal del dominio también ha sido propuesta para mejorar la escalabilidad y la precisión en modelos a gran escala.

Paralelamente a estos enfoques de vanguardia, los métodos numéricos tradicionales como el Método de Elementos Finitos (FEM) [5, 6], el Método de Diferencias Finitas (FD) y el Método de Elementos Espectrales (SE) se siguen utilizando para la predicción numérica de los efectos sísmicos locales.

1.3. Sismología

1.3.1. Conceptos básicos

La sismología es una disciplina científica que forma parte de la geofísica y que estudia la propagación de las ondas sísmicas (ondas de movimiento) en el interior y la superficie del planeta, fruto de los movimientos de las placas tectónicas de la corteza terrestre.

Dicho de un modo más simple, es la ciencia que estudia los terremotos y otros fenómenos similares. Esta disciplina se ocupa de los movimientos de la corteza terrestre, las tensiones que estos ocasionan y el impacto que generan.

Permite entender dónde, por qué y cómo se producen los sismos, así como la evolución tectónica de la región donde éstos se producen. Para estudiar la sismología es preciso tomar una perspectiva tanto geográfica como histórica. La sismología realiza contribuciones importantes a la sociedad, ya que ayuda a cuantificar la amenaza sísmica que afecta a las poblaciones.

1.3.2. Propósitos de la sismología

- Estudiar la propagación de las ondas sísmicas en el interior del planeta, lo cual revela información respecto de cómo se compone el interior de la Tierra: materiales, disposición, estructuras.
- Proporcionar respuesta a la pregunta sobre el origen de los sismos y conocer los distintos tipos que existen: temblores, terremotos, maremotos, entre otros.
- Diseñar estrategias para la prevención de sismos que permitan salvar vidas y

minimizar el daño de los temblores. Esto puede darse, por ejemplo, mediante el aporte de información clave sobre materiales y técnicas para la industria de la construcción, o el diseño de manuales de conducta en caso de terremoto.

- Reunir información sísmica que pueda ser útil a otras disciplinas y saberes, para expandir los conocimientos científicos.

1.3.3. Sismología Computacional

La sismología computacional se centra en la resolución numérica completa de las ecuaciones diferenciales parciales que describen la propagación de ondas elásticas en modelos tridimensionales (3D) de la Tierra, donde las soluciones analíticas no son posibles. Este enfoque se utiliza para generar sismogramas sintéticos, fundamentales para comprender la estructura interna de la Tierra y las fuentes de energía sísmica. Aunque existen métodos clásicos como la teoría de rayos y las soluciones modales, las técnicas numéricas modernas, como las soluciones en el dominio del tiempo, permiten una representación más realista y detallada de las ondas sísmicas. Estas simulaciones son intensivas en recursos computacionales, lo que requiere hardware avanzado y paralelización de algoritmos.

La sismología computacional abarca aplicaciones como estudios de peligrosidad sísmica, donde se calculan escenarios de movimientos del suelo, y estudios de física de terremotos, que investigan las condiciones de ruptura sísmica. En la exploración geofísica, el enfoque suele ser la generación de ondas corporales, evitando las ondas superficiales, y puede implicar modelos complejos con anisotropía o poroelasticidad. En sismología global, se deben considerar efectos como la curvatura terrestre, utilizando métodos como las coordenadas esféricas o el enfoque de la esfera dividida en cubos.

Otras áreas de aplicación incluyen la vulcanología, donde se modelan señales

sísmicas complejas influenciadas por la topografía, y la tomografía sísmica, especialmente la inversión completa de formas de onda. Este último enfoque combina modelos 3D y observaciones para mejorar iterativamente las imágenes del interior de la Tierra, lo que podría revolucionar nuestra comprensión del planeta.

Este campo, impulsado por la evolución del hardware, ofrece herramientas potentes pero exige precaución en su uso. Es fundamental complementar las simulaciones 3D con métodos clásicos para verificar resultados y desarrollar un entendimiento profundo de la propagación de ondas sísmicas. Aunque las simulaciones numéricas han avanzado significativamente, los métodos clásicos siguen siendo relevantes por su eficiencia y simplicidad en ciertos contextos. [1]

1.3.4. Sismicidad Histórica

La sismicidad histórica se refiere al estudio y registro de terremotos ocurridos antes de la era instrumental, es decir, antes de la disponibilidad de sismógrafos modernos. Este campo se basa en la recopilación y análisis de documentos históricos, relatos, registros arquitectónicos y evidencias geológicas para reconstruir eventos sísmicos pasados.

En El Salvador, un país con una notable actividad sísmica debido a su ubicación en el Cinturón de Fuego del Pacífico, la sismicidad histórica es de particular interés. Aunque no se dispone de registros instrumentales detallados de los terremotos anteriores al siglo XX, existen documentos históricos que describen eventos significativos. Por ejemplo, el terremoto de San Salvador de 1854 causó una destrucción considerable en la capital y es uno de los eventos sísmicos más documentados de la época.

El estudio de la sismicidad histórica es esencial para comprender los patrones sísmicos de una región y evaluar su riesgo sísmico actual. Al analizar eventos pasados, los sismólogos pueden identificar áreas propensas a terremotos y estimar

la magnitud y frecuencia de futuros eventos. Esta información es crucial para la planificación urbana, la construcción de infraestructuras resistentes y la preparación ante desastres naturales.

En la actualidad, instituciones como el Instituto Geográfico Nacional de España han desarrollado bases de datos y mapas que recopilan información sobre la sismicidad histórica en diversas regiones. Estos recursos son valiosos para investigadores y autoridades en la gestión del riesgo sísmico.

1.4. Ondas elásticas en la Tierra

El estudio de las ondas sísmicas y las fuentes implica desafíos significativos al calcular sismogramas sintéticos y abordar problemas complejos de modelos de la Tierra o mecanismos de fuentes sísmicas. Aunque las herramientas computacionales modernas permiten obtener resultados preliminares rápidamente, la validación de estos resultados es crucial. Esto incluye verificar la precisión en los tiempos de viaje y amplitudes, así como asegurar la correcta implementación del modelo de la Tierra, las fuentes y los receptores; como las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas elásticas, los fenómenos esperados en medios simples, las condiciones de contorno, y la descripción de las fuentes sísmicas. Un aspecto fundamental es la relación entre la longitud de onda y el número de puntos de muestreo necesarios en las simulaciones numéricas.

Las ondas superficiales, como las de Rayleigh, dominan en terremotos grandes y son influenciadas por la condición de contorno libre de tensiones en la superficie terrestre. Estas ondas tienen un rango de periodos que varía de decenas a cientos de segundos y exhiben dispersión física, donde las ondas de mayor periodo llegan antes que las de menor periodo.

En términos prácticos, la elección de frecuencias objetivo, fases sísmicas a

modelar (ondas corporales o superficiales) y la heterogeneidad del modelo de velocidad son factores determinantes en cómo se deben discretizar los modelos de la Tierra. Además, los sismogramas están influenciados tanto por la fuente como por la estructura del medio. Para simular correctamente las ondas superficiales, es esencial implementar condiciones de contorno precisas.

1.4.1. Ondas sísmicas

Las ondas sísmicas son vibraciones o perturbaciones que se propagan a través de la Tierra como resultado de la liberación repentina de energía en su interior. Esta energía puede ser liberada por eventos naturales como terremotos, erupciones volcánicas o incluso explosiones artificiales. Estas ondas representan la manifestación energética de los sismos y se propagan en todas direcciones desde su fuente.

Cada tipo de onda sísmica tiene características específicas y viaja a diferentes velocidades dependiendo del material a través del cual se desplaza. Si bien todas las ondas sísmicas pueden propagarse a través de las rocas, no todas son capaces de atravesar líquidos o gases. Esto proporciona información crucial a los geólogos, quienes estudian las ondas sísmicas no solo para comprender los sismos, sino también para investigar la estructura interna de la Tierra.

Una onda elástica es una deformación que se propaga a través de un medio elástico, y cuando el medio es la Tierra, se denomina onda sísmica. El análisis de estas ondas permite a los científicos obtener detalles sobre las propiedades físicas de los materiales terrestres, contribuyendo significativamente al estudio de la geología y la sismología.[7]

1.4.2. Tipos de Ondas Sísmicas

Las ondas sísmicas se clasifican en dos grandes grupos: profundas y superficiales, según su comportamiento y la región de propagación. [8]

■ Ondas Profundas: P y S

- **Ondas Primarias (P):** Son las más rápidas y las primeras en registrarse en los sismógrafos, de ahí su nombre. Las partículas de las rocas vibran en la misma dirección de la propagación de la onda. Estas ondas pueden desplazarse tanto en sólidos como en líquidos, aumentando su velocidad en materiales más rígidos. Se originan en el hipocentro y, al atravesar diferentes materiales, pueden reflejarse, refractarse y cambiar de velocidad.
- **Ondas Secundarias (S):** Viajan a menor velocidad y llegan después de las ondas P. Las partículas de las rocas vibran de forma perpendicular a la dirección de propagación de la onda. A diferencia de las ondas P, las ondas S no se transmiten a través de líquidos, solo en sólidos, lo que las hace útiles para estudiar las propiedades del interior de la Tierra. También se originan en el hipocentro y sufren cambios al pasar de un medio a otro.

■ Ondas Superficiales: Love (L) y Rayleigh (R)

Estas ondas son más lentas y se desplazan únicamente por la superficie terrestre, en las interfases tierra-aire y tierra-agua. Se originan en el epicentro y son responsables de gran parte de los daños asociados a los terremotos.

- **Ondas Love (L):** Mueven el suelo horizontalmente y de manera perpendicular a la dirección de propagación. Se generan en la interfase entre medios con propiedades mecánicas diferentes.
- **Ondas Rayleigh (R):** Se transmiten de forma similar a las olas del mar, moviendo las partículas en trayectorias elípticas. Estas ondas combinan

movimientos verticales y horizontales, lo que genera un efecto más destructivo.

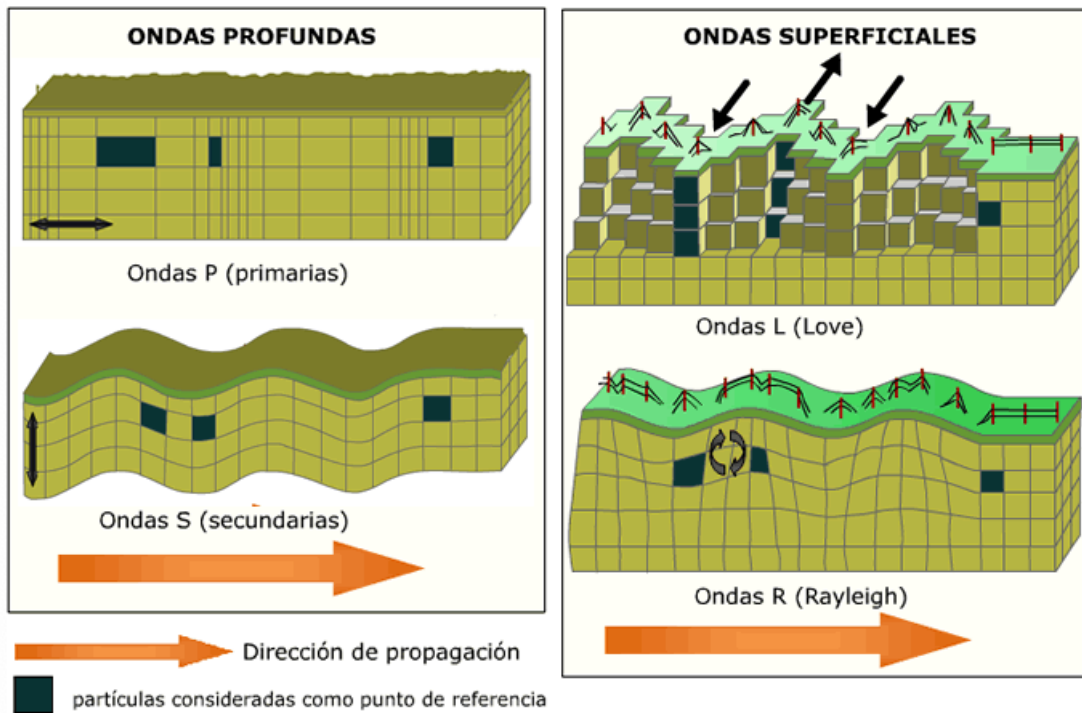


Figura 1.1: Tipos de Ondas sísmicas

1.5. Propagación de ondas

La propagación de las ondas producidas por los terremotos está determinada por la mecánica de los medios elásticos y, por tanto, sus velocidades dependen de las características elásticas del medio, cuya distribución puede estudiarse mediante la observación de los tiempos de recorrido y amplitudes de estas ondas.

El cálculo del epicentro de un sismo se basa en la triangulación, un método sencillo que requiere al menos tres estaciones sismológicas. Cuando ocurre un terremoto, las ondas sísmicas P (primarias) y S (secundarias) se propagan en todas direcciones a diferentes velocidades, siendo la onda P más rápida que la onda S. A medida que las ondas se alejan del epicentro, aumenta la diferencia de tiempo entre la llegada de ambas (TS-P). Esta diferencia permite estimar la distancia del

epicentro a cada estación.

Para simplificar, se asume que la Tierra es homogénea y la velocidad de la onda P es constante. Con esta premisa, la distancia al epicentro puede calcularse multiplicando TS-P por la velocidad de la onda P. Por ejemplo, en tres estaciones (THA, TCA y VCA), las diferencias TS-P de 60, 80 y 110 segundos corresponden a distancias de 360 km, 480 km y 660 km respectivamente. Utilizando un mapa y un compás, se trazan circunferencias alrededor de cada estación; la intersección de los tres arcos indica el epicentro.[9]

Aunque este método fue ampliamente utilizado antes de la era computacional, los cálculos actuales son más precisos. Hoy en día, se emplean múltiples estaciones y modelos específicos que consideran la estructura de la corteza terrestre, como las variaciones de velocidad de las ondas en su trayectoria. Estos cálculos utilizan curvas "camino-tiempo", que relacionan el tiempo TS-P con la distancia recorrida, y algoritmos computacionales basados en modelos matemáticos.[9] El proceso iterativo optimiza los resultados, determinando con alta probabilidad la ubicación exacta del epicentro, su profundidad y el momento del evento.

1.6. Fenómenos Sísmicos

Los efectos de un sismo traen como consecuencia el sacudimiento del suelo, los incendios, las olas marinas sísmicas y los derrumbes, así como la interrupción de los servicios vitales, el pánico y el choque psicológico. Los daños dependen de la hora en que ocurre el sismo, la magnitud, la distancia del epicentro, la geología del área, el tipo de construcción de las diversas estructuras, densidad de la población y duración del sacudimiento.

Para cuantificar o medir el tamaño de un temblor se utilizan las escalas de intensidad y magnitud. La escala de **Intensidad o de Mercalli** está asociada a un

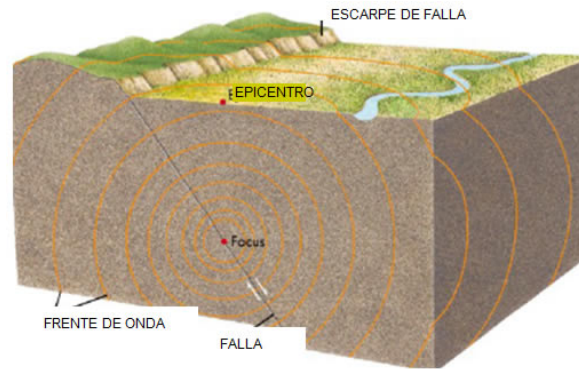


Figura 1.2: Fenómeno sísmico

lugar determinado y se asigna en función a los daños o efectos causados al hombre y a sus construcciones. La escala de **Magnitud o Richter** está relacionada con la energía que se libera durante un temblor y se obtiene en forma numérica a partir de los registros obtenidos con los sismógrafos, esta es la manera más conocida y más ampliamente utilizada para clasificar los sismos.

1.6.1. Características y comportamiento

- Las diversas ondas sísmicas viajan a diferentes velocidades por lo que llegan al sismógrafo a diferentes horas, los tiempos de viaje se ilustran como gráficas de tiempo-distancia llamados sismogramas con lo que se podrá determinar el epicentro de cualquier sismo.
- El punto exacto en donde se origina el sismo se llama foco o hipocentro, se sitúa debajo de la superficie terrestre a unos pocos kilómetros hasta un máximo de unos 700 km de profundidad.
- El epicentro es la proyección del foco a nivel de tierra, es decir, el punto de la superficie terrestre situada directamente sobre el foco, donde el sismo alcanza su mayor intensidad.
- El fallamiento (falla) de una roca es causado precisamente por la liberación repentina de los esfuerzos (compresión, tensión o de cizalla) impuestos al

terreno, de esta manera, la tierra es puesta en vibración; esta vibración se debe a que las ondas sísmicas se propagan en todas las direcciones y transmiten la fuerza que se genera en el foco sísmico hasta el epicentro en proporción a la intensidad y magnitud de cada sismo.

1.6.2. Registros reales y sintéticos

Los registros de datos reales son datos que provienen de observaciones o mediciones directas del mundo real, recopilados a partir de eventos, personas, sistemas o fenómenos reales mediante métodos como encuestas, sensores, transacciones o experimentos. La mayor ventaja es que son precisos y reflejan las condiciones reales. Sin embargo, pueden ser difíciles de obtener por cuestiones de privacidad, costos o limitaciones en el acceso a las fuentes de datos.

Los registros de datos sintéticos son datos generados artificialmente mediante modelos matemáticos o algoritmos de simulación que intentan replicar las características y patrones de los datos reales, pero sin ser una copia directa de ellos. Facilitan la experimentación y el análisis cuando no es posible acceder a datos reales, ayudan a evitar problemas de privacidad y permiten crear escenarios hipotéticos. Sin embargo, si los modelos que generan los datos sintéticos no son precisos, los datos pueden no representar fielmente las condiciones reales.

2. Marco Teórico

En la siguiente sección se abordarán desde generalidades básicas de la ciencia de la sismología, sus características y comportamientos hasta funciones más avanzadas que involucran métodos numéricos. Una breve introducción de los problemas inversos, sus características y algunos métodos para solucionarlos, exponiendo conceptos que ayudaran a clarificar la teoría presentada.

2.1. Problema de la Ecuación Diferencial Parcial (PDE)

El problema considera una **ecuación de onda unidimensional** definida en un dominio espacial y temporal, con condiciones iniciales y de frontera especificadas.

La ecuación de onda unidimensional está dada por:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, L], t \geq 0,$$

donde $u(x, t)$ es la función desconocida que describe el desplazamiento en el tiempo t y el espacio x , c es la velocidad de propagación de la onda, $L = 1,0$ es la longitud del dominio espacial.

Para el dominio definimos el problema se define en:

$$(x, t) \in [0, L] \times [0, T],$$

donde $x \in [0, 1]$ es la dimensión espacial, $t \in [0, T]$ es el intervalo de tiempo.

Para la condición inicial para el desplazamiento $u(x,0)$ está definida como:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, L].$$

Adicionalmente, se asume que la velocidad inicial es cero:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad x \in [0, L].$$

Considerando las condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet en ambos extremos del dominio espacial:

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

La solución analítica de la ecuación de onda se basa en la **fórmula de d'Alembert**:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)),$$

donde: $f(x) = \sin(\pi x)$ representa la condición inicial, x está restringido al dominio espacial mediante la función, $x \in [0, L]$.

Esta solución representa la superposición de dos ondas que se propagan en direcciones opuestas con velocidad c , reflejando las condiciones iniciales y de frontera, donde $L = 1,0$ y $T = 1,0$. La solución analítica para este problema, con un valor conocido de c , es:

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \cos(\pi ct) \tag{2.1}$$

2.2. Problemas Inversos

Los problemas inversos son una clase de problemas matemáticos que involucran la determinación de las causas subyacentes a partir de los efectos observados. Estos problemas son comunes en diversas disciplinas científicas y tecnológicas, donde la medición directa de los parámetros de interés no es posible o es impracticable.

Los problemas inversos tienen aplicaciones en diversas áreas, como:

- **Geofísica:** En geofísica, los problemas inversos se utilizan para determinar la estructura subterránea a partir de ondas sísmicas. Al analizar cómo las ondas se propagan y se reflejan, se pueden inferir propiedades del subsuelo como la densidad y la velocidad de propagación de las ondas.
- **Medicina:** En medicina, los problemas inversos se aplican en técnicas de imagen como la tomografía por ultrasonido. Al analizar cómo las ondas de ultrasonido se propagan a través del cuerpo, se pueden reconstruir imágenes del interior del cuerpo.
- **Ingeniería:** En ingeniería civil, los problemas inversos ayudan a evaluar la integridad estructural de edificios y puentes mediante el análisis de vibraciones. Al medir las vibraciones inducidas por cargas externas, se pueden determinar parámetros como la rigidez y la masa de la estructura.

Sin embargo, también presentan desafíos, como la presencia de ruido en los datos y la no linealidad de los modelos, lo que puede llevar a soluciones no únicas o inestables.

2.2.1. Características de los Problemas Inversos

Los problemas inversos se caracterizan por las siguientes propiedades:

1. **Existencia, Unicidad y Estabilidad:** Según Hadamard, un problema está correctamente planteado si su solución existe, es única y es estable frente a pequeñas perturbaciones en los datos. Sin embargo, muchos problemas inversos no cumplen estas condiciones, lo que los hace incorrectamente planteados.
2. **Tipos de Problemas Inversos:** Estos problemas pueden variar desde la reconstrucción de imágenes en tomografía computarizada hasta la determinación de parámetros físicos en ecuaciones diferenciales. Cada tipo requiere métodos específicos para su resolución.
3. **Ruido y Errores:** Los datos medidos suelen estar contaminados con ruido o errores, lo que complica la resolución del problema inverso. Esto puede llevar a soluciones inestables o no únicas.

Para resolver problemas inversos, se utilizan varios métodos:

2.2.2. Soluciones por Regularización de Tikhonov

Este método es ampliamente utilizado para estabilizar problemas inversos incorrectamente planteados. Introduce un parámetro de regularización α que minimiza la discrepancia entre los datos observados y las predicciones del modelo, al mismo tiempo que alisa la solución. La función de pérdida se define como:

$$L = \|Ax - \mathbf{b}\|^2 + \alpha \|x\|^2$$

donde A es la matriz del sistema, x es el vector de parámetros a determinar, \mathbf{b} es el vector de datos observados y α es el parámetro de regularización.

2.2.3. Soluciones por Optimización

Muchos problemas inversos se resuelven mediante técnicas de optimización, donde se busca minimizar una función que mide la diferencia entre los datos medidos y las predicciones del modelo. Por ejemplo, si tenemos un modelo lineal $y = Ax + b$, la función de pérdida podría ser:

$$L = \sum_{i=1}^N (y_i - (Ax_i + b))^2$$

donde y_i son los datos observados, x_i son los valores de entrada y A y b son los parámetros del modelo.

2.2.4. Soluciones por Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs)

Consideremos un problema inverso donde se busca determinar la velocidad de propagación c de una onda en un medio. Si se miden las amplitudes de la onda en varios puntos y tiempos, podemos formular un problema inverso para encontrar c .

La función de pérdida podría ser:

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (u_{\text{pred}} - u_{\text{data}})^2$$

donde u_{pred} es la predicción del modelo y u_{data} son los datos observados.

Estas redes neuronales están diseñadas para resolver ecuaciones diferenciales y pueden ser utilizadas para problemas inversos relacionados con estas ecuaciones. PINNs minimizan una función de pérdida que combina la ecuación diferencial con las condiciones de frontera y los datos observados.

La ecuación de onda es una ecuación diferencial parcial que describe la propagación de ondas en diversos medios físicos. En muchos casos, se enfrentan problemas inversos relacionados con esta ecuación, donde se busca determinar parámetros como la velocidad de propagación o las condiciones iniciales a partir de observaciones de la onda.

2.3. Redes Neuronales, PINNs, Arquitectura

Son un tipo de modelo de aprendizaje automático inspirado en la estructura y funcionamiento del cerebro humano. Están diseñadas para reconocer patrones complejos y aprender de los datos de manera similar a como lo hacen las neuronas en el cerebro.

Las redes neuronales informadas por la física (PINNs, por sus siglas en inglés) son redes neuronales diseñadas para resolver ecuaciones diferenciales parciales (PDEs) lineales o no lineales incorporando directamente las leyes físicas en la función de pérdida. Este enfoque aprovecha el cálculo automático (*autograd*) para representar las derivadas necesarias, garantizando que la solución aprendida por la red neuronal respete tanto las condiciones iniciales y de frontera como las propiedades del sistema físico modelado.

Estas redes neuronales son destacadas como una nueva clase de aproximadores universales de funciones, eficientes en el uso de datos, que integran de manera natural las leyes físicas subyacentes como información previa. Este enfoque representa un avance importante al combinar principios físicos con técnicas modernas de aprendizaje automático, logrando una integración coherente entre el conocimiento teórico y los datos observados.

2.3.1. Perceptrón

Las neuronas artificiales están inspiradas en las neuronas biológicas (Figura 2.1). El perceptrón es un modelo básico de red neuronal que toma una entrada, aplica una función lineal y, posteriormente, una función no lineal para generar una salida.

Sea (t, x) la entrada. La función lineal puede representarse como:

$$(t, x) \rightarrow w \cdot [t, x] + b,$$

donde w es el vector de pesos y b es el sesgo o término independiente. El siguiente paso es aplicar una **función de activación** para obtener la salida y del perceptrón.

2.3.2. Perceptrón Multicapa

El algoritmo de aprendizaje del perceptrón fue desarrollado por Frank Rosenblatt en 1957. Sin embargo, en 1986, Rumelhart, Hinton y Williams revolucionaron el campo al descubrir el algoritmo de **retropropagación** (backpropagation), que permite entrenar modelos con capas ocultas [10]. Este avance marcó un hito importante, ya que el algoritmo de retropropagación facilita el ajuste de los parámetros de redes neuronales más complejas mediante el cálculo eficiente del gradiente.

Aunque las redes neuronales tienen décadas de existencia, los perceptrones iniciales eran muy limitados en su capacidad. Fue gracias a la incorporación de la retropropagación, los avances recientes en hardware y la disponibilidad de grandes conjuntos de datos que las neuronas artificiales lograron éxitos significativos en una amplia gama de tareas, permitiendo así solucionar de manera experimental problemas teóricos complejos.

Un **perceptrón multicapa** (MLP, por sus siglas en inglés) puede representarse

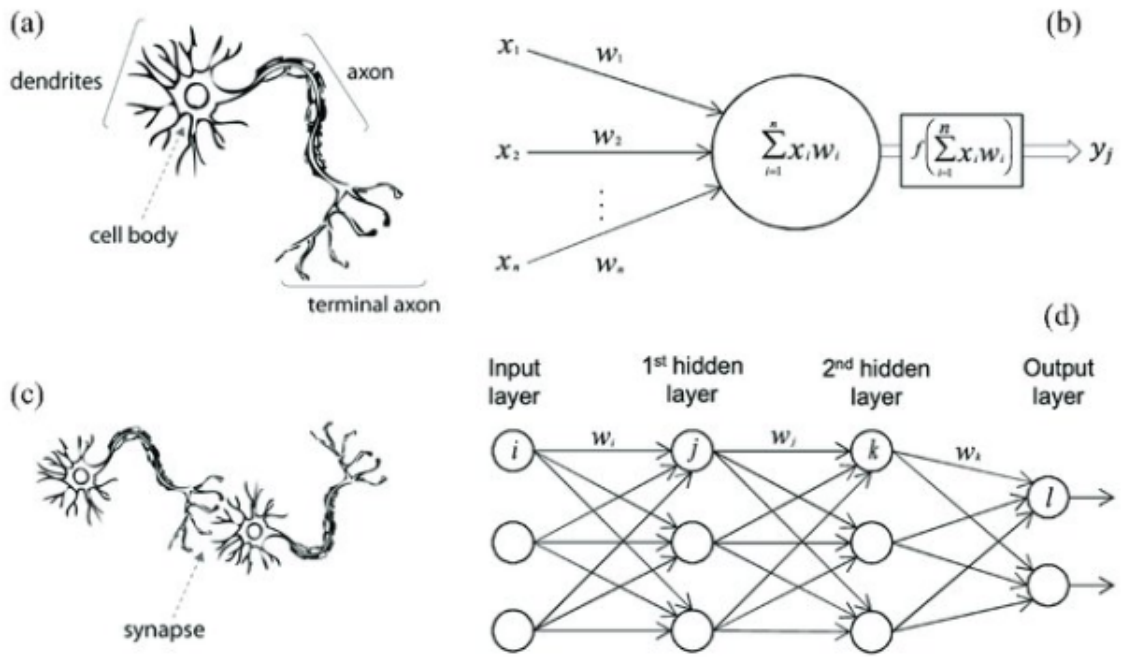


Figura 2.1: Neurona artificial vs neurona Humana. Obtenido de [10]

como:

$$u_{\theta}(t, x) = W^{(L+1)} f^{(L+1)} \left(W^{(L)} f^{(L)} \left(\dots f^{(1)} \left(\underbrace{W^{(1)} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} + b^{(1)}}_{y^{(1)}} \right) \dots \right) + b^{(L)} \right) + b^{(L+1)},$$

donde las matrices W representan los pesos, los vectores b corresponden a los sesgos (ambos representados por los parámetros θ), y f son las funciones de activación. De esta manera, las salidas de algunas neuronas se utilizan como entradas para otras (fig. 2.2).

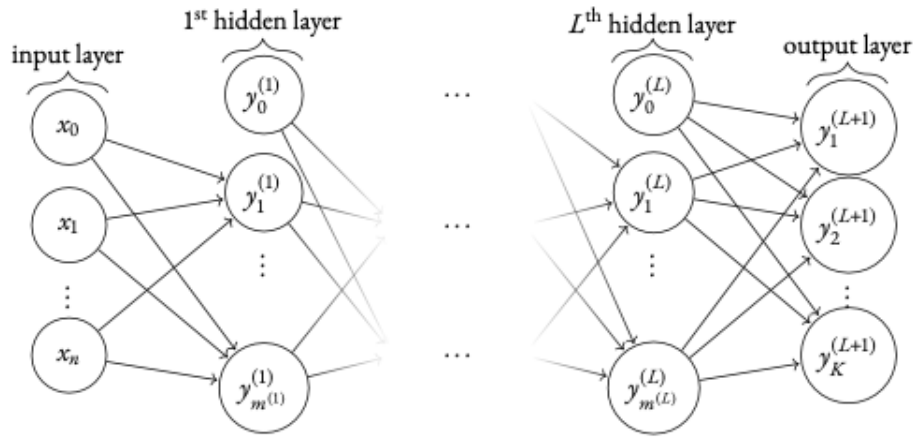


Figura 2.2: La visualización de un perceptrón de $(L + 1)$ capas incluye n unidades de entrada y K unidades de salida. La capa oculta L contiene $m^{(L)}$ neuronas ocultas. Obtenido de [10]

2.3.3. Funcional de Pérdida

Las redes neuronales artificiales son esencialmente un esquema de optimización (sí, con los inconvenientes relacionados con los mínimos locales), y para ello se define un funcional de pérdida. Los parámetros θ de la red neuronal se ajustan para minimizar este funcional, logrando aproximaciones consistentes con las ecuaciones diferenciales subyacentes.

2.3.4. Puntos de Colocación

Sea X_r un conjunto finito de puntos dentro del dominio \bar{D} , denominados *puntos de colocación*. Además de inicializar los pesos, en las PINNs es necesario seleccionar un conjunto adecuado de X_r para el proceso de entrenamiento, evitando problemas de *overfitting* o *underfitting*. Básicamente, durante cada época del entrenamiento, se calculan los residuales definidos en la ecuación (2.2) para los puntos X_r , y se utiliza esta información para construir un funcional de pérdida.

2.3.5. Cálculo del Residual en los Puntos de Colocación

Para estos puntos, definimos:

$$\phi_{X_r}(\theta) = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} r_{\theta}^2(t_r^{(i)}, x_r^{(i)}),$$

donde N_r es la cantidad de puntos de colocación y r_{θ} es el residual definido en la ecuación (2.2). Este término representa un *error cuadrático medio* de los residuales en los puntos de colocación. Si la ecuación diferencial es satisfecha, entonces $\phi_{X_r}(\theta) = 0$.

De manera análoga, se generan puntos para los datos iniciales y de frontera, donde se conoce la solución exacta proporcionada. Las predicciones del modelo se calculan utilizando la ecuación). Así, definimos los siguientes errores cuadráticos medios:

$$\phi_{X_0}(\theta) = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \left(u_{\theta}(t_0^{(i)}, x_0^{(i)}) - u_0(x_0^{(i)}) \right)^2,$$

$$\phi_{X_b}(\theta) = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \left(u_{\theta}(t_b^{(i)}, x_b^{(i)}) - u_b(t_b^{(i)}, x_b^{(i)}) \right)^2.$$

2.3.6. Funcional de Pérdida

El funcional de pérdida para los parámetros θ en una época k se define como:

$$\phi_X(\theta) = \lambda_r \phi_{X_r}(\theta) + \lambda_0 \phi_{X_0}(\theta) + \lambda_b \phi_{X_b}(\theta),$$

donde las constantes λ son denominadas multiplicadores de Lagrange [11]. Estas constantes se seleccionan para equilibrar las contribuciones de los diferentes términos.

2.3.7. Función de Costo

La función de costo $C(\theta_k) = \phi_X(\theta_k)$ se utiliza como un *indicador de convergencia*. En teoría, se espera que:

$$C(\theta) \rightarrow 0 \implies u_\theta \rightarrow u.$$

Sin embargo, dado que X es un subconjunto finito del dominio y las métricas son medias, ciertas características espaciales o temporales podrían no ser capturadas completamente [11].

2.3.8. Error

Sea

$$\mathcal{A}_n = \{u_\theta \mid \#\theta = n\},$$

el conjunto de todas las aproximaciones u_θ a u con n parámetros. Por lo tanto, se tienen diferentes u_θ dependiendo de θ y las funciones de activación utilizadas.

Para valores suficientemente grandes de n , surge la pregunta de si siempre es posible encontrar una buena aproximación a u dentro de \mathcal{A}_n . En caso afirmativo, ¿qué funcional de pérdida sería el más adecuado para alcanzar dicha aproximación? Aun cuando se identifique el funcional apropiado, los desafíos de optimización permanecen, como la posibilidad de quedar atrapados en mínimos locales indeseados o la necesidad de ajustar parámetros clave como la tasa de aprendizaje y el número de épocas de entrenamiento.

Es bien conocido que la capacidad de una red neuronal depende de la cantidad de parámetros. Es decir, más parámetros implican mayor capacidad. Sin embargo, surge la pregunta: ¿es más fácil encontrar una buena aproximación con un n relativamente pequeño?

Para un punto dado z del dominio de la EDP, el error del modelo PINNs se

define como:

$$E_z = u_\theta(z) - u(z).$$

Podemos calcular un error promedio como:

$$E(u_\theta) = \frac{1}{N} \sum_{z \in X \subset \bar{D}} E_z^2,$$

donde X es un subconjunto finito de \bar{D} . Entonces, el error completo se define como:

$$\hat{E}(u_\theta) = \int_{\bar{D}} E_z^2 dz.$$

¿Cómo se relacionan E y \hat{E} ? Es una pregunta interesante, ya que el funcional de pérdida de las PINNs se basa en E . En términos de aprendizaje profundo, el error generalizado se define como :

$$E_G(u_\theta) = \sup_{\theta} |E(u_\theta) - \hat{E}(u_\theta)|.$$

2.3.9. Retropropagación (BackPropagation)

Dado un funcional de pérdida $\phi_X(\theta)$ que deseamos minimizar (generalmente no convexo), el negativo del gradiente $-\nabla \phi_X(\theta)$ nos indica la dirección en la que ϕ_X decrece más rápido desde el punto $(\theta, \phi_X(\theta))$. La regla de actualización se define como:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \eta \cdot \nabla \phi_X(\theta_k),$$

donde η es la tasa de aprendizaje, que determina el tamaño del paso en esa dirección para encontrar el mínimo (ver fig. 3.4).

La **retropropagación** es un algoritmo utilizado para entrenar redes neuronales artificiales, calculando el gradiente para actualizar los pesos y sesgos.

Ejemplo 3.3

Consideremos una red neuronal con tres capas. La capa de entrada está compuesta por $[x_1, x_2]^T$, la capa oculta se define como:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \tanh \left(\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right),$$

y la capa de salida es:

$$o_1 = w_{o1}h_1 + w_{o2}h_2.$$

Para simplificar, los sesgos han sido omitidos. Sea $\phi = \frac{1}{2}(o_1 - y_0)^2$ la función de pérdida, donde y_0 es el valor real que se desea predecir. Es importante notar que ϕ es diferenciable.

Los gradientes de la función de pérdida con respecto a los pesos se calculan comenzando desde la capa de salida y retrocediendo a través de la red. Para la capa de salida, los gradientes son:

$$\frac{\partial \phi_X}{\partial w_{o1}} = (o_1 - y_0)h_1, \quad \frac{\partial \phi_X}{\partial w_{o2}} = (o_1 - y_0)h_2.$$

En la capa oculta, aplicando la regla de la cadena, los gradientes son:

$$\frac{\partial \phi_X}{\partial w_{11}} = (o_1 - y_0)w_{o1} \left\{ 1 - \tanh^2(w_{11}x_1 + w_{12}x_2) \right\} x_1,$$

$$\frac{\partial \phi_X}{\partial w_{12}} = (o_1 - y_0)w_{o1} \left\{ 1 - \tanh^2(w_{11}x_1 + w_{12}x_2) \right\} x_2,$$

$$\frac{\partial \phi_X}{\partial w_{21}} = (o_1 - y_0)w_{o2} \left\{ 1 - \tanh^2(w_{21}x_1 + w_{22}x_2) \right\} x_1,$$

$$\frac{\partial \phi_X}{\partial w_{22}} = (o_1 - y_0)w_{o2} \left\{ 1 - \tanh^2(w_{21}x_1 + w_{22}x_2) \right\} x_2.$$

Finalmente, los pesos se actualizan utilizando la tasa de aprendizaje η como:

$$w_{ij}^{k=0} = w_{ij} - \eta \frac{\partial \phi_X}{\partial w_{ij}}.$$

Este proceso se repite durante múltiples épocas k hasta que el error converge a un mínimo aceptable.

2.3.10. Optimizadores

En general, los optimizadores son algoritmos diseñados para ajustar los parámetros de un modelo de aprendizaje automático con el objetivo de minimizar una función objetivo. Estos algoritmos utilizan los resultados de la retropropagación y encuentran una forma inteligente de actualizar los pesos. Por ejemplo, el optimizador Adam es descrito como: *“Un algoritmo para la optimización basada en gradientes de primer orden de funciones objetivo estocásticas, basado en estimaciones adaptativas de momentos de menor orden”* [12]

2.3.11. Diferenciación Automática

La diferenciación automática es una técnica para el cálculo computacional de derivadas, distinta de los enfoques simbólicos o numéricos, y generalmente superior. En esencia, al considerar los cálculos numéricos como composiciones de operaciones básicas con derivadas conocidas, se puede determinar la derivada de toda la computación utilizando la regla de la cadena.[13]

Mediante el uso de **diferenciación automática**, el **residual** puede calcularse como:

$$r_{\theta}(t, x, y) = \frac{\partial^2 u_{\theta}(t, x, y)}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u_{\theta}(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{\theta}(t, x, y)}{\partial y^2} \right). \quad (2.2)$$

De manera compacta, utilizando el operador diferencial N , el residual se puede expresar como:

$$r_\theta(t, x, y) = N[u_\theta](t, x, y),$$

donde

$$N[u](t, x, y) = \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial y^2} \right).$$

Este residual mide la discrepancia entre u_θ y la solución real en cada punto (t, x, y) . Este enfoque es la base de los **Physics-Informed Neural Networks (PINNs)** para resolver EDPs en tiempo continuo, como se detalla en [14]. Minimizar el residual sobre el dominio permite obtener una aproximación efectiva a la solución de la ecuación de onda en 2D.

2.3.12. Funciones de Activación

Las funciones de activación son hiperparámetros que influyen directamente en el comportamiento de las redes neuronales. Además, forman parte esencial del cálculo de la función de pérdida. Algunas de las funciones de activación más comunes incluyen ReLU, Sigmoid y Tanh, cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$\text{ReLU}(x) = \max(0, x), \quad \text{Sigmoid}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad \text{Tanh}(x) = \tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

2.3.13. Hiperparámetros

Los hiperparámetros son valores establecidos antes del entrenamiento que afectan directamente los parámetros θ (pesos y sesgos) obtenidos. Un ejemplo común es la **tasa de aprendizaje**, que determina el tamaño del paso durante la actualización.

2.3.14. Estructura General de una PINN para Resolver PDEs

El objetivo de las Physics-Informed Neural Networks (PINNs) es aproximar la solución $u(x, t)$ de una ecuación diferencial parcial (PDE) mediante una red neuronal, denotada como $\hat{u}(x, t; \theta)$, donde θ representa los parámetros (pesos y sesgos) de la red neuronal. La PDE se representa de manera general como:

$$\mathcal{N}(u(x, t)) = 0, \quad x \in \Omega, t \in [0, T], \quad (2.3)$$

donde \mathcal{N} es un operador diferencial que puede incluir términos como derivadas espaciales y temporales. Para resolver este problema, se define una función de pérdida $\phi_X(\theta)$ que combina tres componentes principales:

- **Pérdida física** ($\phi_{X_r}(\theta)$): Términos asociados al cumplimiento de la PDE en los puntos de colocación.
- **Pérdida inicial** ($\phi_{X_0}(\theta)$): Términos asociados a las condiciones iniciales.
- **Pérdida de frontera** ($\phi_{X_b}(\theta)$): Términos asociados a las condiciones de contorno.

La función de pérdida completa se expresa como:

$$\phi_X(\theta) = \lambda_r \phi_{X_r}(\theta) + \lambda_0 \phi_{X_0}(\theta) + \lambda_b \phi_{X_b}(\theta),$$

donde λ_r , λ_0 y λ_b son multiplicadores de Lagrange que balancean las contribuciones de cada término.

2.3.15. Construcción del Operador Diferencial y Sustitución

Para ilustrar este proceso, consideremos la ecuación de onda en una dimensión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.4)$$

1. **Definición del operador diferencial:** El operador \mathcal{N} para la ecuación de onda es:

$$\mathcal{N}[u](x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2. **Aproximación mediante la red neuronal:** Se reemplaza $u(x, t)$ por $\hat{u}(x, t; \theta)$, lo que resulta en:

$$\mathcal{N}[\hat{u}](x, t; \theta) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}.$$

3. **Cálculo del residual:** En los puntos de colocación X_r , el residual es:

$$r_\theta(x, t) = \mathcal{N}[\hat{u}](x, t; \theta).$$

4. **Pérdida física:** La pérdida asociada a la PDE se calcula como el error cuadrático medio de los residuales:

$$\phi_{X_r}(\theta) = \frac{1}{N_r} \sum_{(x,t) \in X_r} (r_\theta(x, t))^2.$$

5. **Pérdidas inicial y de frontera:** Se utilizan las condiciones iniciales y de frontera para calcular las pérdidas correspondientes:

$$\phi_{X_0}(\theta) = \frac{1}{N_0} \sum_{(x_0, t_0) \in X_0} (\hat{u}(x_0, t_0; \theta) - u_0(x_0))^2,$$

$$\phi_{X_b}(\theta) = \frac{1}{N_b} \sum_{(x_b, t_b) \in X_b} (\hat{u}(x_b, t_b; \theta) - u_b(x_b, t_b))^2.$$

Este enfoque asegura que la solución aproximada $\hat{u}(x, t; \theta)$ cumpla tanto la PDE como las condiciones iniciales y de contorno. El entrenamiento de la red neuronal

busca minimizar $\phi_X(\theta)$ para encontrar los parámetros óptimos θ .

2.3.16. Función de Pérdida Completa para PINNs

La función de pérdida total de una Physics-Informed Neural Network (PINN) combina tres términos principales: la pérdida asociada a la ecuación diferencial (PDE), la pérdida de las condiciones iniciales y la pérdida de las condiciones de frontera. Esto se expresa como:

$$\mathcal{L}(\theta) = \lambda_r \mathcal{L}_{\text{PDE}} + \lambda_0 \mathcal{L}_{\text{IC}} + \lambda_b \mathcal{L}_{\text{BC}}, \quad (2.5)$$

donde λ_r, λ_0 y λ_b son multiplicadores de Lagrange que ponderan la contribución de cada término, y cada componente se define como sigue:

2.3.17. Término de Pérdida Física (\mathcal{L}_{PDE})

La pérdida asociada a la ecuación diferencial mide el error entre el operador diferencial $\mathcal{N}(\hat{u})$ y el valor esperado (generalmente cero) en los puntos de colocación internos del dominio:

$$\mathcal{L}_{\text{PDE}} = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left| \mathcal{N}(\hat{u}(x_r^i, t_r^i; \theta)) \right|^2, \quad (2.6)$$

donde:

- $\hat{u}(x, t; \theta)$ es la solución aproximada generada por la red neuronal.
- $\mathcal{N}(\hat{u}) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}$ es el operador diferencial de la ecuación de onda.
- (x_r^i, t_r^i) son los puntos de colocación internos dentro del dominio Ω .

2.3.18. Término de Pérdida de Condiciones Iniciales (\mathcal{L}_{IC})

La pérdida asociada a las condiciones iniciales asegura que la solución respete los valores iniciales del sistema:

$$\mathcal{L}_{IC} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \left| \hat{u}(x_0^i, 0; \theta) - u_0(x_0^i) \right|^2, \quad (2.7)$$

donde:

- $u_0(x)$ es la condición inicial conocida.
- x_0^i son los puntos espaciales donde se evalúan las condiciones iniciales.

2.3.19. Término de Pérdida de Condiciones de Frontera (\mathcal{L}_{BC})

La pérdida asociada a las condiciones de frontera asegura que la solución cumpla con los valores impuestos en los bordes del dominio:

$$\mathcal{L}_{BC} = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \left| \hat{u}(x_b^i, t_b^i; \theta) - u_b(x_b^i, t_b^i) \right|^2, \quad (2.8)$$

donde:

- $u_b(x, t)$ representa las condiciones de frontera conocidas.
- (x_b^i, t_b^i) son los puntos espaciales y temporales donde se evalúan las condiciones de frontera.

2.3.20. Función de Pérdida Final

Al combinar los términos anteriores, la función de pérdida completa de la PINN para la ecuación de onda queda expresada como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta) = & \frac{\lambda_r}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left| \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(x_r^i, t_r^i; \theta) - c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(x_r^i, t_r^i; \theta) \right|^2 \\
& + \frac{\lambda_0}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \left| \hat{u}(x_0^i, 0; \theta) - u_0(x_0^i) \right|^2 \\
& + \frac{\lambda_b}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \left| \hat{u}(x_b^i, t_b^i; \theta) - u_b(x_b^i, t_b^i) \right|^2.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

2.3.21. Arquitectura de la PINNs

Para ilustrar el funcionamiento del proceso de solución de la ecuación mediante la siguiente arquitectura la cual muestra donde se define la red neuronal , luego pasa por el operador diferencial tomando en cuenta las condiciones de borde y las condiciones iniciales regidas por el fenómeno a simular , para lograr su solución minimizando los diferentes tipos de perdida de la ecuación que están sujetas a la ecuación, a las condiciones iniciales y de borde.

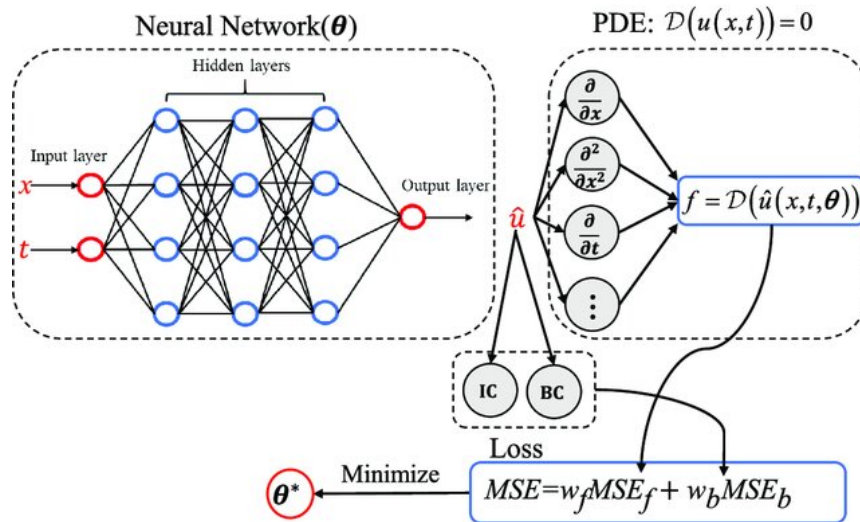


Figura 2.3: Arquitectura de la PINNs

2.4. Métodos Numéricos

En la siguiente sección se abordarán técnicas numéricas utilizadas para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) que aparecen en la modelización de fenómenos complejos a lo largo de la ingeniería, la física y las matemáticas aplicadas, donde las soluciones analíticas suelen ser esquivas o inexistentes. Dado que la elección del método impacta significativamente la precisión, eficiencia y aplicabilidad de la simulación, se examinarán dos enfoques: el Método de Diferencias Finitas (FDM), reconocido por su simplicidad de implementación pero con limitaciones inherentes ante geometrías complejas o condiciones de frontera irregulares, y el Método de Elementos Finitos (FEM), que, si bien puede ofrecer mayor precisión y versatilidad geométrica, usualmente conlleva un costo computacional más elevado. A continuación analizaremos los principios y particularidades de ambos métodos.

2.4.1. Método de Diferencias Finitas (FDM)

El *método de diferencias finitas (DF)* es uno de los enfoques numéricos más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales parciales (PDEs) que gobiernan muchos fenómenos físicos, incluidos los sísmicos. En el contexto de las ondas sísmicas, este método es especialmente útil para simular cómo las ondas se propagan a través de medios continuos. La ecuación de onda unidimensional (1D) es un ejemplo de PDE que describe la dinámica de las ondas sísmicas en medios homogéneos y su solución numérica puede abordarse mediante diferencias finitas.

La ecuación de onda en 1D tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

donde:

- $u(x, t)$ es el desplazamiento de la onda en la posición x y el tiempo t ,
- c es la velocidad de propagación de la onda, y
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ son las derivadas segundas con respecto al tiempo y al espacio, respectivamente.

Para resolver esta ecuación mediante el método de diferencias finitas, discretizamos el dominio del problema tanto en el tiempo como en el espacio.

Discretización del Dominio

Dividimos el dominio espacial $[0, L]$ en nx puntos, con un espaciamiento $dx = \frac{L}{nx-1}$, y el dominio temporal en nt puntos, con un intervalo de tiempo $dt = \frac{T}{nt-1}$. El método de diferencias finitas utiliza una malla de puntos discretos, donde las soluciones de la ecuación se calculan en cada punto x_i y en cada paso de tiempo t_n .

La derivada segunda con respecto al tiempo y al espacio se puede aproximar mediante diferencias finitas centradas. Para el término temporal:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{dt^2} \quad (2.11)$$

y para el término espacial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{dx^2} \quad (2.12)$$

Sustituyendo estas aproximaciones en la ecuación de onda, obtenemos la ecuación en diferencias finitas:

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \frac{c^2 dt^2}{dx^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (2.13)$$

Este esquema explícito permite calcular el desplazamiento u en cada punto espacial y temporal en función de los valores en los puntos vecinos y en los pasos de tiempo anteriores.

Implementación Numérica

El siguiente algoritmo describe el procedimiento para implementar el método de diferencias finitas para la solución de la Ecuación Diferencial:

Algorithm 1 Simulación numérica genérica mediante diferencias finitas

- 1: **Inicializar** los parámetros del problema: definir el dominio espacial y temporal, parámetros físicos relevantes, y otros parámetros como el número de puntos espaciales, número de pasos de tiempo, etc.
 - 2: Discretizar el dominio espacial y temporal.
 - 3: Establecer las condiciones iniciales y las condiciones de frontera.
 - 4: **for** cada paso temporal **do**
 - 5: Calcular la siguiente iteración utilizando la ecuación en diferencias finitas correspondiente.
 - 6: **end for**
 - 7: Visualizar o analizar los resultados.
-

2.4.2. Método de Elementos Finitos (FEM)

El *Método de Elementos Finitos (FEM)* es una técnica numérica más versátil que el método de diferencias finitas, especialmente en la simulación de problemas con geometrías complejas o medios heterogéneos. En lugar de discretizar el espacio mediante una malla de puntos como en DF, FEM divide el dominio en elementos pequeños y resuelve la ecuación diferencial en una *formulación débil*.

Formulación Débil

La formulación débil de la ecuación de onda se obtiene multiplicando la ecuación por una función de prueba $v(x)$ y luego integrando por partes el término de la segunda derivada espacial:

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + c^2 \int_{\Omega} \frac{\partial v(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx = 0 \quad (2.14)$$

Este paso reduce el orden de las derivadas, lo que facilita la aplicación de FEM. La solución aproximada $u(x, t)$ se representa como una combinación lineal de *funciones de forma* $N_i(x)$ dentro de cada elemento:

$$u(x, t) \approx \sum_{i=1}^n u_i(t) N_i(x) \quad (2.15)$$

donde $u_i(t)$ son los valores de la solución en los nodos del elemento.

Matriz de Rigidez y Vector de Masa

La formulación débil lleva a un sistema de ecuaciones algebraicas que se resuelve numéricamente. Para cada elemento, se calculan:

- La *matriz de rigidez* K_e , que representa las contribuciones locales de las derivadas espaciales de las funciones de forma,
- El *vector de masa* M_e , que representa las contribuciones de las derivadas temporales.

Estas matrices se ensamblan para obtener las matrices globales K y M , que representan el sistema de ecuaciones para todo el dominio. El sistema completo tiene la forma:

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Ku = 0 \quad (2.16)$$

A continuación se presenta el algoritmo genérico para la solución de una PDE utilizando el Método de Elementos Finitos, que incluye los pasos fundamentales desde la definición del problema hasta el post-procesado de los resultados.

Algorithm 2 Algoritmo genérico para la solución de una PDE usando el Método de Elementos Finitos (FEM)

- 1: **Definir el problema físico:** especificar la ecuación en derivadas parciales (PDE), el dominio, las condiciones de frontera y las condiciones iniciales.
 - 2: Discretizar el dominio en una malla de elementos finitos.
 - 3: Definir las funciones de forma dentro de cada elemento.
 - 4: Transformar la PDE en su formulación débil mediante integración por partes.
 - 5: **for** cada elemento **do**
 - 6: Calcular la matriz de rigidez local.
 - 7: Calcular el vector de masa local.
 - 8: Ensamblar las matrices globales.
 - 9: **end for**
 - 10: Aplicar las condiciones de frontera al sistema global.
 - 11: Resolver el sistema de ecuaciones:
 - 12: **if** el problema es dependiente del tiempo **then**
 - 13: Avanzar en el tiempo con un esquema de integración temporal adecuado.
 - 14: **end if**
 - 15: **Post-procesado de los resultados:**
 - 16: Interpolación la solución dentro de los elementos.
 - 17: Graficar y analizar los resultados.
-

3. Resultados

En la siguiente sección se detallará la solución analítica que posee condiciones iniciales y condiciones de frontera para resolver el problema de la ecuación diferencial parcial (PDE). Además de la solución utilizando PINNs ilustrado con mapas de calor y puntos de colocación de la solución exacta. Solución utilizando FDM y FEM. Posteriormente se mostrará un análisis comparativo de rendimiento de los tres métodos utilizados. Esta sección es la más amplia y detallada del presente estudio abarcando también implementaciones con algoritmos narrados para la simulación numérica, se contemplará una metodología que conlleve a la consecución de resultados y análisis, generación de datos, estimación de parámetros, para la estimación de la velocidad de onda mediante redes neuronales recurrentes informadas por la física.

3.1. Métricas de Evaluación

Para comparar el desempeño de los modelos, se establecen las siguientes definiciones:

- **Precisión (Accuracy):** Medida de la discrepancia entre la solución numérica \hat{u} y la solución analítica exacta u_{true} , calculada mediante el Error Absoluto Medio (MAE) y el MSE en los puntos de colocación.
- **Eficiencia Computacional:** Relación entre la precisión obtenida y el costo de recursos (tiempo de cómputo y memoria). Se cuantifica comparando el tiempo de ejecución (t_{exec}) necesario para alcanzar un Error Cuadrático Medio (MSE) objetivo.

- **Eficacia Computacional:** Se define como la capacidad del método para converger a una solución físicamente válida (que cumple la Ecuación de Onda y condiciones de frontera) dentro de una tolerancia de error predefinida, independientemente del tiempo consumido. Se evalúa mediante la exactitud de la solución final.

3.2. Simulación de Problemas directos

3.2.1. Solución utilizando PINNs.

En el entrenamiento de Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs), los puntos de colocación son coordenadas espacio-temporales estratégicas donde la red aprende a satisfacer las ecuaciones del problema. Para este caso, se utilizaron 50 puntos para validar la condición inicial (IC), asegurando que la solución parta del estado correcto. Otros 100 puntos de frontera (BC) se emplearon para que la red respete las condiciones en los límites del dominio. La mayor parte, 2304 puntos interiores, sirvieron para forzar el cumplimiento de la Ecuación Diferencial Parcial (EDP) internamente. En total, estos 2454 puntos se evaluaron en cada una de las 9000 iteraciones para minimizar la pérdida y ajustar la solución de la PINN.

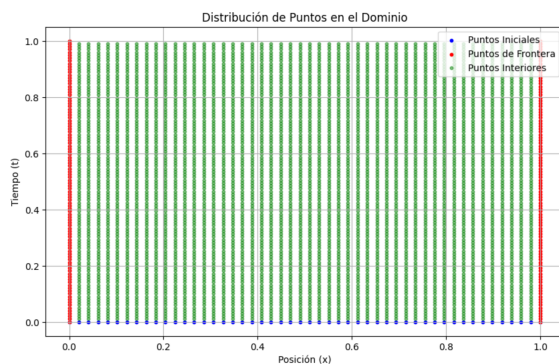


Figura 3.1: Puntos de colocación

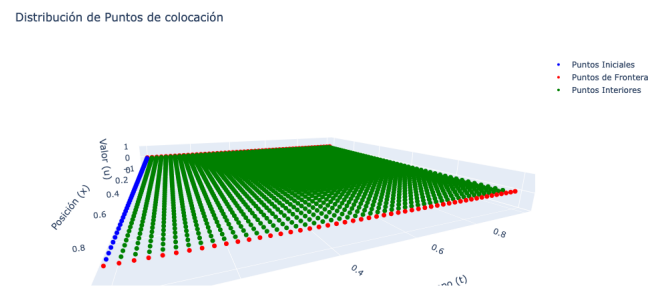


Figura 3.2: Puntos de colocación

Figura 3.3: Puntos de colocación.

Tabla 3.1: Resumen Simplificado de la Arquitectura y Hiperparámetros de la PINN (Tanh)

Característica	Descripción/Valor
Tipo de Red	Perceptrón Multicapa (MLP)
Framework	PyTorch
Entrada	2 neuronas (coordenadas 'x', 't')
Arquitectura de Capas Ocultas	3 capas ocultas: Lineal(2 → 16) → Tanh Lineal(16 → 32) → Tanh Lineal(32 → 16) → Tanh
Capa de Salida	Lineal(16 → 1) (predicción de $u(x, t)$)
Funciones de Activación Ocultas	Tangente Hiperbólica (Tanh)
Optimizador	Adam
Tasa de Aprendizaje	1×10^{-2}
Épocas Máximas	9000
Puntos de Colocación (Total)	7000 (malla de 70x100)

Tabla 3.2: Estructura de la PINNS

La función de pérdida minimiza el residuo de la EDP y el error en las condiciones iniciales y de contorno. Los resultados se muestran que la PINN aproximó con precisión la solución analítica (d'Alembert). El error absoluto, con un máximo cercano a 0.045, se concentró principalmente en regiones de alta curvatura de la solución, confirmando la efectividad del método.

Inicialmente (Epoch 0), los errores eran significativos (Loss: 0.42, MAE: 0.52). Durante las primeras 1500 épocas, se observó un descenso drástico en todas las métricas (Loss a 0.00035, MAE a 0.039), indicando una rápida asimilación de la estructura del problema. Posteriormente, la mejora se tornó más gradual, reflejando un proceso de ajuste fino. Aunque la Pérdida total experimentó fluctuaciones (con picos temporales, e.g., 0.003 entre Epochs 5000-5500) debido al complejo balanceo de sus componentes por el optimizador, el MAE y MSE mantuvieron una tendencia general a la baja o se estabilizaron en valores

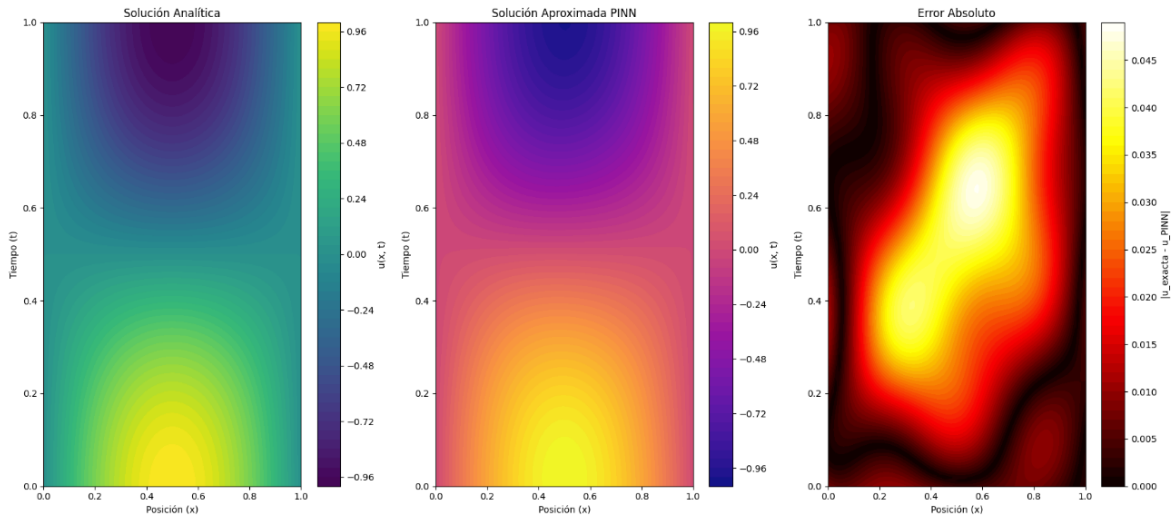


Figura 3.4: Mapas de calor de la solución exacta, predicción de PINNs y el error de PINNs para la ecuación diferencial parcial con condición de Dirichlet.

reducidos, señalando una aproximación consistentemente mejor a la solución analítica. Al finalizar las 9000 épocas, el MAE (e.g., 0.014 en Epoch 8000) demostró que la PINN alcanzó una notable precisión.

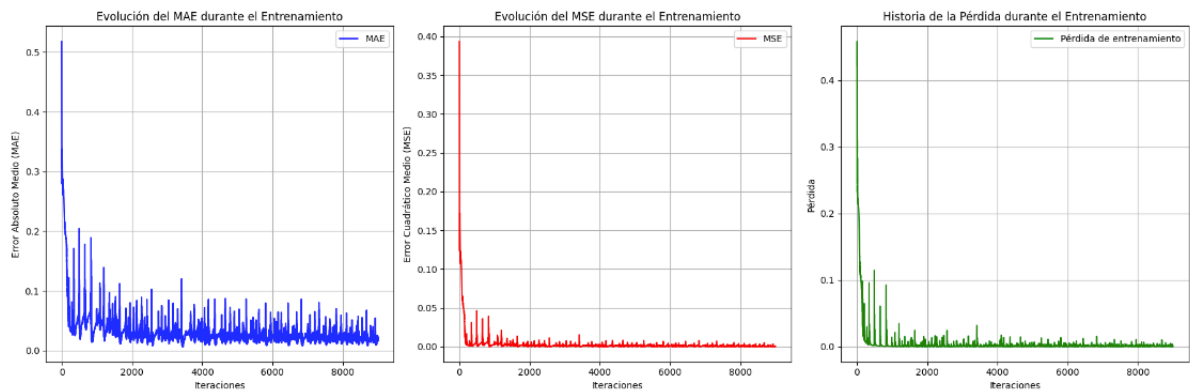


Figura 3.5: Evolución del MAE, MSE y la Pérdida durante el Entrenamiento de la PINN

3.2.2. Solución utilizando FDM

En este experimento, se resolvió la ecuación de onda unidimensional mediante el Método de Diferencias Finitas (FDM) explícito. El dominio computacional se definió con una longitud $L = 1,0$ y un tiempo total de simulación $T = 1,0$, utilizando una velocidad de propagación $c = 1,0$. La discretización espacial constó de $n_x = 70$ puntos y la temporal de $nt = 100$ puntos, lo que generó pasos dx y dt que cumplieron con el criterio de estabilidad de Courant ($r = c \cdot dt/dx \leq 1$). Se impuso una condición inicial $u(x,0) = \sin(\pi x)$ con velocidad inicial nula, y condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas ($u = 0$) en $x = 0$ y $x = L$. La simulación progresó durante 98 iteraciones temporales, alcanzando el máximo predefinido ($nt - 1$ pasos), ya que la máxima diferencia entre soluciones de pasos consecutivos ($5,08 \times 10^{-4}$) no disminuyó por debajo de la tolerancia establecida de 10^{-4} . El método fue muy eficiente, completándose en aproximadamente 0,0037 segundos. La comparación de la solución numérica con la solución analítica arrojó un error absoluto máximo de $8,08 \times 10^{-5}$, un error absoluto promedio de $2,76 \times 10^{-5}$ y un error mediano de $2,14 \times 10^{-5}$, lo que indica una buena precisión en la aproximación obtenida.

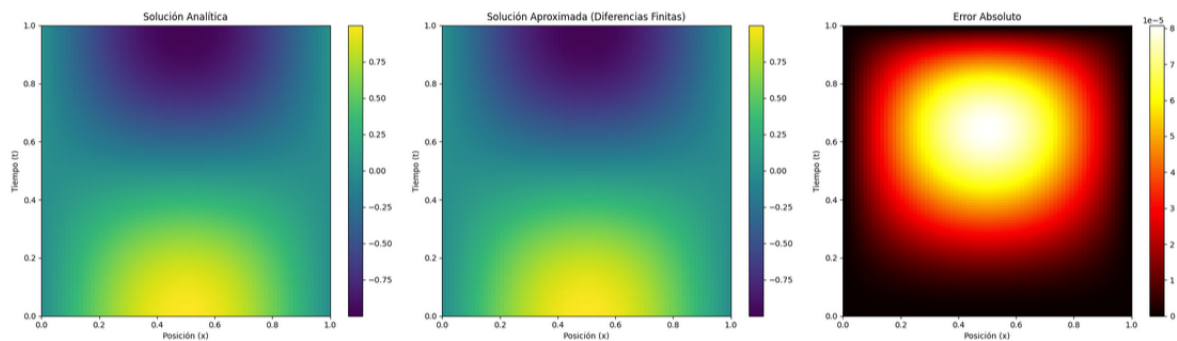


Figura 3.6: Mapas de calor de la solución exacta, predicción de FDM y su error para la ecuación diferencial parcial con condición de Dirichlet.

3.2.3. Solución utilizando FEM.

Se llevó a cabo un experimento para resolver la ecuación de onda unidimensional empleando el Método de Elementos Finitos (FEM). El problema se definió sobre un dominio de longitud $L = 1,0$ durante un tiempo total $T = 1,0$, con una velocidad de propagación $c = 1,0$. Para la discretización espacial, se utilizaron $nx = 70$ nodos y elementos lineales para ensamblar las matrices globales de masa (M) y rigidez (K). La discretización temporal se realizó mediante un esquema explícito de diferencias centrales, con $nt = 100$ pasos de tiempo (tamaño de paso dt). Se aplicó una condición inicial $u(x,0) = \sin(\pi x)$ con velocidad inicial nula, y condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas ($u = 0$) en $x = 0$ y $x = L$. La simulación temporal progresó durante 98 iteraciones, completando el número máximo de pasos predefinidos, y consideraba una tolerancia de 10^{-6} sobre el cambio máximo de la solución para una posible detención temprana. El tiempo total de ejecución fue de aproximadamente 0,157 segundos. La comparación de la solución FEM con la solución analítica arrojó un error absoluto máximo de $3,86 \times 10^{-4}$, un error absoluto medio (MAE) de $1,32 \times 10^{-4}$, y un error cuadrático medio (MSE) de $3,08 \times 10^{-8}$, indicando una aproximación precisa de la solución.

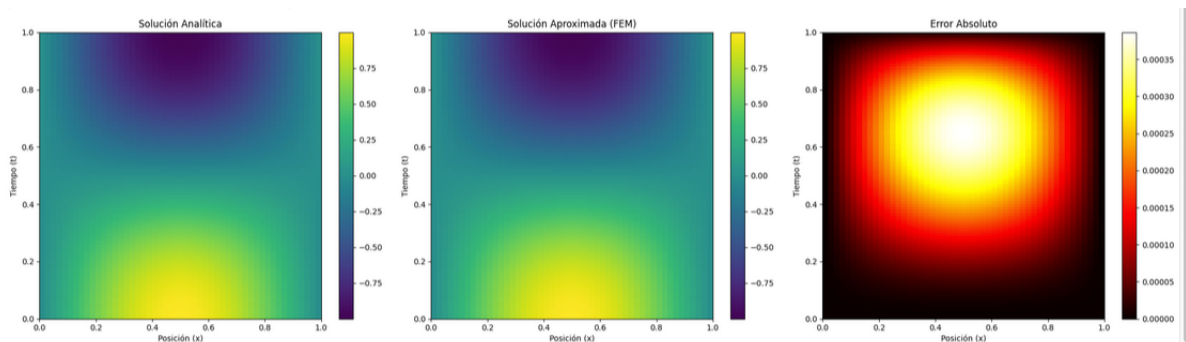


Figura 3.7: Mapas de calor de la solución exacta, predicción de de FEM y su error para la ecuación diferencial parcial con condición de Dirichlet.

Tabla 3.3: Comparativa de Rendimiento en Problema Directo

Métrica	FDM	FEM	PINN
Error Absoluto Máx.	$8,08 \times 10^{-5}$	$3,86 \times 10^{-4}$	$4,80 \times 10^{-2}$
Precisión Relativa	Más Alta	Alta	Más Baja
Tiempo de Ejecución (s)	0.0037 s	0.157 s	621.8 s
Eficiencia Relativa	Más Rápido	Rápido	Más Lento

En términos de precisión, el Método de Diferencias Finitas (FDM) demostró ser el más exacto, exhibiendo el menor error absoluto máximo ($8,08137 \times 10^{-5}$) y promedio ($2,75907 \times 10^{-5}$).

Le sigue el Método de Elementos Finitos (FEM), que también alcanzó una alta precisión (Error Absoluto Máximo de 0.000386275), superando a las PINNs. Estas últimas presentaron el mayor margen de error (Error Absoluto Máximo de 0.0480605), lo cual puede atribuirse a la complejidad inherente de la optimización de redes neuronales y su sensibilidad a la configuración hiperparamétrica para este problema particular.

Desde la perspectiva de la eficiencia computacional, el FDM fue extraordinariamente rápido, con un tiempo de ejecución de apenas 0.0036881 segundos, reflejando la simplicidad de sus esquemas explícitos. El FEM presentó un costo computacional intermedio (0.156725 segundos), considerablemente mayor que el FDM pero significativamente menor que las PINNs. Estas últimas fueron, con diferencia, las más costosas computacionalmente, requiriendo 621.802 segundos, debido a la carga del entrenamiento de redes profundas y el cálculo de derivadas mediante diferenciación automática.

3.3. Aplicación a los Problemas Inversos

Habiendo explorado previamente la capacidad de diversos métodos numéricos para resolver el problema directo de la propagación de ondas; donde todos los

parámetros del modelo físico, como la velocidad de onda c , se asumen conocidos (utilizando un valor constante $c=1.0$ para un medio homogéneo), esta sección se enfoca en una perspectiva distinta. En este contexto, el objetivo primordial ya no es predecir el comportamiento del sistema con parámetros dados, sino inferir propiedades físicas desconocidas del medio a partir de observaciones del comportamiento ondulatorio.

Específicamente, nos centraremos en la tarea de estimar la velocidad de propagación de la onda, un parámetro que caracteriza las propiedades elásticas del material. Simularemos cómo los métodos numéricos previamente analizados como el Método de Diferencias Finitas (FDM), el Método de Elementos Finitos (FEM) y las Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs) pueden adaptarse y ser empleadas para abordar este desafío inverso. Se explorará el potencial de cada técnica para, a partir de datos que simulan mediciones de ondas (posiblemente generados con un valor de referencia como $c = 1,0$ para fines de validación), estimar este parámetro.

3.3.1. Estimación de la Velocidad de Onda mediante Diferencias Finitas

El procedimiento se basó en la comparación entre la solución numérica obtenida por FDM y un conjunto de datos "observados" sintéticos, los cuales fueron generados a partir de la solución analítica de la ecuación utilizando un valor verdadero conocido de $c_{true} = 1,0$.

Como resultado de este proceso iterativo de simulación FDM y minimización, el valor estimado para la velocidad de onda c_{est} obtenido fue de 0,5.

la comparación entre la solución exacta y la solución estimada mediante el Método de Diferencias Finitas (FDM) exhibe una notable correspondencia cualitativa en los patrones de onda; pero la solución exacta presenta un rango de

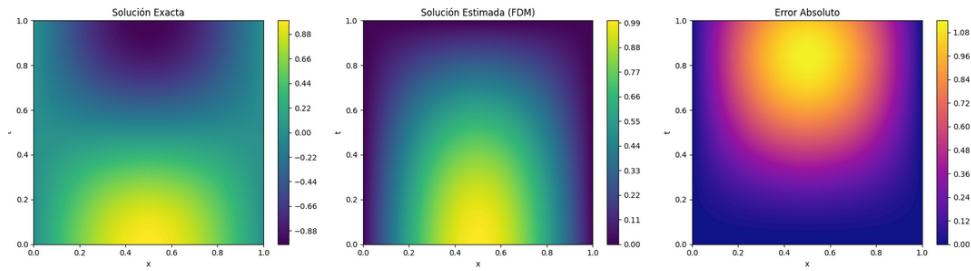


Figura 3.8: Solución utilizando Diferencias Finitas

amplitud que fluctúa aproximadamente entre -0.88 y $+0.88$; comparado con la solución aproximada que tienen un rango entre 0 y $+0.88$ lo cual denota que la aproximación del problema difiere. No obstante esta similitud visual, la inspección del error absoluto, cuyos valores varían desde 0.00 hasta un máximo aproximado de 1.08 , evidencia la presencia de desviaciones cuantitativas. Estas desviaciones se manifiestan con mayor intensidad en las regiones correspondientes a las amplitudes extremas de la onda (crestas y valles) y muestran una tendencia a intensificarse hacia el final del periodo de simulación.

3.3.2. Estimación de la Velocidad de Onda mediante Elementos Finitos

El resultado de este proceso fue una estimación de la velocidad de onda $c_{est} = 0,5$. Si bien este resultado demuestra la viabilidad de integrar un modelo FEM en un esquema de inversión para la estimación de parámetros, la notable diferencia entre el valor estimado (0.5) y el valor verdadero (1.0) indica que, bajo la configuración experimental particular (incluyendo la métrica de error, la estrategia de optimización, el uso de datos solo en el instante final, y la adaptación del paso de tiempo en el modelo directo), el procedimiento convergió a un mínimo local o a una solución que no refleja con precisión el parámetro físico real del sistema.

Los resultados obtenidos son testimonio de la alta precisión del enfoque: el valor estimado para la velocidad de onda fue $c_{est} = 0,999956$. Esto representa un

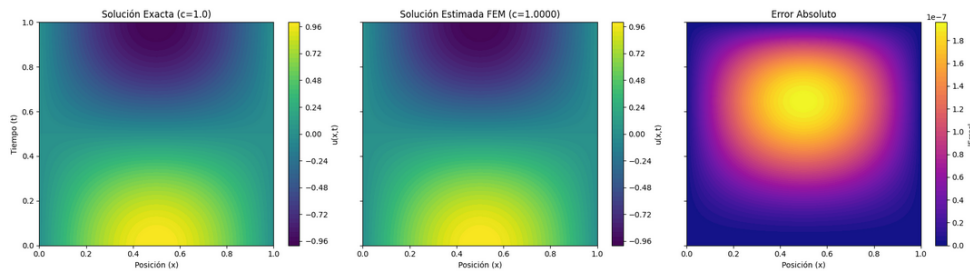


Figura 3.9: Solución al problema inverso utilizando FEM

error de estimación extremadamente pequeño, de solo 0.000044 (o $4,4 \times 10^{-5}$), con respecto al valor real. Adicionalmente, el valor final de la función objetivo, que cuantifica el desajuste entre la simulación y los datos, alcanzó un mínimo notablemente bajo de $5,58618110 \times 10^{-14}$, indicando un ajuste prácticamente perfecto. Esta precisión es corroborada por las gráficas proporcionadas, donde la "Solución Estimada FEM" es visualmente indistinguible de la "Solución Exacta", y el mapa de "Error Absoluto" muestra discrepancias mínimas, del orden de 10^{-7} .

3.3.3. Estimación de la Velocidad de Onda mediante Redes Neuronales Informadas por la Física

Los resultados numéricos indican un desempeño notablemente bueno del modelo: el valor estimado para la velocidad de onda fue $c_{est} = 0,998426$. Esta estimación es muy cercana al valor real, con un error absoluto en la estimación de c de tan solo $0,001574$. La "Solución PINN" obtenida con el c estimado muestra una gran similitud visual con la "Solución Exacta". Adicionalmente, el mapa de "Error Absoluto" entre ambas soluciones revela que las diferencias son pequeñas, alcanzando valores máximos en el orden de $0,0048$, lo cual es consistente con una buena aproximación.

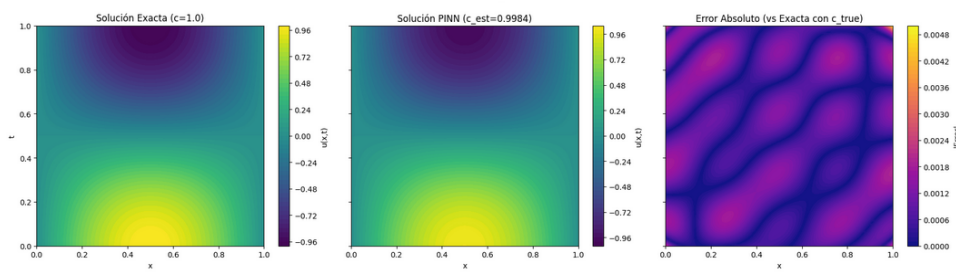


Figura 3.10: Aproximación vs Solución exacta y el Error

El modelo PINN converge satisfactoriamente hacia la solución analítica tras el proceso de entrenamiento. La evolución de las métricas muestra una disminución progresiva tanto del error como del residuo de la ecuación diferencial.

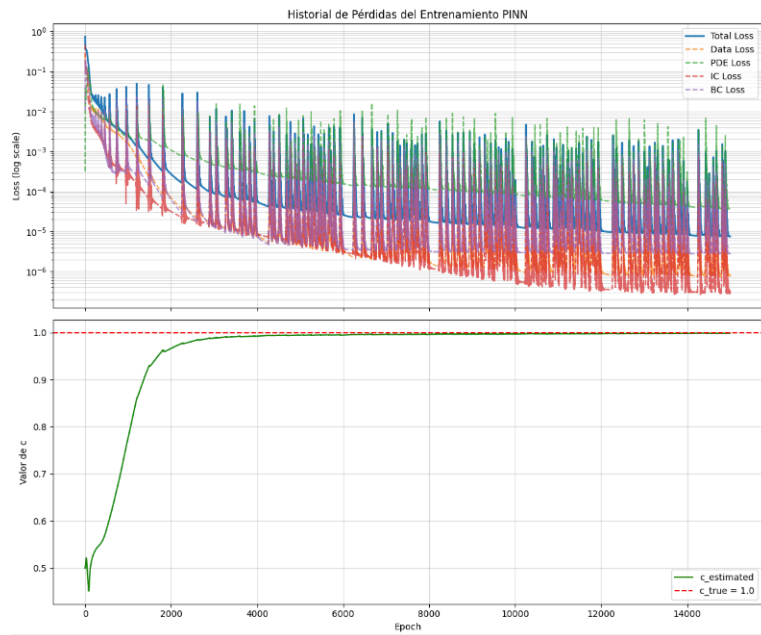


Figura 3.11: Errores en el entrenamiento.

La comparación visual entre la solución obtenida mediante PINN y la solución analítica revela un alto grado de concordancia. El mapa de error absoluto permite identificar las regiones del dominio espacio-temporal donde la aproximación presenta mayores desviaciones.

Tabla 3.4: Comparativa de Estimación de Parámetros ($c_{true} = 1,0$)

Métrica	FDM	FEM	PINN
c Estimado	0.5	0.999956	0.998426
Error de Est.	$\approx 50\%$	$4,4 \times 10^{-5}$	$1,57 \times 10^{-3}$
Resultado	Fallo	Éxito Sobresaliente	Éxito Notable

En el problema inverso, las PINNs demuestran su verdadera fortaleza (eficacia superior), convergiendo al valor real de la velocidad sin requerir la formulación compleja de matrices adjuntas necesarias en FDM/FEM.

4. Conclusiones

A partir de los experimentos realizados con el Método de Diferencias Finitas (FDM), el Método de Elementos Finitos (FEM) y las Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs), tanto para la simulación de problemas directos como para la estimación de parámetros en problemas inversos, se pueden extraer las siguientes conclusiones generales:

4.1. En la resolución de problemas directos (simulación con parámetros conocidos):

El **Método de Diferencias Finitas (FDM)** se destacó por su excepcional eficiencia computacional (tiempos de ejecución del orden de 10^{-3} s) y la más alta precisión entre los métodos evaluados para el problema de onda unidimensional simple (errores absolutos máximos del orden de 10^{-5}). Su principal limitación radica en su aplicabilidad a geometrías simples y mallas regulares. El **Método de Elementos Finitos (FEM)** demostró un sólido rendimiento, ofreciendo una alta precisión (errores absolutos máximos del orden de 10^{-4}) y una eficiencia considerable (tiempos de ejecución del orden de 10^{-1} s). Su fortaleza principal es la versatilidad para manejar geometrías complejas y mallas no estructuradas, lo que lo convierte en una herramienta robusta y ampliamente aplicable. Las **Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs)**, si bien capaces de aproximar la solución del problema directo, mostraron en este contexto errores comparativamente más elevados (errores absolutos máximos del orden de 10^{-2} o 0,048) y un costo computacional significativamente superior (tiempos de ejecución del orden de cientos de segundos), reflejando la carga del entrenamiento de redes

neuronales pero también su potencial para escenarios sin malla o geometrías altamente complejas.

4.2. En la aplicación a problemas inversos (estimación de la velocidad de onda c , con $c_{\text{true}} = 1,0$):

El **Método de Elementos Finitos (FEM)**, integrado en un marco de optimización, exhibió una capacidad sobresaliente para la estimación de parámetros, logrando una recuperación casi perfecta de la velocidad de onda ($c_{\text{est}} \approx 0,999956$, con un error de estimación de $4,4 \times 10^{-5}$). Esto fue respaldado por un valor extremadamente bajo de la función objetivo ($\approx 5,58 \times 10^{-14}$), indicando un ajuste excelente a los datos observados. Las **Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs)** también demostraron ser una herramienta efectiva para la inversión, proporcionando una estimación precisa de la velocidad de onda ($c_{\text{est}} \approx 0,998426$, con un error de $1,57 \times 10^{-3}$). Este resultado subraya la idoneidad inherente de las PINNs para problemas de estimación de parámetros gracias a su flexibilidad en la incorporación de datos y la diferenciación automática. La adaptación del **Método de Diferencias Finitas (FDM)** para el problema inverso, en la instancia reportada ($c_{\text{est}} = 0,5$), sugirió que su éxito en este tipo de tareas puede ser más sensible a la configuración del problema inverso, la estrategia de optimización y la calidad de los datos, a pesar de su eficiencia como modelo directo.

La elección del método numérico más adecuado es intrínsecamente dependiente de la naturaleza específica del problema a resolver. Para problemas directos con geometrías simples y la necesidad de alta eficiencia y precisión, el FDM es inigualable. El FEM se destaca como una solución equilibrada y robusta para una amplia gama de problemas directos, especialmente aquellos con geometrías complejas, y ha demostrado ser también muy efectivo para problemas

inversos bien planteados. Las PINNs, aunque computacionalmente más intensivas y con una precisión potencialmente menor en problemas directos simples comparados con métodos tradicionales optimizados, emergen como una alternativa prometedora y flexible, especialmente para problemas inversos complejos, geometrías complejas debido a que no dependen de ella o cuando se buscan soluciones libres de malla.

4.3. Limitaciones y Desafíos

La aplicación de métodos numéricos para la simulación de fenómenos físicos, si bien poderosa, enfrenta diversas limitaciones y desafíos que varían según la técnica empleada. Los métodos tradicionales, como el **Método de Diferencias Finitas (FDM)**, se ven restringidos principalmente por su rigidez geométrica, adaptándose mejor a dominios regulares y mallas estructuradas, lo que dificulta el tratamiento de geometrías complejas o condiciones de frontera intrincadas; la imposición precisa de estas condiciones en geometrías curvas es un desafío particular. Por su parte, el **Método de Elementos Finitos (FEM)**, aunque geoméricamente mucho más flexible, encara el obstáculo de la generación de mallas de calidad, un proceso que puede ser laborioso, computacionalmente costoso especialmente en tres dimensiones y una fuente de error si la malla no es adecuada, además de que su implementación para problemas no lineales o multifísicos puede ser considerablemente más compleja. En contraste, las **Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs)**, como enfoque más reciente basado en el aprendizaje profundo, presentan un conjunto distinto de desafíos. Uno de los más evidentes es el **elevado costo computacional y el extenso tiempo de entrenamiento** que suelen requerir, especialmente para problemas complejos o cuando se busca alta precisión, superando significativamente a las ejecuciones individuales de FDM o FEM optimizados, lo cual se evidenció en los experimentos

de modelado directo. La **convergencia y la optimización** del entrenamiento son también aspectos críticos; el proceso es inherentemente no convexo y altamente sensible a la arquitectura de la red, las funciones de activación, el optimizador, la tasa de aprendizaje, la inicialización de pesos y el crucial balance entre los múltiples términos de la función de pérdida (residuos de la Ecuación Diferencial Parcial (EDP), condiciones de frontera e iniciales, y datos observados), conllevando el riesgo de estancamiento en mínimos locales subóptimos o un entrenamiento ineficientemente lento. En cuanto a la **precisión y el control del error**, aunque las PINNs pueden aproximar soluciones complejas, lograr una exactitud comparable a la de los métodos tradicionales, que cuentan con marcos teóricos de error más maduros, puede ser un reto, y el control del error no es tan directo; específicamente, el **manejo de discontinuidades, singularidades o soluciones con componentes de alta frecuencia** puede resultar problemático para arquitecturas estándar de PINN con funciones de activación suaves, requiriendo a menudo estrategias especializadas como el muestreo de colocación adaptativo. Finalmente, persisten desafíos en la **interpretabilidad y los fundamentos teóricos**, ya que las redes neuronales son a menudo vistas como "cajas negras", y la comprensión teórica profunda de la convergencia, generalización e influencia de los hiperparámetros en las PINNs es un campo de investigación activa; además, aunque se promociona su capacidad para mitigar la dimensionalidad en ciertos problemas de EDPs de alta dimensión, la **escalabilidad** y el entrenamiento eficiente de redes extremadamente grandes para problemas de vasta escala siguen representando un obstáculo significativo.

Bibliografía

- [1] H. Igel. *Computational Seismology: A Practical Introduction*. Oxford University Press, 2016.
- [2] M. Rasht-Behesht, C. Huber, K. Shukla, and G. E. Karniadakis. Physics-informed neural networks (pinns) for wave propagation and full waveform inversions. *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 127(5):e2021JB023120, 2022. doi: 10.1029/2021JB023120. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2021JB023120>.
- [3] Maziar Raissi, Paris Perdikaris, and George Em Karniadakis. Physics informed deep learning (part i): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations. *ArXiv preprint arXiv:1711.10561*, 2019.
- [4] P. Ren, C. Rao, S. Chen, J.-X. Wang, H. Sun, and Y. Liu. Seismicnet: Physics-informed neural networks for seismic wave modeling in semi-infinite domain. *Comput. Phys. Commun.*, 295:109010, 2024. URL <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2023.109010>. Preprint submitted to Elsevier November 3, 2022.
- [5] L. G. Ottosen and H. Petersson. *Introduction to the Finite Element Method*. Prentice Hall, 2021.
- [6] J. Fish and T. Belytschko. *A First Course in Finite Elements*. Wiley, 2021.
- [7] Ecología Verde. Ondas sísmicas: qué son y tipos, 2024. URL <https://www.ecologiaverde.com/ondas-sismicas-que-son-y-tipos-4626.html>. Última consulta: 19 de noviembre de 2024.
- [8] Junta de Andalucía. Ondas sísmicas, 2024. URL <https://ede.a.juntadeandalucia.es/bancorecursos/file/>

b3ea993d-1aa5-4c40-9ed9-d254fe6f2ba5/1/es-an_2010111213_9125038.zip/ODE-c0e104be-869f-32ab-b836-ef8ae8c3787c/21_ondas_ssmicas.html?temp.hn=true&temp.hb=true. Última consulta: 19 de noviembre de 2024.

- [9] A. Udías Vallina and J. Mézcua Rodríguez. *Fundamentos de sismología*. UCA Editores, El Salvador, 1997.
- [10] Z. Meng, Y. Hu, and C. Ancey. Using a data driven approach to predict waves generated by gravity driven mass flows. *Water*, 12(2):600, 2020. doi: 10.3390/w12020600. URL <https://doi.org/10.3390/w12020600>.
- [11] Sokratis J. Anagnostopoulos, Juan Diego Toscano, Nikolaos Stergiopoulos, and George Em Karniadakis. Residual-based attention and connection to information bottleneck theory in pinns. *arXiv preprint*, arXiv:2307.00379, 2023. URL <https://arxiv.org/abs/2307.00379>.
- [12] D. P. Kingma and J. Ba. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint*, arXiv:1412.6980, 2014. URL <https://arxiv.org/abs/1412.6980>.
- [13] L. Smith and Y. Yang. Automatic differentiation: A review. *arXiv preprint*, arXiv:1804.00714, 2018. URL <https://arxiv.org/abs/1804.00714>.
- [14] Rajat Arora. A deep learning framework for solving hyperbolic partial differential equations: Part i. *arXiv preprint*, arXiv:2307.00379, 2023. URL <https://arxiv.org/abs/2307.00379>.
- [15] D. L. Logan. *A First Course in the Finite Element Method*. Cengage Learning, 2021.
- [16] Y. LeCun, Y. Bengio, and G. Hinton. Deep learning. *Nature*, 521:436–444, 2015. doi: 10.1038/nature14539.
- [17] Lu Lu, Xuhui Meng, Zhiping Mao, and George Em Karniadakis. DeepXDE: A deep learning library for solving differential equations. *SIAM Review*, 63(1): 208–228, 2021. doi: 10.1137/19M1274067.

- [18] C. Faraone, S. Caravaggio, J. A. Chávez, L. A. Castillo Ramos, M. L. Rainone, and G. Vessia. 2d fem numerical prediction of local seismic effects at san salvador municipality (el salvador) induced by 2001 earthquakes. *Geosciences*, 13(4):116, 2023. doi: 10.3390/geosciences13040116. URL <https://www.mdpi.com/2076-3263/13/4/116>.
- [19] B. Moseley, A. Markham, and T. Nissen-Meyer. Solving the wave equation with physics-informed deep learning. arXiv preprint, 2020. URL <https://arxiv.org/abs/2006.11894>. This entry refers to the preprint manuscript text provided in the sources.
- [20] J. Virieux and S. Operto. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 74(6):WCC127–WCC152, 2009. URL <https://doi.org/10.1190/1.3238367>.
- [21] J. D. Smith, K. Azizzadenesheli, and Z. E. Ross. Eikonet: Solving the eikonal equation with deep neural networks. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 59(12):10685–10696, 2020. URL <https://doi.org/10.1109/TGRS.2020.3039165>. Published online 2020, print issue 2021.

[1] [5] [6] [15] [3] [16] [17] [4] [?] [2] [18] [19] [20] [21]