

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA
CARRERA LICENCIATURA EN MATEMÁTICA**



**INFORME FINAL DEL CURSO DE ESPECIALIZACIÓN:
EN 3-VARIEDADES Y NUDOS TOPOLÓGICOS**

TÍTULO:

TOPOLOGÍA DE CONTACTO

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

PRESENTADO POR:

CÉSAR ALFREDO RUIZ VENTRUA N° DE CARNET VR16038

DOCENTE ASESOR:

M.SC. JOSÉ JOAQUÍN APARICIO RAMÍREZ

SEPTIEMBRE DE 2024

SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
AUTORIDADES**



RECTOR:

MSC. JUAN ROSA QUINTANILLA

VICERECTOR ACADÉMICO:

DRA. EVELYN BEATRIZ FARFÁN

VICERECTOR ADMINISTRATIVO:

MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

SECRETARIO GENERAL:

LIC. PEDRO ROSALÍO ESCOBAR CASTANEDA

FISCAL GENERAL:

LICDO. CARLOS AMILGAR SERRANO RIVERA

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
AUTORIDADES**



DECANO:

MSC. CARLOS IVÁN HERNÁNDEZ FRANCO

VICEDECANO:

DRA. NORMA AZUCENA FLORES RETANA

SECRETARIO:

LIC. CARLOS DE JESÚS SÁNCHEZ

JEFE DE DEPARTAMENTO:

ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA MARTÍNEZ

COORDINADOR GENERAL DE PROCESOS DE GRADO:

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

Índice general

1. Preliminares	8
1.1. Definiciones y ejemplos	8
1.2. Teorema de Pfaff	9
1.3. Difeomorfismos	10
2. Topología de contacto	12
2.1. Teoría de la foliación	12
2.2. Nociones importantes en la teoría de la foliación	13
2.3. Topología de contacto	15
2.3.1. Una definición algebraica de las estructuras de contacto.	15
2.3.2. Estructuras de contacto apretadas y sobretorcidas	16
2.3.3. Variedades sobre-torcidas	18
2.3.4. Variedades estrechas	18
2.4. Relaciones entre estructuras tensas y apretadas	20
3. Campos de Planos y Estructuras de Contacto	22
3.1. Definiciones y ejemplos	22
3.2. Clases de Euler	23
3.3. Estructuras de contacto	25
3.4. Dimensión mayor que 3	26
3.5. Curvas de contacto	27
Referencias Bibliográficas	29

Resumen

El presente estudio tiene como objetivo proporcionar una visión comprensiva y actualizada de los desarrollos más recientes en la topología de contacto de las 3-variedades. La topología de contacto, una rama de la geometría diferencial, ha experimentado un crecimiento significativo en las últimas décadas, revelando la riqueza y complejidad de las estructuras de contacto en dimensiones impares. Este campo destaca por su notable flexibilidad, en contraste con la rigidez que caracteriza a las variedades simplécticas. En particular, se ha demostrado que cualquier variedad de dimensión impar que cumpla con ciertas condiciones algebraico-topológicas, conocidas como estructuras casi de contacto, puede admitir una estructura de contacto. Esta propiedad abre un amplio abanico de posibilidades para la construcción y clasificación de variedades de contacto.

En este trabajo se han simplificado y aclarado los conceptos técnicos cuando ha sido posible, sin sacrificar la profundidad y rigor del análisis. Además, se han incorporado ejemplos ilustrativos y diagramas que facilitan la comprensión de los resultados clave y las técnicas empleadas en este campo de estudio. El objetivo es no solo presentar los avances recientes, sino también inspirar nuevas investigaciones y aplicaciones en la intersección entre la geometría y la topología.

Palabras clave: *Topología; Geometría; Variedad; Nudos; Foliciación.*

Abstrac

Contact topology, as an independent discipline, was established in 1896 with Sophus Lie's monumental work on contact transformations. Lie traces the genealogy of contact geometric notions back to Christiaan Huygens' work on geometric optics in the *Traité de la Lumière* of 1690, or even to Apollonius of Perga's *Conica* from the 3rd century BC, and to nearly all the famous mathematicians of the 18th and 19th centuries.

The aim of this study is to present the current results on contact geometry in 3-manifolds. This area of study has developed significantly, revealing that contact manifolds, compared to symplectic manifolds, offer greater flexibility. Any odd-dimensional manifold satisfying an algebraic-topological condition (more precisely, almost contact) admits a contact structure. The interaction between contact geometry and foliation theory is of particular interest, as it provides an enriching perspective on how contact structures relate to foliations in three-dimensional manifolds. Special effort has been made to make this study accessible to a broad audience, facilitating the understanding of the most recent concepts and results in this field.

Keywords: *Topology; Geometry; Variety; Knots; Foliation.*

Introducción

La topología de contacto, como una disciplina independiente, tuvo su origen formal en 1896 con la obra monumental de Sophus Lie sobre las transformaciones de contacto. Sin embargo, las raíces de las nociones geométricas de contacto pueden rastrearse mucho más atrás en la historia, hasta el trabajo de Christiaan Huygens en óptica geométrica en su *Traité de la Lumière* de 1690, e incluso hasta el tratado *Cónica* de Apolonio de Perga del siglo III a. C. A lo largo de los siglos XVIII y XIX, la teoría de contacto se fue enriqueciendo gracias a las contribuciones de numerosos matemáticos prominentes, consolidando su importancia en el campo de la geometría diferencial.

Las variedades de contacto han sido reconocidas desde hace tiempo como la contraparte en dimensión impar de las variedades simplécticas. No obstante, a diferencia de estas últimas, las variedades de contacto exhiben una notable flexibilidad. En particular, cualquier variedad de dimensión impar que satisfaga una condición algebraico-topológica, más precisamente una estructura casi de contacto, puede admitir una estructura de contacto. Esta flexibilidad contrasta con la rigidez de las variedades simplécticas y permite una gran variedad de aplicaciones y construcciones geométricas.

Este estudio sobre topología de contacto representa una introducción completa y actualizada al tema, incorporando sorprendentes aplicaciones recientes en la topología geométrica y diferencial. Destacan, entre otros resultados, la demostración de Eliashberg del teorema de Cerf, mediante la clasificación de estructuras de contacto ajustadas en la 3-esfera, y la demostración de Kronheimer y Mrowka de la Propiedad P para nudos a través de rellenos simplécticos de 3-variedades de contacto. El trabajo comienza con una revisión de la topología diferencial básica de las variedades de contacto, abordando en profundidad todos los aspectos relevantes de las variedades de contacto en tres dimensiones. Una característica destacada es la exposición detallada de la clasificación de Eliashberg de las estructuras de contacto sobregiradas. Además, los capítulos posteriores exploran la topología de contacto en dimensiones superiores, con un enfoque particular en la cirugía de contacto, sin dejar de lado otras construcciones importantes como los libros abiertos y las sumas conectadas de fibras. Este trabajo no solo proporciona una base sólida en la teoría de contacto, sino que también abre puertas a nuevas investigaciones en la intersección entre la geometría, la topología y la física matemática.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones y ejemplos

Definición 1. Una variedad de contacto (M, ξ) es una variedad M de $(2n + 1)$ dimensiones equipada con un campo de hiperplanos liso y maximalmente no integrable $\xi \subset TM$, es decir, localmente $\xi = \ker \alpha$, donde α es una 1-forma que satisface $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$. ξ es una estructura de contacto y α es una 1-forma de contacto que localmente define a ξ .

Cambio de la 1-forma de contacto: Si multiplicamos una 1-forma de contacto local α por una función g que no se anula en ningún punto, entonces

$$g\alpha \wedge (d(g\alpha))^n = g\alpha \wedge (gd\alpha + dg \wedge \alpha)^n = g^{n+1}\alpha \wedge (d\alpha)^n.$$

Por lo tanto, α es una 1-forma de contacto si y solo si $g\alpha$ es una 1-forma de contacto. Podemos hacer cambios “conformales” a la 1-forma.

No nos interesa la 1-forma específica; en cambio, nos interesa el campo de hiperplanos ξ dado por el núcleo.

Comparación con la geometría simpléctica: Una variedad simpléctica (M, ω) es una variedad de $2n$ dimensiones junto con una 2-forma cerrada ω que satisface $\omega^n \neq 0$, llamada la forma simpléctica. En geometría simpléctica, los cambios conformes a ω (es decir, multiplicar por g) usualmente harían que $d(g\omega) \neq 0$.

Ejemplo 1. Las estructuras de contacto estándar $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_0)$, donde \mathbb{R}^n tiene coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$, y ξ_0 está dada por $\alpha_0 = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$. Entonces, $\ker \alpha_0 = \text{span}\{\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_n}, \partial_{x_1} + y_1 \partial_z, \dots, \partial_{x_n} + y_n \partial_z\}$. Verificamos la propiedad de contacto al calcular $d\alpha_0 = \sum_{i=1}^n dx_i dy_i$ y $\alpha_0 \wedge (d\alpha_0)^n = (dz - \sum y_i dx_i) \wedge (\sum dx_i dy_i)^n = (n!) dz dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n$

Nuestro enfoque principal es en 3-variedades de contacto. Para las 3-variedades de contacto, asumiremos que nuestras estructuras de contacto ξ en M satisfacen lo siguiente:

- M está orientada.
- ξ está orientada, y por lo tanto se define como el núcleo de una 1-forma global α .
- $\alpha \wedge d\alpha > 0$, es decir, la estructura de contacto es positiva.

Ejemplo 2. La estructura de contacto estándar en dimensión 3 es (\mathbb{R}^3, ξ_0) , donde \mathbb{R}^3 tiene coordenadas (x, y, z) , y ξ_0 está dada por $\alpha_0 = dz - ydx$. Entonces, $\xi_0 = \ker \alpha_0 = \text{span}\{\partial_x + y\partial_z, \partial_y\}$. La orientación en ξ_0 se induce de la proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ al plano xy , o, de manera equivalente, de la orientación normal a ∂_z (en otras palabras, (v_1, v_2) es una base orientada para ξ_0 si (∂_z, v_1, v_2) es una base orientada para \mathbb{R}^3). Además, podemos verificar fácilmente que $\alpha_0 \wedge d\alpha_0 > 0$. Según la imagen de la hélice estándar (ver Figura), todas las líneas rectas paralelas al eje y son tangentes en todas partes a ξ_0 , y los 2-planos rotan al unísono a lo largo de estas líneas rectas.

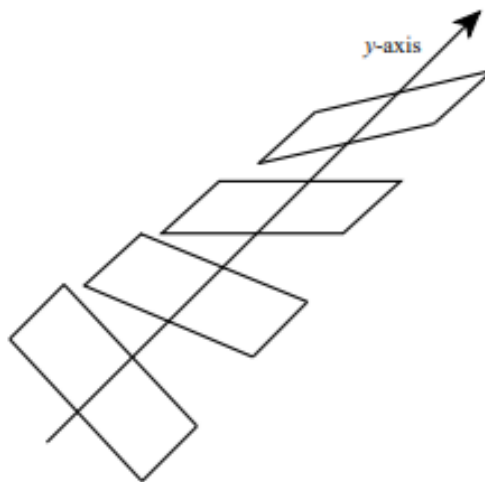


Figura 1.1: Imágen de la hélice

1.2. Teorema de Pfaff

Definición 2. Un difeomorfismo de contacto (o contactomorfismo) $\varphi : (M_1, \xi_1) \rightarrow (M_2, \xi_2)$ es un difeomorfismo tal que $\varphi^*\xi_2 = \xi_1$.

Un contactomorfismo generalmente no preserva la 1-forma de contacto, es decir, si α_1 y α_2 son 1-formas de contacto para ξ_1 y ξ_2 , entonces $\varphi^*\alpha_2 = g\alpha_1$ para alguna función g que no se anula en ningún punto.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Pfaff). *Cada variedad de contacto $(2n + 1)$ -dimensional (M, ξ) localmente se parece a $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_0)$, es decir, para todo $p \in M$ existen conjuntos abiertos U alrededor de p en M y V alrededor de 0 en \mathbb{R}^{2n+1} tales que $\varphi : (U, \xi) \rightarrow (V, \xi_0)$, con $\varphi(p) = 0$, es un contactomorfismo.*

El teorema de Pfaff esencialmente dice que la topología de contacto no tiene invariantes locales. El teorema de Darboux en geometría simpléctica también afirma que no existen invariantes locales en geometría simpléctica. (Su enunciado también se parece mucho al teorema de Pfaff.) Esto contrasta con la geometría riemanniana, donde la curvatura es un invariante local.

Demostración. Supongamos que $n = 1$, es decir, estamos en dimensión 3. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que hay un sistema de coordenadas local que mapea p a $0 \in \mathbb{R}^3$ y la estructura de contacto inducida ξ es el plano xy en 0 , es decir, $\xi(0) = \ker dz$. En un vecindario de 0 podemos escribir la 1-forma de contacto como $\alpha = dz + f dx + g dy$.

Ahora considera $y = 0$ (el plano xz). En él, ξ se restringe al campo vectorial $X = \partial_x - f \partial_z$. Observa que X es transversal al eje z ($x = y = 0$). Usando el teorema fundamental de las EDO's, podemos integrar a lo largo de este campo vectorial, comenzando a lo largo del eje z . Denotamos por $\Phi(x, z)$ el flujo en el tiempo x , comenzando en $(0, 0, z)$. Por lo tanto, existen nuevas coordenadas (también llamadas (x, z)) tales que el campo vectorial es ∂_x , es decir, $f = 0$ a lo largo de $y = 0$.

En otras palabras, hemos normalizado la estructura de contacto en el plano xz . Finalmente, considera las restricciones de ξ a $x = \text{constante}$, que dan el campo vectorial $\partial_y - g \partial_z$. Entonces, tenemos un campo vectorial en todo un vecindario de 0 en \mathbb{R}^3 , que es transversal a $y = 0$. Si integramos a lo largo del campo vectorial, obtenemos nuevas coordenadas de manera que podemos escribir $\alpha = dz + f(x, y, z) dx$ con $f(x, y, 0) = 0$ y $\partial_y f < 0$ (de la condición de contacto). Ahora simplemente cambia las coordenadas $(x, y, z) \mapsto (x, -f(x, y, z), z)$. \square

1.3. Difeomorfismos

Definición 3. *Un campo vectorial de contacto X es un campo vectorial cuyo flujo en el tiempo t φ_t es un difeomorfismo de contacto para todo t . (En otras palabras, $L_X \alpha = g \alpha$ para alguna función g , donde L es el derivado de Lie).*

Dada una 1-forma de contacto global α para ξ , definimos un campo vectorial $R = R_\alpha$ que satisface $i_R d\alpha = 0$ y $\alpha(R) = 1$. Tal campo vectorial R se llama el campo vectorial de Reeb correspondiente a la 1-forma α .

Primero, observa que dado que el rango de $d\alpha$ es de $2n$ dimensiones, existe un campo de líneas único que es aniquilado por $d\alpha$. R es una sección de este campo de líneas, con la normalización $\alpha(R) = 1$.

Observaciones:

- Todo campo vectorial X en M puede escribirse de manera única como $X = fR + Y$, donde Y es una sección de ξ .
- R es un campo vectorial de contacto.

Esto se deduce de la fórmula de Cartan: $L_R\alpha = i_R d\alpha + d(\alpha(R)) = 0$.

Proposición 1. *Por el contrario, todo campo vectorial de contacto X transversal a ξ puede escribirse como un campo vectorial de Reeb para alguna 1-forma α .*

Demostración. Dado que X es un campo vectorial de contacto, $L_X\alpha = i_X d\alpha + d(\alpha(X)) = g\alpha$ para algún g . Escribe $h = \alpha(X)$. Observar que h no se anula en ningún punto debido a la condición de transversalidad. Ahora considera la 1-forma $\frac{1}{h}\alpha$. □

Capítulo 2

Topología de contacto

A primera vista, la topología de contacto y la teoría de la foliación pertenecen a mundos completamente diferentes. Dada una variedad M^n y una distribución $(n - 1) - \xi$ en ella, nos gustaría que esta distribución fuera integrable para obtener una foliación. En la topología de contacto es cierto lo opuesto, queremos que ξ no sea integrable en ninguna parte. Las confoliaciones son el punto medio entre dos situaciones; permitimos un poco de foliación y un poco de topología de contacto. Este parece ser el peor escenario posible: no podríamos usar las técnicas de la teoría de la foliación ni de la topología de contacto. Sin embargo, sucede todo lo contrario. Las interacciones de estas dos teorías son un terreno fértil donde los buenos resultados de la teoría de la foliación (teorema de estabilidad de Reeb) se puede extender a las confoliaciones y donde está presente una dualidad de estructuras de contacto estrecho y foliaciones tensas. Nuestro primer paso será hacer precisas las nociones anteriores.

2.1. Teoría de la foliación

La idea de la teoría de la foliación es descomponer una variedad M en subvariedades inmersas que encajan perfectamente entre sí; es decir, que localmente parecen una resma de papel apilada. Se espera obtener nuevos conocimientos sobre la variedad observando estas subpiezas ensambladas.

Definición 4. Una foliación F de dimensión d (o codimensión n) es una variedad suave $M * d + n$ es un atlas maximal compatible con la estructura diferencial de M tal que el cambio de mapa de coordenadas de una carta (U, ϕ) a (V, ψ) está dado por una fórmula de la forma:

$$\phi \cdot \psi^{-1}(x, y) = (f(x, y), g(y)), \quad x \in R^d, y \in R^n$$

donde por atlas compatible se entiende que $F \subset A$ si A es la estructura diferencial de M .



Figura 2.1: Foliación

- Ejemplo 3.** a) Dado un campo vectorial X que no se desvanece en ninguna parte en una variedad compacta M , sus curvas integrales producen una foliación de la variedad.
- b) De manera más general, para cada distribución k -dimensional ξ , en una variedad M , queremos decir una función $\xi : M \rightarrow TM$ que asigna a cada punto $p \in M$ un subespacio k -dimensional de T_pM tal que para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p y k campos vectoriales X_1, \dots, X_k que abarcan ξ_p . Decimos que dos campos vectoriales X e Y son secciones de ξ si para todo $p \in M$, X_p e $Y_p \in \xi_p$. Un teorema de Frobenius establece que una distribución k ξ produce una foliación k -dimensional F si y solo si para dos secciones X e Y cualesquiera de ξ , $[X, Y]$ es también una sección de ξ .
- c) Otro ejemplo importante para nosotros es la foliación de Reeb del toro sólido. Proporcionaremos solo un esbozo de esta foliación. El componente A Reeb de una variedad tridimensional foliada de codimension uno es un toro sólido embebido foliado de la manera descrita anteriormente. Este concepto desempeña un papel esencial en la teoría que sigue.



Figura 2.2: Ejemplos de foliación

2.2. Nociones importantes en la teoría de la foliación

Definición 5. Una hoja L de una foliación F es una clase de equivalencia de puntos de la variedad M donde dos puntos p y q se consideran equivalentes si hay un número finito de cartas de F , $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_n, \varphi_n)$ digamos y puntos $p = p_1, \dots, p_n = q$ donde $p_i \in U_i$ para $i = 1, \dots, n$ tales que p_i y p_{i-1} pertenecen $\varphi_i(R_d \times r_i)$ para algún $r_i \in R_n$.

Ejemplo 4. los círculos de la figura 1 son las hojas de la foliación del toro. Los hiperboloides retorcidos de la foliación de Reeb (figura 2) son hojas de esta foliación. El toro limite es otra hoja de la foliación de Reeb.

Definición 6. Una foliación F de dimensión uno en una variedad cerrada se llama *tensa* si se puede incrustar en ella un círculo transversal que interseca cada hoja.

Teorema 2.2.1. Una foliación F de dimensión uno de una 3-variedad cerrada es *tensa* si y solo si no tiene un componente de Reeb.

Demostración. Si se supone que F es una foliación de dimensión uno y que tiene una componente de Reeb, entonces se debe cumplir que no es cerrada, lo que contradice la hipótesis de ser cerrada. \square

Definición 7. Nótese que si tenemos una d -foliación F de una $(n + d)$ -variedad M entonces, al considerar los espacios tangentes a cada hoja, obtenemos una d -distribución en M , Una foliación transversalmente orientable es una foliación tal que su d -distribución es transversalmente orientable.

Teorema 2.2.2. Supóngase que F es una foliación de codimensión uno orientada transversalmente de una variedad compacta conexa M . Si F tiene una hoja compacta L con un grupo fundamental finito, entonces todas las hojas son difeomorfas a L . Además, existe una inmersión $f : M \rightarrow S^1$ tal que las hojas de F son los conjuntos de nivel $f^{-1}(\theta)$.

Demostración. Sea F una foliación de codimensión uno orientada transversalmente de una variedad compacta conexa M . Sea L un hoja compacta L y H una hoja, al considerar $\varphi : L \rightarrow H$ entonces se debe cumplir ser difeomorfismo. Además

$$f^{-1}(\theta) = \{x \in F : f(x) = \theta\}.$$

Así las hojas son los conjuntos de nivel. \square

El teorema que se presenta a continuación es una versión débil. Lo enunciamos aquí para señalar que el mismo resultado es válido para estructuras de contacto estrecho. En la sección 3 se analizan otras propiedades válidas para ambas estructuras. La forma equivalente para estructuras estrechas se analiza en la siguiente sección.

Teorema 2.2.3 (Thurston). Sea F una foliación tensa en una variedad orientada de 3 dimensiones M (podemos considerar a F como una distribución que genera la foliación). Sea N una superficie de 2 dimensiones orientable, cerrada y embebida $N \subset M$ entonces:

- Para $N \neq S^2$, $|e(F)[N]| \leq -\chi(N)$,
- Para $N = S^2$, $e(F)[N] = 0$.

Donde $\chi(N)$ denota la característica de Euler N y $e(F)[N]$ el valor de la clase de Euler $e(F) \in H^2(M)$ evaluada en N .

Demostración. Si $N \neq S^2$ se debe cumplir que $N \neq S^2$, $|e(F)[N]| + \chi(N) \leq 0$, en cambio, si $N = S^2$, $N \neq S^2$, $|e(F)[N]| + 0 \leq 0$, de donde $e(F)[N] = 0$. \square

2.3. Topología de contacto

La topología de contacto es esencialmente lo opuesto a la teoría de la foliación. Se ocupa de $(n-1)$ -distribuciones en n -variedades (distribuciones hiperplanas) que no son integrables ni siquiera localmente. En contraste con las 1-distribuciones, donde el teorema de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales afirma que localmente siempre se puede integrar un campo vectorial X , existen 2-distribuciones que no son integrables localmente como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Consideremos los campos vectoriales

$$X_p = \partial \partial x p - b \partial \partial z p \quad Y_p = \partial \partial y p, \quad p = (a, b, c)$$

Generan la siguiente distribución plana:

Afirmamos que esta distribución no puede integrarse en ningún punto. Basta con observar el comportamiento que tendría una superficie S tangente ξ a lo largo del eje y y la rapidez con la que tiene que rotar en el plano xz a medida que nos movemos a lo largo del eje y . por ejemplo, supongamos que $0 \in S$ en el eje x excepto 0. Como en el dibujo siguiente, observe que podríamos viajar a lo largo de la dirección del eje y hacia la izquierda de 0 y k a través de una línea recta en $S \cap$ plano xy . Esto contradice el hecho de que la distribución plana comienza a torcerse a medida que nos movemos.

2.3.1. Una definición algebraica de las estructuras de contacto.

Como en gran parte de la geometría diferencial, traduciremos la noción de topología de contacto en términos algebraicos utilizando el fibrado cotangente de la variedad. Esto también hará que nuestras ideas sean más precisas.

Un hiperplano tangente $H_p \subset T_p M$ de una variedad M también se puede definir especificando un elemento $\alpha_p \in T_p^* M$ para el cual $\ker \alpha_p = H_p$. Para distribuciones C_∞ podemos encontrar para todo $p \in M$ un entorno U de p y una 1-forma α en U de modo que para cualquier $q \in U$ $\ker \alpha_q = H_q$. Tal α claramente no es único. Es fácil ver que una 1-forma local no puede extenderse a toda la variedad.

En lo que sigue, por simplicidad de exposición más que por necesidad matemática supondremos que dada una distribución hiperplana ξ de M siempre podemos encontrar una 1-forma α de M tal que $\xi_p = \ker \alpha_p, \forall p \in M$. llamaremos a dicha 1-forma una 1-forma definitoria de ξ . Supongamos que ξ es una distribución hiperplana de M con 1-forma definitoria α . Si para cada dos secciones X e Y de ξ , $[X, Y]$ es también una sección de ξ entonces por el teorema de Frobenius ξ es integrable. En términos de la 1-forma α tenemos:

$$0 = \alpha(X) = \alpha(Y) = \alpha([X, Y])$$

En vista de la identidad

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$$

ξ es integrable si y solo si $d\alpha(X, Y) \equiv 0$ para todas las secciones X e Y de ξ como se indicó anteriormente, esto es lo opuesto a lo que nos gustaría tener para una estructura de contacto. Por lo tanto, imponemos que $d\alpha$ sea no degenerado (simplectico) en ξ (es decir, $\forall X_p \in \xi_p, \exists Y_p \in \xi_p$ tal que $d\alpha_p(X_p, Y_p) \neq 0$)

Definición 8. Dada una distribución hiperplana ξ de M , (M, ξ) es una variedad de contacto si existe una 1-forma definitoria α tal que $d\alpha|_{\xi_p}$ es no degenerada para todo $p \in M$. Dicha 1-forma se denomina forma de contacto.

Teorema 2.3.1. Todas las variedades de contacto de la misma dimensión son localmente difeomorfas. Es decir, dadas dos variedades de contacto (M, ξ) y (N, η) y puntos $x \in M$ e $y \in N$ existen vecindades U de x , V de y y un difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ que envía $\xi|_U$ a $\eta|_V$.

Demostración. Considerar dos variedades de contacto (M, ξ) y (N, η) y puntos $x \in M$ e $y \in N$, sean $x \in M$ e $y \in N$, al ser Hausdorff, se tendría que existen vecindades U de x , V de y y un difeomorfismo, además, una función $f : U \rightarrow V$ que cumple con las condiciones del teorema. \square

Por lo tanto, para entender el comportamiento local de las estructuras de contacto en 3-variedades, es suficiente entender la estructura de contacto del ejemplo discutido previamente.

Teorema 2.3.2. Sea (M^{2n+1}, ξ) una distribución hiperplanar con una 1-forma definitoria α . Entonces $d\alpha$ es no degenerada si y solo si $\alpha \vee (d\alpha)^n \neq 0$.

Demostración. Nótese que para 3-variedades la ecuación anterior se convierte en $\alpha \vee (d\alpha)^n \neq 0$. Esto será esencial para la formulación algebraica de confoliaciones en 3-variedades. Lo que implica que (M^{2n+1}, ξ) una distribución hiperplanar. \square

2.3.2. Estructuras de contacto apretadas y sobretorcidas

El primer paso para entender las 3-variedades de contacto es el teorema de Martinet

Teorema 2.3.3. Toda 3-variedad admite una estructura de contacto

Demostración. Una de las formas estándar de demostrar el teorema de Martinet es recordar que toda 3-variedad cerrada se puede obtener mediante una cirugía en un enlace en S^3 y luego argumentar que esta cirugía puede realizarse en el contexto de contacto. Una expresión común de este hecho es a través del conocido teorema de Lickorish-Wallace, que establece que toda 3-variedad orientable cerrada puede obtenerse mediante una cirugía a lo largo de un enlace en S^3 , donde cada coeficiente de cirugía de Dehn es un entero. \square

Después de esto, las 3-variedades de contacto se clasifican como sobretorcidas o apretadas para un análisis más detallado. Las variedades sobretorcidas se entienden bastante bien, pero todavía hay muchas preguntas abiertas sobre las estructuras apretadas.

Definición 9. Una variedad de contacto tridimensional (M, ξ) se llama *sobretorcida* si podemos incrustar un disco D (un disco sobretorcido) en ella de tal manera que su interior sea transversal a ξ en todas partes excepto en un punto y su borde sea tangente a ξ . Si (M, ξ) no está sobretorcida, entonces se llama *apretada*.

2.3.3. Variedades sobre-torcidas

Existe una forma más fuerte del teorema de Martinet debido a Bennequim que establece que cada variedad de contacto puede ser deformada a una estructura sobretorcida. Las estructuras de contacto sobre-torcidas han sido completamente clasificadas en 1989 por Eliashberg.

Definición 10. Fijemos un punto p y un disco embebido $p \in D$ en una 3-variedad conexa orientada. Sea $Distr(M)$ el espacio de todas las 2-distribuciones en M fijadas en el punto p proporcionadas con la topología C_∞ . Sea $Cont(M)$ el subespacio de $Distr(M)$ que consiste en estructuras de contacto de M y sea $Contot(M)$ el subespacio de $Cont(M)$ que consiste en estructuras sobre-torcidas que tienen el disco D como un disco sobre-torcido.

Teorema 2.3.4. Si M es una variedad compacta entonces dos estructuras de contacto cualesquiera que pertenezcan al mismo componente de $Cont(M)$ son isotópicas.

Demostración. Cualquier isotopía de contacto de una subvariedad en una variedad de contacto se puede extender a una difeotopía de contacto de toda la variedad. Por lo tanto, es suficiente probar solo la primera afirmación. Tomemos S^3 con la estructura estándar ξ_0 y realicemos el giro de Lutz de ξ_0 a lo largo de un transversal cerrado dentro de una pequeña bola $B \subset S^3$. La estructura sobrepasada resultante ξ se puede hacer pertenecer a la misma componente de $Distr(S^3)$ que ξ_0 . \square

Teorema 2.3.5. La función de inclusión de $Contot(M)$ en $Distr(M)$ es una equivalencia de homotopía. En particular, dos estructuras sobretorcidas en una variedad cerrada M son isotópicas si son homotópicas como distribuciones planas.

Demostración. Ahora tomemos ξ y hagamos la misma perturbación dentro de otra pequeña bola $B' \subset S^3 \setminus B$. La nueva estructura de contacto ξ' también es sobrepasada y existe un difeomorfismo de contacto isotópico a la identidad $h : (S^3, \xi) \rightarrow (S^3, \xi')$. Sea $B'' = h(B)$. Por la construcción, existe un difeomorfismo de contacto $g : (B', \xi') \rightarrow (B, \xi)$. Ahora afirmo que el difeomorfismo de contacto $h \circ g : (B', \xi') \rightarrow (B'', \xi')$ no se puede extender a un difeomorfismo de contacto $(S^3, \xi') \rightarrow (S^3, \xi)$. De hecho, el desentrelazado de Lutz en B'' transforma ξ' en ξ , mientras que el desentrelazado en B' transforma ξ' en ξ_0 . Pero ξ es equivalente a ξ' y no es equivalente a ξ_0 . \square

2.3.4. Variedades estrechas

Gran parte de la investigación actual sobre variedades estrechas se ocupa de la existencia y construcción de estructuras estrechas en una variedad dada. La primera

3-variedad que no admite una estructura de contacto estrecho fue descubierta en 2001. El siguiente teorema de Eliashberg extiende el teorema de Thurston desde la foliación tensa a las variedades de contacto estrecho.

Teorema 2.3.6. *Sea ξ una estructura de contacto estrecho en una variedad orientada de 3 dimensiones M . Sea N una superficie de 2 dimensiones orientable, empotrada y cerrada $N \subset M$, entonces:*

- Para $N \neq S^2$, $|e(F)[N]| \leq -\chi(N)$,
- Para $N = S^2$, $e(F)[N] = 0$.

Donde $\xi(N)$ denota la característica de Euler de N y $e(\xi)[N]$ el valor de la clase de Euler $e(\xi) \in H^2(M)$ evaluada en N .

Demostración. Si $N \neq S^2$ se debe cumplir que $N \neq S^2$, $|e(F)[N]| + \chi(N) \leq 0$, en cambio, si $N = S^2$, $N \neq S^2$, $|e(F)[N]| + 0 \leq 0$, de donde $e(F)[N] = 0$. \square

Definición 11. *Una 2-distribución ξ de una 3-variedad es una estructura de contacto si su 1-forma definitoria α es tal que $\alpha \wedge d\alpha = 0$, y es una foliación cuando $\alpha \wedge d\alpha = 0$.*

Nótese que una variedad de contacto es orientable ya que el signo de $\alpha \wedge d\alpha = 0$ es independiente de la elección de α .

Definición 12. *Una confoliación positiva de una 3-variedad orientada M es una 2-distribución ξ con una 1-forma definitoria α tal que $\alpha \wedge d\alpha \geq 0$. Las confoliaciones negativas se definen de la manera obvia*

Ejemplo 6. La distribución ξ generada por

$$X = \partial\partial x - y\partial\partial z$$

tiene una 1-forma definitoria $\alpha = ydx + dz$ (solo tome el producto vectorial de X_p con Y_p). Uno calcula fácilmente que

$$\alpha \wedge d\alpha = -dx \wedge dy \wedge dz$$

y, por lo tanto, esta es una confoliación negativa.

Ejemplo 7. Para una confoliación que no es una estructura de contacto ni una foliación, considere la función de paso suave $s : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, es decir, una función C_∞ que es cero en $b \leq 0$, uno para $b \geq 1$ y estrictamente creciente entre cero y uno. Sea $S(a, b, c) = s(b)$ y definamos una 1-forma α por $\alpha_p = bS(p)dx_p + dz_p$ para $p = (a, b, c)$. Entonces $\alpha \wedge d\alpha = -(b\partial S\partial y + S)dx \wedge dy \wedge dz$, una confoliación negativa.

Esta confoliación es una foliación con hojas horizontales en la región $\{(a, b, c) : b < 0\}$ y la estructura de contacto en el ejemplo anterior en la región $\{(a, b, c) : b > 0\}$. Se diría que esta confoliación es una laminación en el conjunto $\{(a, b, c) : b \geq 0\}$; una laminación es, en términos generales, una foliación en un subconjunto cerrado de una

variedad. En general, el conjunto $\{p : (\alpha \wedge d\alpha)|_p = 0\}$ no está laminado por nuestra confoliación ya que puede tener el interior vacío. Por lo tanto, una confoliación no es necesariamente una forma de romper una 3-variedad en una laminación y una estructura de contacto.

Como se dijo en la introducción, podemos extender el teorema de estabilidad de Reeb al teorema de confoliaciones.

Teorema 2.3.7 (Teorema de estabilidad de Reeb para confoliaciones). *Supongamos que una confoliación ξ en una variedad orientada cerrada M tiene una 2-esfera S incrustada integral. Entonces ξ es una foliación y (M, ξ) es difeomórfica a $S_2 \times S_1$ donde las hojas son las rebanadas $S_2 \times x_0$.*

Demostración. Un ingrediente esencial para probar el teorema de estabilidad de Reeb es la holonomía. La holonomía también juega un papel en la interpretación geométrica de las confoliaciones. \square

2.4. Relaciones entre estructuras tensas y apretadas

Primero discutiremos un método empleado para la creación de grandes cantidades de foliaciones tensas y estructuras de contacto apretadas.

Definición 13. *Sea (M, ξ) una confoliación positiva tal que $\partial W = M$ para alguna variedad simpléctica compacta (W, ω) . Llamamos (W, ω) un relleno simpléctico de (M, ξ) si M está orientado como el límite de la variedad simpléctica orientada canónicamente (W, ω) y $(\omega|_M)|_\xi$ no se desvanece. (Decimos que M es semirellenable si es solo uno de los componentes conexos de ∂W).*

Teorema 2.4.1. *Si (M, ξ) es una 2-distribución integrable con un relleno simpléctico entonces la foliación generada por ξ es tensa. El recíproco es parcialmente cierto. Una variedad tensa es semirellenable (no se sabe si podríamos reemplazar semirellenable por rellenable en este caso).*

Demostración. Si (M, ξ) es una 2-distribución integrable con un relleno simpléctico, además sea W una variedad simpléctica compacta tal que $\partial W = M$, de modo que (W, ω) es un relleno simpléctico y de eso se deduce que la foliación ξ es tersa. \square

Teorema 2.4.2. *Si (M, ξ) es una variedad de contacto con un llenado simpléctico entonces (M, ξ) es una variedad de contacto apretada.*

Demostración. Sea (M, ξ) una variedad de contacto con un llenado simpléctico, entonces si se supone que $\partial W = M$, de la definición 13, como W es una variedad simpléctica compacta, se deduce que (M, ξ) es una variedad de contacto apretada. \square

Hasta hace poco no se sabía si el inverso de este teorema se cumpliría.

Teorema 2.4.3. *Hay variedades apretadas que no son simplécticamente rellenable.*

Demostración. Si se supone por contradicción que todas las variedades son simplemente rellenables, entonces se contradice el Teorema 2.4.1, puesto que hay variedades que son semirellenables. \square

La relación entre estructuras tensas y apretadas es incluso más fuerte.

Teorema 2.4.4. *Si una 3-variedad lleva una foliación tensa, entonces también admite una estructura de contacto apretado.*

Demostración. Sea M una 3-variedad con una foliación tersa, entonces si se supone que M no admite una estructura de contacto apretado, por el Teorema 2.4.1 se tendría que (M, ξ) es generada por ξ que es tersa. Lo cual contradice el hecho que la estructura es apretada. \square

Teorema 2.4.5. *Si M es una 3-variedad con frontera entonces el inverso del teorema anterior también se cumple. (la afirmación no es verdadera en general, S^3 admite una estructura de contacto apretado pero no tiene foliación tensa).*

Demostración. Supongamos que M es una 3-variedad con una estructura de contacto apretado, entonces por el Teorema 2.4.3, se debe cumplir que M es una variedad que no es simplécticamente rellenable, lo que implica que M es una 3-variedad que lleva una foliación tersa. \square

Estos teoremas junto con la desigualdad que involucra la característica de Euler proporcionan evidencia sólida de que las nociones de foliaciones tensas y estructuras apretadas pueden extenderse a confoliaciones. Sin embargo, en este punto, incluso la definición de confoliación apretada/de contacto es un problema abierto.

Capítulo 3

Campos de Planos y Estructuras de Contacto

3.1. Definiciones y ejemplos

Definición 14. *Un campo de hiperplanos en una variedad M es una elección suavemente variable de un plano $\xi_x \subset T_x M$.*

Ejemplo 8. El campo de planos más sencillo en $M = \mathbb{R}^n$ es el campo de hiperplanos horizontales ξ_0 ; en cada punto, asignamos el plano horizontal descrito por $dx_n = 0$. Estos son tangentes de manera única a la colección de planos horizontales en \mathbb{R}^n .

Los campos de hiperplanos están estrechamente relacionados con las foliaciones en variedades. Hay dos definiciones equivalentes de una foliación en una n -variedad M . Es un campo de hiperplanos ξ tal que:

1. ξ está modelado localmente por el de el ejemplo anterior. Es decir, existe una carta local alrededor de cada punto que es difeomórfica a ξ_0 .
2. Una colección de superficies S_α tangentes en todas partes a ξ de manera que $M = \cup_\alpha S_\alpha$ de forma única

A veces nos referimos a una foliación por la colección de superficies S_α . Una pregunta natural que se puede hacer sobre un campo de hiperplanos es si surge de una foliación. Cuando un campo de hiperplanos lo hace (al menos localmente), se dice que es integrable. Dada una foliación, la colección de espacios tangentes es un campo de hiperplanos integrable.

Ejemplo 9. Podemos hacer una foliación $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ mediante círculos concéntricos, como se muestra a la izquierda. Sin embargo, una pequeña perturbación a los hiperplanos puede producir una foliación con espirales que atraen hacia los círculos. En este caso, las superficies ya no son compactas como lo eran en el caso no perturbado.

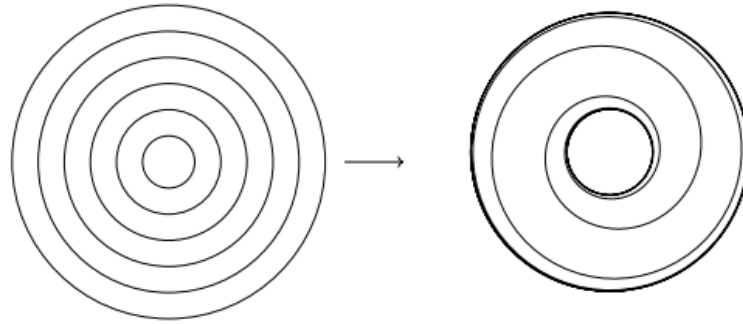


Figura 3.1: Foliación de círculos

Este ejemplo demuestra uno de los dos principales problemas de estabilidad con las foliaciones:

- Las foliaciones no son estables bajo perturbaciones en dimensiones mayores que 1.
- Incluso si una perturbación resulta en otra foliación, las superficies resultantes pueden tener topologías muy diferentes.

Por lo tanto, para estudiar cosas que son estables, es mejor observar estructuras que no sean foliaciones. Esta es la idea detrás de una estructura de contacto. Una estructura de contacto en M es un campo de hiperplanos que no se restringe a un campo de hiperplanos integrable en ninguna subvariedad de M . Tal campo se llama completamente no integrable. Haremos todas estas definiciones más precisas más adelante.

3.2. Clases de Euler

Definición 15. Una distribución C^k ξ en una n -variedad M es un m -plano ξ_x en cada punto $x \in M$ tal que localmente ξ está generado por m campos vectoriales C^k linealmente independientes. Se llama campo de hiperplanos si $m = n - 1$ y un campo de planos si $m = 2$ y $n = 3$. Una distribución suave es una distribución C^∞ .

Proposición 2. $\xi = \ker(\alpha)$ para alguna 1-forma α no nula globalmente si y sólo si ξ es co-orientable (es decir, existe un campo de líneas orientable transversal a ξ).

Otra forma de definir distribuciones es a través del lenguaje de los paquetes de vectores. Recuerda que un paquete de vectores $\pi : E \rightarrow B$ es una sobreyección suave tal que $\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial para cada $x \in B$. También debe satisfacer la condición de trivialización local: alrededor de cada punto $x \in B$ existe un vecindario U tal que $U \times \mathbb{R}^k \cong \pi^{-1}(U)$.

Definición 16. Una distribución es un subpaquete de TM . En particular, un campo de hiperplanos es un subpaquete de codimensión 1 de TM .

Proposición 3. Si $(F, B, \pi) \subset (E, B, \pi)$ es un subpaquete, existe un subpaquete complementario (F_0, B, π_0) tal que $F \oplus F_0 \cong E$.

Un invariante importante que se puede asociar a los paquetes de vectores es la clase de Euler, que es una clase característica que mide cuán “retorcido” está el paquete. Para definir esto, sea $\pi : E \rightarrow B$ un paquete de vectores orientado de rango k sobre una variedad orientada B . Además, sea $\sigma : B \rightarrow E$ una sección transversal a la sección 0 de π . Dado que es transversal, $\sigma^{-1}(0)$ es una subvariedad de codimensión k de B y, por lo tanto, representa una clase de homología $[\sigma^{-1}(0)] \in H_{n-k}(B, \mathbb{Z})$. Por dualidad de Poincaré, existe una clase de homología correspondiente $e \in H^k(B, \mathbb{Z})$.

Definición 17. La clase de Euler de $\pi : E \rightarrow B$ es $e \in H^k(B, \mathbb{Z})$ como se indicó anteriormente.

Ejemplo 10. Considere el paquete tangente $E = TB$, de modo que $k = n$. Entonces, $e(E) \in H^n(B) \cong \mathbb{Z}$ (siempre que B sea conexa). En este caso, $e(E)$ es la característica de Euler $\chi(B)$ (técnicamente, es $e(E)$, $[B]$ en cohomología, donde $[B]$ es la clase fundamental de B). Esto se puede ver usando la definición de autointersección de la característica de Euler:

$$\chi(M) = I(\Delta, \Delta) = e(N\Delta) = e(T\Delta) = e(TM)$$

donde Δ es la diagonal en $B \times B$, $N\Delta$ es el paquete normal a Δ y $T\Delta$ es el paquete tangente a Δ .

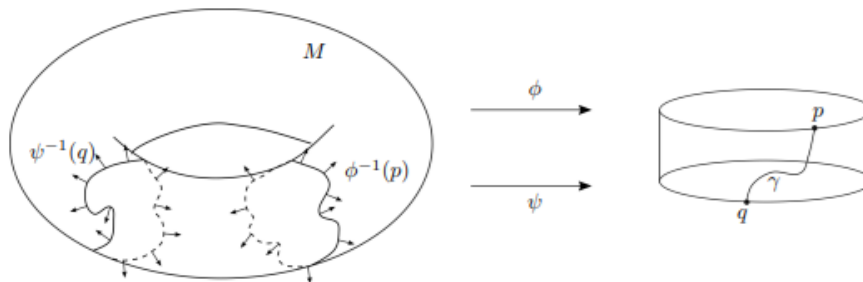


Figura 3.2: Las subvariedades enmarcadas $\phi^{-1}(p)$ y $\psi^{-1}(q)$ y el camino inducido γ .

3.3. Estructuras de contacto

Ahora volveremos a la noción de una estructura de contacto y proporcionaremos una definición más completa. Comenzaremos con la dimensión 3 y la definiremos para dimensiones arbitrarias después. Recordemos

Definición 18. Una distribución en M se llama *foliación* (o *integrable*) si es tangente en todos los puntos a subvariedades que llenan M de manera disjunta.

El teorema de Frobenius caracteriza las distribuciones integrables mediante una fórmula. En términos generales, dice que para todos los campos vectoriales X y Y en ξ , el corchete de Lie $[X, Y]$ está en ξ . Esta es una condición tanto necesaria como suficiente. En el caso de los campos de hiperplanos, el teorema de Frobenius es equivalente a:

Teorema 3.3.1. ξ es integrable si y solo si localmente existe una 1-forma α con $\ker(\alpha) = \xi$ tal que $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Demostración. Observar que si α_0 es otra forma con $\ker(\alpha_0) = \xi$, entonces existe una función f en ningún lugar nula tal que $\alpha_0 = f\alpha$ y:

$$\alpha_0 \wedge d\alpha_0 = f\alpha \wedge d(f\alpha) = f^2\alpha \wedge d\alpha$$

Por lo tanto, un cuadrado de f se extrae siempre que transformamos α por α_0 . Por lo tanto, la condición $\alpha \wedge d\alpha = 0$ es independiente de α . Además, un campo de hiperplanos co-orientable es integrable si y solo si existe una α global tal que $\xi = \ker(\alpha)$, $\alpha \wedge d\alpha = 0$. \square

Ejemplo 11. Supongamos que $\alpha = dg$ para alguna $g : M \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, claramente $d\alpha = 0$, por lo que la foliación asociada debería ser integrable. Las superficies son precisamente las variedades de nivel de g . Si $\alpha = fdg$ para alguna función positiva f , entonces todavía obtenemos $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Teorema 3.3.2. Dado $\alpha \in \Omega^1(M)$ no nulo y $\beta \in \Omega^p(M)$, entonces $\alpha \wedge \beta = 0 \iff \beta|_{\Sigma} = 0$, donde $\Sigma = \ker(\alpha)$.

Demostración. Se eligen coordenadas locales en x de modo que $\Sigma_x = 0 \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces escribimos $\beta = \sum \beta_I dx_I$. Nota que $\alpha_x = dx^1$ por construcción. Luego, $\alpha \wedge \beta = 0$ si y solo si todos los β_I no nulos involucran dx^1 . En otras palabras, $\beta = dx^1 \wedge \gamma$ para alguna γ en x . \square

Corolario 1. Una distribución de hiperplanos Σ es integrable si y solo si $\Sigma = \ker(\alpha)$ localmente para alguna α tal que $d\alpha|_{\Sigma} = 0$.

Definición 19. Un campo de planos en una variedad M^3 es una estructura de contacto si y solo si localmente es $\ker(\alpha)$ y $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ en todas partes. De manera equivalente, $d\alpha|_{\Sigma}$ nunca es 0. En el caso co-orientable, podemos asumir que α es global.

La primera observación sobre esta definición es que es una condición abierta. Esto es lo que nos proporciona estabilidad, como se mencionó al principio. Además, $\alpha \wedge d\alpha$ es una forma de volumen (pero no es canónica, ya que siempre podemos reescalar por f). Sin embargo, tal reescalado solo cambia por un coeficiente de función positiva (f^2), por lo que al menos hay una orientación canónica en M inducida por Σ . Esto es cierto incluso cuando Σ no es co-orientable.

Definición 20. *Un difeomorfismo $\phi : (M, \Sigma) \rightarrow (M', \Sigma')$ se llama contactomorfismo si $d\phi_x(\Sigma_x) = \Sigma'_{\phi(x)}$ en cada punto. De manera equivalente, $\phi^*(\alpha') = \alpha$ para α y α' , que son 1-formas locales que definen Σ y Σ' .*

Definición 21. *Si M ya está orientada, llamamos a Σ una estructura de contacto positiva si la orientación de contacto inducida es la misma que la orientación de M . Entonces escribimos $\alpha \wedge d\alpha > 0$. De lo contrario, se llama una estructura de contacto negativa y escribimos $\alpha \wedge d\alpha < 0$.*

3.4. Dimensión mayor que 3

Para generalizar la definición de estructura de contacto a dimensiones impares arbitrarias, reemplazamos "nunca cero" por "no degenerada". Recordemos que una forma bilineal ω en un espacio vectorial V es no degenerada si, para todo $v \in V$ no nulo, existe $w \in V$ tal que $\omega(v, w) \neq 0$. Es antisimétrica si $\omega(v, w) = -\omega(w, v)$.

Proposición 4. *Una forma bilineal antisimétrica es no degenerada si y solo si $\omega^n \neq 0$.*

Definición 22. *Un campo de hiperplanos en una variedad M de dimensión $2n + 1$ es una estructura de contacto si $\Sigma = \ker(\alpha)$ localmente y $d\alpha|_{\Sigma}$ es no degenerado en todas partes (es decir, $\alpha \wedge d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha \neq 0$).*

En este caso, la paridad de la forma no nula en la definición anterior nos dice que Σ orienta M si n es impar y orienta Σ si n es par. ¿Qué sucede cuando M es de dimensión par? No podemos obtener una no degeneración completa, pero podemos obtener un espacio nulo de dimensión 1 de Σ . Estos se llaman estructuras de contacto pares, y no son muy interesantes (al menos para la discusión actual). Sin embargo, las variedades de dimensión par pueden ser dotadas de una estructura simpléctica. Esta es una 2-forma cerrada no degenerada $\omega \in \Omega^2(M)$.

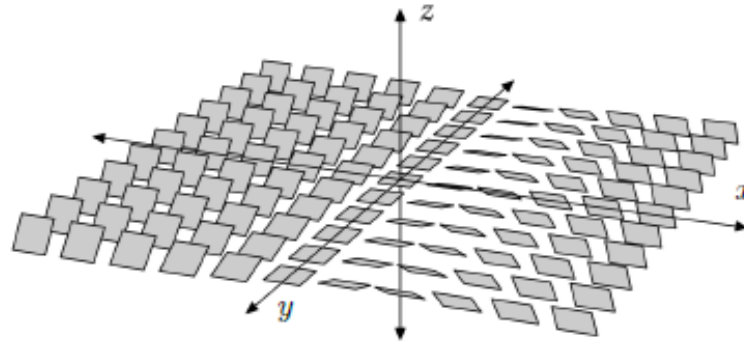


Figura 3.3: Estructura de contacto. Obtenida de [2]

Ejemplo 12. Sea $M = \mathbb{R}^{2n+1}$ con coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$. Tomemos entonces:

$$\alpha = dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$$

Esto se conoce como la estructura de contacto estándar en \mathbb{R}^{2n+1} . Notamos que $d\alpha = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. Entonces $\Sigma = \ker(\alpha)$ es una estructura de contacto. Dado que $\alpha(\frac{\partial}{\partial z}) = 1$, encontramos que $\frac{\partial}{\partial z}$ no está en Σ , por lo que este es un campo de planos nunca vertical. Para $n = 3$, la forma de contacto es $\alpha = dz + xdy$.

3.5. Curvas de contacto

Definición 23. Una curva en una variedad de contacto (M^3, Σ) es Legendriana si es tangente a Σ en todas partes. Es transversal si es transversal a Σ en todas partes.

En el caso Legendriano para \mathbb{R}^3 , los vectores tangentes deben satisfacer $dz + xdy = 0$. En otras palabras, $dz = -xdy$.

Por lo tanto, podemos recuperar la curva a partir de su proyección frontal en el plano y - z . Dado que estos planos nunca son verticales, las curvas Legendrianas cerradas deben contener cuspidos. Resulta que cada enlace en \mathbb{R}^3 es isotópico a un nudo Legendriano. Dada una curva cerrada C que delimita una región R en el plano x - y , se eleva a una curva Legendriana cerrada precisamente cuando:

$$0 = - \int_C x dy = \iint_R dx \wedge dy = \text{área firmada de } R$$

Las curvas Legendrianas pueden verse como subvariedades integrales de dimensión máxima. Dado que no podemos integrar completamente el campo de planos, lo mejor que podemos hacer es integrarlo a lo largo de una curva. Esto sirve como una buena definición de subvariedades Legendrianas en dimensiones superiores: en presencia de una estructura de contacto, son subvariedades integrales de dimensión máxima.

Definición 24. Decimos que dos enlaces Legendrianos son isotópicos Legendrianos (respectivamente transversales) si son isotópicos a través de enlaces Legendrianos (resp. transversales).

Los enlaces Legendrianos están completamente determinados por sus direcciones frontales, módulo los movimientos Reidemeister Legendrianos en el plano. Estos son exactamente análogos a los movimientos Reidemeister en la teoría de nudos clásica.

Ejemplo 13. Sea $M = \mathbb{R}^3$ y $\Sigma_0 = \ker(\alpha_0)$, donde $\alpha_0 = dz + \frac{1}{2}r^2 d\theta$. En coordenadas rectangulares, esto es $dz + \frac{xdy - ydx}{2}$. Esta es una estructura de contacto positiva porque $d\alpha_0 = dx \wedge dy$. Esto produce una estructura de contacto simétrica cilíndricamente.

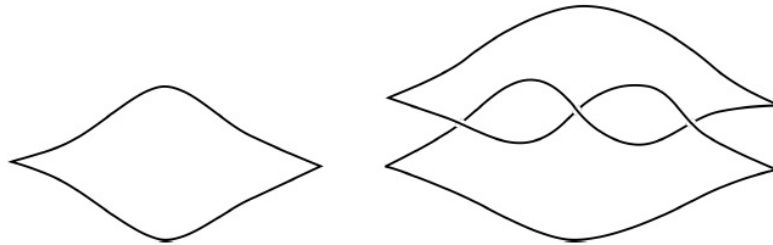


Figura 3.4: Nudos Legendrianos en el plano $y - z$.

Conclusiones

La topología de contacto es una rama rica y profundamente interconectada con diversas áreas de las matemáticas, tales como la teoría de la foliación, la geometría simpléctica, y la teoría de nudos. A través del estudio de las estructuras de contacto en 3-variedades, hemos logrado una comprensión más profunda de cómo estas estructuras no solo revelan propiedades intrínsecas de las propias variedades, sino también cómo interactúan de manera sutil y compleja con otros objetos matemáticos, como las foliaciones, los campos vectoriales y las estructuras simplécticas. Estas interacciones no solo aportan nuevas perspectivas sobre la topología y la geometría, sino que también nos permiten abordar problemas clásicos desde un enfoque renovado y más unificado.

El análisis de la topología de contacto ha demostrado ser una herramienta poderosa para clasificar y distinguir las 3-variedades. En particular, la teoría de las estructuras de contacto ha proporcionado soluciones a problemas topológicos de larga data y ha facilitado nuevas conexiones con áreas emergentes, como la topología de bajas dimensiones y la teoría de gauge. Además, la aplicabilidad de las estructuras de contacto trasciende las fronteras puramente matemáticas, encontrando aplicaciones significativas en la física teórica. En la mecánica clásica, por ejemplo, las estructuras de contacto son fundamentales para la formulación de sistemas dinámicos no integrables, mientras que en la mecánica cuántica emergen en la descripción de sistemas cuánticos bajo condiciones de confinamiento.

A medida que la investigación avanza, la topología de contacto continúa siendo un área vibrante y activa, con un sinnúmero de preguntas abiertas y desafíos que invitan a la exploración. Los recientes desarrollos, como la teoría de la cirugía de contacto y la clasificación de estructuras sobregiradas, no solo han ampliado nuestra comprensión de las 3-variedades, sino que también han generado nuevas herramientas y técnicas aplicables en dimensiones superiores. Estos avances no solo prometen profundizar nuestra comprensión matemática, sino que también tienen el potencial de influir en futuras investigaciones en física, especialmente en áreas como la termodinámica de contacto y la teoría de sistemas hamiltonianos.

En conclusión, la topología de contacto no solo sigue siendo relevante, sino que es esencial para el avance continuo tanto de la topología como de la física. Su capacidad para conectar diversas áreas del conocimiento, resolver problemas complejos y abrir nuevas líneas de investigación asegura su lugar como un pilar fundamental en el estudio de las estructuras geométricas y topológicas en los años venideros.

Referencias Bibliográficas

- [1] Hansjörg Geiges. “An Introduction to Contact Topology”. En: Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.
- [2] Robert Gompf. “4-Manifolds and Kirby Calculus”. En: American Mathematical Society., 2006.
- [3] Andrew Ranicki. “High-dimensional Knot Theory”. En: Springer Monographs in Mathematics, 2009.
- [4] Laura Starkston. “Contact Structures and Classifications of Legendrian and Transverse Knots”. En: Harvard University, 2016.