

Universidad de El Salvador

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

ESCUELA DE FÍSICA



Trabajo de graduacion

Simulación numérica de la dinámica
inflacionaria

Presentado por

GABRIEL SEBASTIÁN FLORES VENTURA

Asesor:


DR. RAÚL ANTONIO HENRIQUEZ ORTIZ

Para optar al grado de
Licenciatura en Física

MARZO 2026

San Salvador, El Salvador, Centro América

Autor



Br. Gabriel Sebastián Flores Ventura

Asesor



Dr. Raúl Antonio Henríquez Ortiz

Tribunal calificador



Lic. Francisco Américo Mejía



Dr. Raúl Antonio Henríquez Ortiz



Lic. Franklin Moisés Mejía

Autoridades universitarias

Rector:

M.Sc. JUÁN ROSA QUINTANILLA QUINTANILLA

Vicerrectora académica:

DRA. EVELYN BEATRIZ FARFÁN MATA

Vicerrector administrativo

MSc. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

Secretario general

LIC. PEDRO ROSALÍO ESCOBAR CASTANEDA

Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Decano:

MSc. ANGELA GUDÉLIA PORTILLO DE PÉREZ

Vice Decano

DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES

Director de escuela

DR. NELSON EDILTRUDYS GOMEZ CEDILLOS

San Salvador, El Salvador, Centro América

Resumen

En este trabajo se realizó una simulación numérica del espectro de potencias primordial escalar en el marco del modelo inflacionario de Starobinski. A partir de la resolución de las ecuaciones de la dinámica de fondo y de la ecuación de Mukhanov-Sasaki, se estudió la evolución del campo inflatón, el número de e-folds, los parámetros de slow-roll y el comportamiento de los modos de perturbación desde el régimen sub-Hubble hasta su congelamiento en escalas super-Hubble.

Se implementó un esquema numérico completo que permite ajustar las condiciones iniciales del potencial para reproducir los valores observacionales del CMB, particularmente la amplitud del espectro A_s y el índice espectral n_s . La simulación mostró que el modelo de Starobinski produce alrededor de 70 e-folds de inflación y predice valores compatibles con las observaciones actuales: un índice espectral $n_s \approx 0.96$.

El análisis del espectro escalar obtenido reveló que los modos evolucionan como predice la teoría: oscilan en el régimen sub-Hubble, experimentan un cambio de fase al cruzar el horizonte y se congelan en valores constantes en el régimen super-Hubble. Asimismo, se compararon los resultados de la aproximación slow-roll con los obtenidos mediante Mukhanov-Sasaki, encontrándose diferencias del orden del 10–20% asociadas a efectos numéricos y a la ruptura del régimen slow-roll cerca del final de la inflación.

Este estudio confirmó la capacidad del modelo de Starobinski para reproducir de manera robusta el espectro primordial observado y valida la implementación numérica desarrollada para el análisis de perturbaciones cosmológicas.

Dedicación y reconocimiento

A Dios, mi refugio y mi fuerza. Gracias por sostenerme cuando las fuerzas fallaban, por iluminar mi mente en la oscuridad y por recordarme, siempre, que no estaba solo. Sin tu mano guiándome, este camino habría sido imposible.

A mis padres, mis verdaderos héroes sin capa. Gracias por cada noche en vela, cada palabra de ánimo cuando yo ya no podía más, por creer en mí incluso cuando yo dejaba de hacerlo. Este logro no es mío, es de ustedes. Todo lo que soy y todo lo que sueño ser, les debo a ustedes.

A mi asesor, por no soltarme la mano en la tormenta, por esa paciencia que parecía no tener límites y por enseñarme más que teoría: por enseñarme a perseverar. Nunca olvidaré cada corrección hecha con cariño, cada "tú puedes" en el momento justo.

Gracias con el alma. Porque esto no es solo una tesis, es un pedazo de mi vida y de todos ustedes en ella.

Lista de tablas

| Table | Page |
|---|------|
| 2.1 Condiciones iniciales propuestas en el artículo [1]. | 24 |
| 3.1 Condiciones iniciales usadas en el potencial de Starobinski. Estas condiciones inicales son importantes para los calculos de la dinámica de fondo, la cual será la base para los cálculos de Mukhanov Sasaki, ambos calculos deben ser congruentes en cuanto a condiciones iniciales. | 30 |

Lista de figuras

| Figuras | Página |
|--|--------|
| 2.1 Flujo de trabajo completo para la simulación numérica de inflación con campo escalar (Código en la sección 5.1.1). El proceso inicia con la definición del potencial inflacionario $V(\phi) = V_0 f(\phi)$ y su transformación a variables adimensionales. Tras establecer condiciones iniciales (x_i, V_0) , se resuelve la dinámica de fondo y se verifica iterativamente que se cumplan las condiciones $N_T \geq 70$ (suficiente inflación) y $A_s = 2.1 \times 10^{-9}$ (amplitud escalar medida). Finalmente, se identifican escalas comóviles k , se resuelven las ecuaciones de perturbaciones de Mukhanov-Sasaki y se calculan los espectros de potencia $P_s(k)$, n_s y r | 26 |
| 2.2 Procedimiento para el cálculo de perturbaciones escalares mediante la ecuación de Mukhanov-Sasaki (Código descrito en la sección 5.1.3). Partiendo de la solución de fondo previamente calculada, para cada escala comóvil k se determina el tiempo de salida del horizonte N_* donde $k = aH$. Se imponen condiciones iniciales de vacío de Bunch-Davies cuando $k \geq 100aH$, se integra numéricamente la ecuación de Mukhanov-Sasaki hasta que los modos se vuelven super-Hubble y se congelan, y finalmente se calcula el espectro de potencia escalar $P_s(k)$. El proceso se repite para todas las escalas de interés. | 29 |
| 3.1 El potencial de Starobinski es una modificación a la relatividad general usada para explicar la inflación cosmológica. Fue el primer modelo en describir el comportamiento del Universo al pasar por un periodo rápido de expansión exponencial [2]. Tanto el eje de potencial como el de campo escalar son adimensionales y están normalizados con respecto a la masa de Planck reducida. | 31 |

| | | |
|-----|---|----|
| 3.2 | Condiciones de inflación para el potencial de Starobinski: La evolución del campo inflatón, muestra una inflación que se sostiene por al menos 70 e-folds, hasta caer en una etapa de recalentamiento (oscilación). La gráfica del parámetro de inflación ϵ_H , muestra que la inflación es estable hasta los últimos 5 e-folds, que es cuando se ve un cambio brusco en el parámetro de inflación, lo que podría afectar los resultados de la aproximación Slow-roll en esta etapa. En la gráfica de crecimiento e-folds se presencia el fin de la inflación al observar como la razón de cambio converge a un valor constante (la curva se aplanan) alrededor de los 650 segundos. | 32 |
| 3.3 | Espectro potencial escalar bajo la aproximación slow-roll, normalizado en $N_e = 60$ (escala de pivote). Para garantizar que los resultados representen los valores medidos por el satélite Planck, el espectro escalar potencial calculado mediante slow-roll se normaliza utilizando los datos de la amplitud del CMB en la escala de pivote. . . . | 33 |
| 3.4 | Espectro potencial escalar calculado con Mukhanov-Sasaki para valores de $N_k = [30, 60]$. En este espectro se aprecian dos fases importantes para las transiciones de los modos a medida que salen del horizonte. En la fase de salida, la longitud de onda se hace comparable a la del horizonte, k^2 deja de dominar en la ecuación de Mukhanov-Sasaki y empieza actuar la expansión (valle en la gráfica) y en la segunda fase los modos dejan de oscilar para empezar a crecer o amortiguarse, por la expansión del espacio los modos se congelan. | 34 |
| 3.5 | Comparación de espectros escalares: En amarillo, la curva calculada con la aproximación Slow-roll y en violeta el cálculo numérico de Mukhanov-Sasaki. Los comportamientos de ambas gráficas son uniformes a excepción de dos puntos en los cálculos de Mukhanov-Sasaki, los valores de el cálculo de Slow-roll, subestiman los valores de potencial para el espectro escalar, debido a que no toman en cuenta las perturbaciones cuánticas del sistema. | 35 |
| 3.6 | Diferencia relativa entre Mukhanov-Sasaki y Slow-roll: La diferencia entre ambos cálculos oscila entre 10% – 20%, existen dos puntos que difieren del comportamiento normal de los demás, esto puede deberse a errores numéricos ocasionados por la poca pendiente que se observa en las derivadas del potencial para estos puntos, lo que puede sobrestimar los valores para dado punto en la ecuación de Mukhanov-Sasaki. Estas diferencias evidencian la necesidad de usar Mukhanov-Sasaki por sobre slow-roll, si se quiere un espectro de potencial primordial más preciso. | 36 |

Indice

| | |
|---|------------|
| Resumen | ii |
| Dedicación y reconocimiento | iii |
| Declaración del autor | iv |
| Lista de tablas | v |
| Lista de figuras | vi |
| | |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 Universo en expansión | 2 |
| 1.1.1 Ley de Hubble-Lemaitre | 2 |
| 1.1.2 Factor de escala y el parámetro de Hubble | 3 |
| 1.1.3 Principio Cosmológico | 4 |
| 1.2 Dinámica del Universo | 4 |
| 1.2.1 Ecuación de campo de Einstein | 5 |
| 1.2.2 Ecuación de Friedmann | 6 |
| 1.2.3 Ecuación de continuidad | 6 |
| 1.2.4 Ecuación de estado | 7 |
| 1.2.5 Ecuación de aceleración | 7 |
| 1.2.6 Geometría cósmica | 8 |
| 1.2.7 El horizonte de partículas y el radio de Hubble | 9 |
| 1.3 Las deficiencias de la teoría estándar del Big Bang | 11 |
| 1.3.1 El problema del Universo plano | 11 |
| 1.3.2 El problema de la Entropía | 11 |
| 1.3.3 El problema del horizonte | 12 |
| 1.4 Inflación y perturbaciones cósmicas | 16 |
| 1.4.1 Desarrollo de la teoría de inflación | 17 |
| 1.4.2 Aproximación de slow-roll | 19 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2 | Metodología | 23 |
| 2.1 | Ecuaciones de movimiento sin perturbaciones | 23 |
| 2.2 | Ecuaciones de movimiento con perturbaciones | 27 |
| 3 | Resultados y discusión | 30 |
| 3.1 | Potencial de Starobinski | 30 |
| 3.1.1 | Condiciones de inflación | 32 |
| 3.1.2 | Espectros escalares | 33 |
| 3.1.3 | Diferencias entre slow-roll y Mukhanov-sasaki | 36 |
| 4 | Conclusión | 38 |
| 5 | Anexos | 39 |
| 5.1 | Códigos Utilizados | 39 |
| 5.1.1 | Dinámica de Fondo | 39 |
| 5.1.2 | Método de Bisección | 40 |
| 5.1.3 | Método de Mukhanov-Sasaki | 42 |
| 5.2 | Derivación de la ecuación de movimiento del inflatón para la aproximación Slow-roll | 44 |
| 5.2.1 | Acción para un campo escalar en espacio-tiempo curvo | 44 |
| 5.2.2 | Métrica FLRW y simplificación | 45 |
| 5.2.3 | Ecuación de Euler-Lagrange en espacio curvo | 45 |
| 5.2.4 | Identificación de H y término de disipación | 45 |
| 5.2.5 | Ecuación de Friedmann | 46 |
| | Bibliografía | 47 |

Capítulo 1

Introducción

La cosmología estudia el origen, la historia y la evolución del universo. En el siglo XIX, el astrónomo alemán Heinrich Olbers planteó una objeción conocida como la paradoja de Olbers: *Si las estrellas del cielo nocturno son tan brillantes como el Sol y, además, se distribuyen de forma prácticamente uniforme por todo el Universo, el cielo debería aparecer tanto o más brillante que si fuera de día* [3]. Aunque esta paradoja parece simple, da origen a ideas relacionadas con la dinámica del Universo.

Efectivamente, en la noche el cielo no es tan brillante como de día, a pesar del brillo de las demás estrellas. Esto se explica porque el brillo aparente de una estrella disminuye inversamente con el cuadrado de su distancia. Por otra parte, si las estrellas se distribuyen uniformemente, su número aumenta proporcionalmente al cubo de la distancia. En teoría, esto compensaría la pérdida de brillo individual, por lo que la luz total recibida debería ser significativa.

La solución a esta paradoja radica en la expansión del universo. Un Universo en expansión implica que en el pasado estuvo más contraído y, por tanto, tuvo un principio. Dado que ha transcurrido un tiempo limitado desde ese origen, solo podemos observar la luz de las estrellas cercanas; la luz de las estrellas más lejanas aún no ha tenido tiempo de llegar a la Tierra. Además, la expansión produce un corrimiento al rojo (debido al efecto Doppler), por el cual la longitud de onda de la luz de objetos que se alejan se alarga. En el caso de estrellas muy distantes, su luz se desplaza hacia el infrarrojo, fuera del rango visible para el ojo humano, contribuyendo así a la oscuridad del cielo nocturno.

Cabe destacar que la expansión no afecta a sistemas ligados gravitacionalmente, como el sistema solar o nuestra galaxia. La Tierra no se aleja del Sol, ni las estrellas de la Vía Láctea se

separan entre sí, porque la fuerza gravitatoria los mantiene unidos. La expansión se manifiesta a escalas mayores, aumentando progresivamente las distancias entre galaxias y cúmulos galácticos.

La ley que describe esta expansión es la ley de Hubble-Lemaître, la cual establece que la velocidad de recesión de una galaxia con respecto a la Tierra es proporcional a su distancia [3, 4].

En este contexto, entender la expansión del Universo no solo permite explicar fenómenos observacionales como el cielo nocturno oscuro o el corrimiento al rojo, sino también abordar interrogantes fundamentales sobre el origen y evolución del cosmos. La teoría del Big Bang, respaldada por dicha ley, proporciona un marco coherente, pero aún presenta limitaciones significativas, como los problemas del horizonte, la planitud y la entropía. Estas deficiencias motivan la búsqueda de modelos más completos, que integren nuevas fases dinámicas en la historia temprana del universo. Es en esta línea que surge la teoría de la inflación cósmica, la cual, además de resolver los problemas mencionados, ofrece una explicación natural al origen de las estructuras a gran escala que observamos.

1.1 Universo en expansión

1.1.1 Ley de Hubble-Lemaître

Se dice que Edwin Hubble dio nacimiento a la cosmología moderna en 1929, con la observación de que las galaxias lejanas se alejan de nosotros con una velocidad proporcional a su distancia [4]. La constante de proporcionalidad es llamada constante de Hubble¹.

$$v = H_0 r \tag{1.1}$$

Esta relación se denomina ley de Hubble-Lemaître. Fue derivada teóricamente por Friedmann e, independientemente, por Lemaître, pero fueron las observaciones de Hubble las que proporcionaron sentido y confirmación a la ecuación. Esta ley consolidó la noción de un Universo en expansión.

Para entenderla de manera más intuitiva, se utiliza una metáfora en la que se visualiza el Universo como un globo: al marcar puntos en su superficie y comenzar a inflarlo, se observa que estas marcas se alejan unas de otras, y lo hacen a una velocidad mayor cuanto más distantes se encuentran entre sí [3].

La universalidad de la ley de Hubble-Lemaître demuestra que la expansión del universo es uniforme. Esto implica que, al retroceder en el tiempo, existió un momento finito en el

¹ $H_0 = 100h \frac{km}{s \cdot Mpc}$

cual toda la materia y la energía del cosmos estaban concentradas en un estado de densidad y temperatura extremas. A partir de este estado, el universo comenzó a expandirse desde todos los puntos del espacio simultáneamente. El carácter uniforme de esta ley indica que no se produjeron múltiples *explosiones* en distintos puntos espacio-temporales, sino un único evento inicial que dio origen al universo. En esencia, esta es la idea fundamental de la teoría del Big Bang.

Una edad finita del universo implica que existe una distancia máxima que la luz (o cualquier señal) puede haber recorrido, ya que nada puede superar la velocidad de la luz. Utilizando este principio, la ley de Hubble-Lemaître sugiere que existe un horizonte observable y que la distancia correspondiente se puede expresar como:

$$D_H \approx \frac{c}{H_0} \quad (1.2)$$

Las señales procedentes de regiones más distantes que D_H no pueden alcanzarnos, ya que el tiempo que necesitarían para ello superaría la edad del universo. Por tanto, D_H representa el radio del horizonte cosmológico, que define la máxima escala de correlación causal. Este horizonte puede describirse como la frontera que delimita la región del universo causalmente conectada con un observador en un tiempo dado [4]. Al estar definido con respecto a un observador específico, diferentes observadores en el universo tendrán horizontes localizados en posiciones distintas. Además, el horizonte cosmológico crece con el tiempo, ya que su radio se expande aproximadamente a la velocidad de la luz:

$$D_H(t) \approx ct \quad (1.3)$$

Al comparar las ecuaciones 1.1 y 1.2 se observa que:

$$H_0 \approx \frac{1}{t_0} \quad (1.4)$$

donde t_0 es la edad del universo. Es importante señalar que existe más universo más allá de nuestro horizonte cosmológico, de manera análoga a como hay más superficie terrestre más allá del horizonte geográfico. Sin embargo, aquellas regiones que se encuentran más allá del horizonte son, por definición, inobservables para nosotros. Por lo tanto, nuestro horizonte cosmológico delimita nuestro universo observable.

1.1.2 Factor de escala y el parámetro de Hubble

La expansión del universo es uniforme a grandes escalas, tal como lo establece la universalidad de la ley de Hubble-Lemaître. Dado que esta expansión preserva la homogeneidad a gran escala, su geometría puede parametrizarse mediante un único factor, $a(t)$, que depende únicamente del tiempo cósmico. Este factor se denomina factor de escala y describe cuantitativamente cómo se expande el universo. Para estudiar esta expansión de manera natural, se define un sistema de

coordenadas comóviles, que se expanden junto con el universo, de modo que la posición comóvil de un objeto (como una galaxia) permanece constante si no tiene movimiento propio.

$$r(t) = a(t)x \quad (1.5)$$

Si se toma la derivada temporal del vector de posición en coordenadas comóviles, se obtiene:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{x} + a\frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\vec{r} + \vec{v}_{pec} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}H + \vec{v}_{pec} \quad (1.6)$$

donde $\vec{v}_{pec} = a\dot{\vec{x}}$ es la velocidad peculiar, debida al movimiento propio de los objetos (por ejemplo, de una galaxia moviéndose dentro de su cúmulo), y \vec{v}_H es la velocidad de flujo de Hubble, producida exclusivamente por la expansión cósmica. De esta relación se deduce [4]:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.7)$$

Esta cantidad se denomina parámetro de Hubble y se define como la tasa de expansión fraccional del factor de escala. En otras palabras, mientras el factor de escala $a(t)$ describe el *estiramiento* del Universo, el parámetro de Hubble $H(t)$ cuantifica su ritmo de expansión. Cabe destacar que el factor de escala es adimensional.

1.1.3 Principio Cosmológico

La ley de Hubble-Lemaître implica que el universo se encuentra en expansión uniforme, lo cual sugiere a su vez que su contenido se distribuye de manera homogénea a grandes escalas. Una prueba observacional de esto es que la distribución de cúmulos y supercúmulos galácticos se vuelve uniforme a escalas superiores a aproximadamente 100 Mpc [4], lo cual representa un pequeño porcentaje del universo observable. Esto se formaliza en el principio cosmológico, el cual postula que, a escalas suficientemente grandes, el universo es homogéneo e isotrópico. La homogeneidad significa que el universo tiene el mismo aspecto desde cualquier punto del espacio, mientras que la isotropía significa que se observa igual en todas las direcciones espaciales.

Como evidencia de la isotropía del universo se tiene la temperatura de la radiación del fondo cósmico de microondas (CMB, por sus siglas en inglés). Las anisotropías intrínsecas en su temperatura son menores a una parte en 10^5 [5]. De acuerdo con este principio, el universo es invariante ante traslaciones y rotaciones. En consecuencia, no existen puntos, centros, bordes o ejes de rotación privilegiados en el cosmos. Por lo tanto, se puede estudiar una región representativa del universo sin perder generalidad [4, 6].

1.2 Dinámica del Universo

Conociendo el comportamiento a gran escala del universo, es momento de describirlo matemáticamente, teniendo en cuenta su expansión, homogeneidad e isotropía. Para describir sus propiedades

geométricas en el espacio que abarca, debemos emplear el elemento de línea. En términos simples, un elemento de línea es una fórmula general que permite tomar un segmento infinitesimal, definir desplazamientos infinitesimales en cada coordenada y utilizar estos desplazamientos para calcular la longitud ds [7]. Con el elemento de línea se puede definir cualquier curva en el espacio que se desee representar. Esta herramienta permite obtener las propiedades geométricas necesarias, pero primero debemos representar el espacio de manera fiel a nuestro universo para que el elemento de línea sea útil. La métrica es la representación matemática del espacio en cuestión; conocer la métrica de un espacio es equivalente a conocer su elemento de línea [7].

La métrica que mejor describe nuestro universo, compatible con su expansión, isotropía y homogeneidad, es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (1.8)$$

Donde (t, r, θ, ϕ) son coordenadas comóviles, $a(t)$ es el factor cósmico de escala y k puede ser $+1, -1$, ó 0 , lo que corresponde a espacios con curvatura espacial constante positiva, negativa o nula, respectivamente. La coordenada r es adimensional, $a(t)$ tiene dimensiones de longitud y solo los radios relativos son físicos. Para $k = 1$ r varía de 0 a 1 . La coordenada de tiempo es el tiempo propio medido por un observador en reposo en el marco comóvil, es decir, uno para el cual $(r, \theta, \phi) = \text{constante}$.

1.2.1 Ecuación de campo de Einstein

Al realizar su estudio de la relatividad general, Einstein desarrolló una ecuación de campo que establece que la geometría del espacio-tiempo (lado izquierdo) está determinada por la distribución de materia y energía (lado derecho). En esencia, *la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse, y el espacio-tiempo curvado le dice a la materia cómo moverse* [8]. La ecuación de campo de la relatividad de Einstein es:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

y en su forma más compacta:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

Lado izquierdo (geometría):

- $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, que describe la curvatura del espacio-tiempo. Se construye a partir del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de curvatura R , los cuales miden cómo se desvían las geodésicas (trayectorias de partículas libres) en un espacio curvo.
- $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, que define la distancia y el intervalo espacio-temporal.

- Λ es la constante cosmológica, asociada a la energía del vacío y responsable de la expansión acelerada del universo.

Lado derecho (fuente):

- $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, que describe la densidad y flujo de masa, energía y momento en el universo.
- $\frac{8\pi G}{c^4}$ es una constante de proporcionalidad que asegura que, en el límite de campos débiles y bajas velocidades, se recupera la ley de gravitación de Newton (G es la constante gravitacional y c la velocidad de la luz).

1.2.2 Ecuación de Friedmann

Friedmann fue el primero en estudiar la dinámica global del universo utilizando la teoría de la relatividad general de Einstein. Modeló el contenido del universo como un fluido perfecto con una densidad de energía $\rho(t)$ y una presión $p(t)$ [4–6], las cuales, al igual que el factor de escala, son funciones únicamente del tiempo cósmico. Así, la componente temporal de las ecuaciones de campo de Einstein conduce a la primera ecuación de Friedmann:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.11)$$

Donde k es el parámetro de curvatura. Esta ecuación es fundamental porque demuestra que el universo no puede ser estático cuando $\rho \neq 0$. Al igual que la Relatividad general, la ecuación de Friedmann revela que la dinámica del universo está determinada por un balance entre su contenido material (dado por ρ) y su geometría (dada por el término de curvatura), siendo la tasa de expansión H la expresión de ese equilibrio.

1.2.3 Ecuación de continuidad

La primera ecuación de Friedmann no es suficiente por sí sola para determinar completamente la evolución del universo, ya que vincula dos funciones desconocidas: $a(t)$ y $\rho(t)$. Se sabe que la densidad es la masa contenida en un determinado volumen espacial. Este volumen es tridimensional y se expande con el factor de escala, de modo que $V \propto a^3$. Lo que resulta evidente si pensamos en este volumen como el de una esfera de radio r donde $r \propto a$ derivando $V \propto a^3$ con respecto al tiempo tenemos $\dot{V}/V = 3\dot{r}/r = 3\dot{a}/a = 3H$. A partir de esto, podemos expresar la variación de la densidad como:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{V}}{V} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} + 3H\rho = \rho \frac{\dot{M}}{M}.$$

Eso significa que si la masa M dentro de un volumen que crece con la expansión del universo permanece constante $\dot{M} = 0$, entonces $\dot{\rho} + 3H\rho = 0$. En este caso, la densidad disminuye (se *diluye*) únicamente debido al crecimiento del volumen comóvil. En el caso más general, donde se considera también la presión, se tiene la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (1.12)$$

La cantidad $p(t)$ se denomina presión isotrópica y representa el trabajo realizado por (o sobre) el fluido cósmico durante la expansión. Esta ecuación expresa matemáticamente la conservación local de la energía en un universo en expansión.

1.2.4 Ecuación de estado

Al buscar una segunda ecuación para determinar la dinámica del universo, aparece una tercera variable desconocida. Para que el sistema de ecuaciones quede cerrado, se considera que el universo está compuesto por un conjunto de fluidos barotrópicos², cada uno con una ecuación de estado de la forma $p_i = p_i(\rho_i)$. Esto significa que, para cada componente, la presión está unívocamente determinada por su densidad. Si se modela cada componente como un fluido perfecto, su ecuación de estado es lineal:

$$p_i = w_i \epsilon_i = w_i \rho_i c^2$$

Donde w_i es el parámetro barotrópico y $\epsilon_i = \rho_i c^2$ es la densidad de energía del i -ésimo fluido. Por lo tanto, el parámetro barotrópico efectivo para el conjunto de fluidos viene dado por [4]:

$$w = \frac{\sum_i p_i}{(\sum_i \rho_i) c^2}$$

La ecuación de continuidad para un fluido dado puede escribirse entonces como $\dot{\rho}_i + 3(1 + w_i)H\rho_i = 0$. Integrando esta ecuación, se encuentra que $\rho_i \propto a^{-3(1+w_i)}$. Suponiendo que w_i es constante para cada componente, la evolución de la densidad total del universo sigue la relación:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (1.13)$$

1.2.5 Ecuación de aceleración

Al combinar la primera ecuación de Friedmann (ecuación de velocidad) con la ecuación de continuidad, se obtiene la ecuación de aceleración [4]:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right). \quad (1.14)$$

Esta ecuación, junto con la primera, recibe a menudo el nombre conjunto de ecuaciones de Friedmann. A partir de la ecuación (1.14) se determina que la expansión del universo puede ser acelerada ($\ddot{a} > 0$) solo si $w < -\frac{1}{3}$, teniendo en cuenta que $a > 0$.

²Que un fluido sea barotrópico quiere decir que la presión del mismo es proporcional a la densidad e independiente de la temperatura, porque las líneas de presión constante (isobara) coinciden con las de densidad constante (isopícnica)

1.2.6 Geometría cósmica

Considérese una distribución uniforme de materia con densidad ρ . Si se coloca una partícula de prueba de masa m sobre la superficie de una esfera de radio a y se deja actuar la gravedad, la energía total se conserva, por lo que [5]:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 - G\frac{mM}{a} = \text{constante.} \quad (1.15)$$

Dado que la masa M contenida dentro de la esfera de radio a es $M = (4\pi\rho a^3/3)$, se obtiene:

$$\frac{1}{2}m\dot{a}^2 - G\frac{4\pi\rho a^2}{3} = \text{constante.} \quad (1.16)$$

Dividiendo todo por $ma^2/2$ se llega a una forma equivalente a la ecuación de aceleración cosmológica. Asignando $\text{constante} = 2c/m$ puede obtenerse también la primera ecuación de Friedmann. Este desarrollo muestra que, en este contexto simplificado, las ecuaciones de la cosmología pueden deducirse análogamente a partir de las leyes de Newton para la gravitación y el movimiento [5].

La tasa de expansión del universo está determinada por el parámetro de Hubble H , el cual no es constante y generalmente escala como t^{-1} . La primera ecuación de Friedmann puede reescribirse como:

$$\Omega - 1 = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} = \frac{k}{a^2H^2} \quad (1.17)$$

donde se define el parámetro de densidad Ω como el cociente entre la densidad de energía ρ y la energía crítica ρ_c

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.18)$$

Dado que $a^2H^2 > 0$, existe una correspondencia entre el signo de del parámetro de curvatura k y el signo de $(\Omega - 1)$

$$k = +1 \Rightarrow \Omega > 1 \quad (\text{universo cerrado}) \quad k = 0 \quad \Rightarrow \Omega = 1 \quad (\text{universo plano}) \quad (1.19)$$

$$k = -1 \Rightarrow \Omega < 1 \quad (\text{universo abierto}). \quad (1.20)$$

La ecuación 1.17 es válida en cualquier momento. Nótese que Ω y ρ_c no son constantes en el tiempo; ambas evolucionan con la expansión. En los primeros instantes del universo, durante la época dominada por la radiación (RD), se tenía $H^2 \approx a^{-4}$ con $\Omega - 1 \sim a^2$. Durante la época dominada por la materia (MD), $H^2 \sim a^{-3}$, lo que implica $\Omega - 1 \approx a$. Estas relaciones serán cruciales al estudiar el universo inflacionario.

De la métrica FLRW se deduce claramente que el efecto de la curvatura se vuelve importante solo a escalas comóviles del orden de $r \sim |k|^{-1/2}$. Se define entonces el radio físico de curvatura

del universo como $R_{curv} = a(t)|k|^{-1/2} = (6/|{}^3R|)^{1/2}$, que está relacionado al radio de Hubble H^{-1} por:

$$R_{curv} = \frac{H^{-1}}{|\Omega - 1|^{1/2}} \quad (1.21)$$

Cuando $|\Omega - 1| \ll 1$, el radio de curvatura resulta ser mucho mayor que el radio de Hubble, por lo que podemos despreciar los efectos de la curvatura a escalas del horizonte. Nótese también que para universos cerrados ($k = +1$) el radio de la curvatura coincide con el radio de la trí-esfera espacial.

1.2.7 El horizonte de partículas y el radio de Hubble

Una pregunta fundamental en cosmología que siempre surgirá es: ¿qué fracción del universo está en contacto causal? De manera más precisa, para un observador comovible con coordenadas (r_0, θ_0, ϕ_0) ¿para cuáles valores de (r, θ, ϕ) una luz emitida en tiempo 0 alcanzará al observador en, o después, en un tiempo t ? Esto puede ser calculado directamente en términos de la métrica FLRW. Una señal de luz satisface la ecuación de la geodésica $ds^2 = 0$. Dada la homogeneidad del espacio, sin ninguna pérdida de generalidad, podríamos elegir $r_0 = 0$. Las geodésicas que pasan a través de $r = 0$ son líneas de θ y ϕ constantes; justo como dos grandes círculos pasando por los polos de una bi-ésfera, son líneas de θ constante (longitud constante) por lo que $d\theta = d\phi = 0$. Por supuesto, la isotropía del espacio hace que la elección de la dirección (θ_0, ϕ_0) sea irrelevante. Por lo que, una señal de luz emitida desde una posición (r_H, θ_0, ϕ_0) en el tiempo $t = 0$ alcanzará $r_0 = 0$ en un tiempo t determinado por

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (1.22)$$

La distancia propia del horizonte medida en este tiempo es

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = a(t) \int_0^a \frac{da'}{a'} \frac{1}{a'H(a')} = a(t) \int_0^{r_H} \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (1.23)$$

Si $R_H(t)$ es finito, esto define un límite entre el universo visible y la parte del Universo de la cual las señales de luz no nos han alcanzado. El comportamiento de $a(t)$ cerca de la singularidad determinará si el horizonte de partículas es finito o no. En la cosmología estándar $R_H(t) \sim t$, significa que el horizonte es finito. El horizonte de partículas no debe confundirse con la noción del radio de Hubble.

$$\frac{1}{H} = \frac{a}{\dot{a}} \text{ (Radio de Hubble)} \quad (1.24)$$

El radio de Hubble tiene el siguiente significado: esta es la distancia viajada por partículas en el trayecto de una expansión temporal, estrictamente el tiempo en el cual el factor de escala se duplica (pensando en la distancia como $dt \sim \frac{da}{a} H^{-1}$). Por lo que el radio de Hubble es una manera distinta de medir si las partículas están casualmente conectadas con otras o no. Si

están separadas por distancias mayores que el radio de Hubble, no se pueden comunicar en ese instante. Nos centramos en el hecho de que el horizonte de partículas y el radio de Hubble son cantidades distintas: partículas separadas por distancias más grandes que $R_H(t)$ nunca se han comunicado entre sí; por otro lado, si están separadas por una cantidad mayor que el radio de Hubble H^{-1} , esto significa que no pueden comunicarse en el tiempo t dado.

En cosmología estándar, la distancia del horizonte es finita, y hasta factores numéricos, igual al radio de Hubble H^{-1} , pero durante la inflación, por ejemplo, estos son drásticamente distintos. Se puede definir la distancia de un horizonte de partículas comóvil como:

$$\tau_H = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da'}{H(a')a'^2} = \int_0^a \int d \ln a' \left(\frac{1}{Ha'} \right) \quad (\text{Horizonte de partículas comóvil}) \quad (1.25)$$

Donde hemos expresado el horizonte comovible como la integral logarítmica del radio de Hubble comovible $(aH)^{-1}$. El cual jugará un papel importante en el rol de la inflación reiterando que el horizonte comovible τ_H y el radio de Hubble comóvil son cantidades distintas. Partículas separadas por distancias comóviles más grandes que τ_H , nunca se han comunicado entre sí; si están separadas por distancias más grandes que $(aH)^{-1}$, no se están comunicando en un tiempo τ . Por lo que es posible que τ_H sea mucho más grande que el radio comovible de Hubble en la época actual, de modo que hoy no podría haber ninguna comunicación, pero si en época anteriores. Como veremos, esto podría pasar si el radio comovible de Hubble temprano era mucho más grande de lo que es ahora, de modo que, τ_H tuvo la mayor parte de sus contribuciones de las épocas tempranas. Veremos que esto podría pasar, pero no pasó en la época dominada por la materia (MD) o la época dominada por la radiación (RD). En estos casos, el radio comovible de Hubble incrementa con el tiempo, entonces generalmente esperamos que la contribución más grande a τ_H venga con los tiempos más recientes. Recordando que en un universo dominado por un fluido con ecuación de estado $P = w/\rho$ tenemos $n = 2/3(1 + w)$. El comovimiento del radio de Hubble va como:

$$\text{Radio de Hubble Comóvil} = \frac{1}{aH} \approx \frac{t}{t^n} = t^{1-n} \quad (1.26)$$

En particular para un universo MD $w = 0$ y $n = 2/3$, mientras que para un universo RD $w = 1/3$ y $n = 1/2$. En ambos casos, el crecimiento del radio de Hubble incrementa con el tiempo. En la cosmología estándar, el horizonte de partículas es finito, y debido a factores numéricos, igual al radio de Hubble H^{-1} . Por esta razón se pueden usar varias palabras para referirse a lo mismo en cosmología estándar. En los modelos inflacionarios, el horizonte de Hubble y el radio de Hubble son drásticamente distintos a medida que la distancia del horizonte crece exponencialmente relativo al radio de Hubble; de hecho, al final de la inflación difieren por un factor e^N , donde N es el número de e-folds en la inflación. El horizonte define la escala de distancias para los cuales dos puntos separados por una distancia mayor que $R_H(t)$ nunca se comunicarían, mientras que el radio de Hubble define la escala a la cual estos dos puntos no se podrían comunicar en el tiempo t .

1.3 Las deficiencias de la teoría estándar del Big Bang

1.3.1 El problema del Universo plano

Haciendo una enorme extrapolación y suponiendo que las ecuaciones de Einstein son válidas hasta la era de Planck cuando la temperatura $T_{pl} \approx 10^{19}$ GeV. De la ecuación para la curvatura, obtenemos:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (1.27)$$

Esto sucede en el caso de que el universo sea perfectamente plano, es decir, $\Omega = 1$ en todo momento. Por otro lado, si existiese un pequeño término de curvatura, la dependencia temporal de $(\Omega - 1)$ es distinta.

Durante el periodo de RD, se tiene $H^2 \propto \rho_{RD} \propto a^{-4}$ y

$$\Omega - 1 \propto \frac{1}{a^2 a^{-4}} \propto a^2 \quad (1.28)$$

Durante MD, $\rho_{RD} \propto a^{-3}$ y:

$$\Omega - 1 \propto \frac{1}{a^2 a^{-3}} \propto a \quad (1.29)$$

En ambos casos $(\Omega - 1)$ disminuye retrocediendo el tiempo. Debido a que se sabe que $(\Omega_0 - 1)$ es del orden de la unidad en el presente, se puede deducir su valor en T_{pl} (Tiempo en el cual la temperatura del universo es $T_{pl} \approx 10^{19}$ GeV)

$$\frac{|\Omega - 1|_{T=T_{pl}}}{|\Omega - 1|_{T=T_0}} \approx \left(\frac{a_{pl}^2}{a_0^2} \right) \approx \left(\frac{T_0^2}{T_{pl}^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-64}) \quad (1.30)$$

Donde el índice 0 se refiere a la época actual, $T_0 \approx 10^{-13}$ GeV es la temperatura en el presente de la radiación CMB. Retrocediendo a la época de la nucleosíntesis, cuando se formaron las abundancias de los elementos ligeros $T_N \approx 1$ MeV obtenemos:

$$\frac{|\Omega - 1|_{T=T_N}}{|\Omega - 1|_{T=T_0}} \approx \left(\frac{a_N^2}{a_0^2} \right) \approx \left(\frac{T_0^2}{T_N^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-16}) \quad (1.31)$$

Con el objetivo de obtener el valor correcto de $(\Omega - 1 \approx 1)$ en el presente, el valor de $(\Omega - 1 \approx 1)$ en los tiempos más tempranos ha tenido que ser afinado a valores demasiado cercanos a 0, pero sin ser exactamente 0. Esta es la razón por la cual el problema del universo plano es llamado *problema de ajuste fino*.

1.3.2 El problema de la Entropía

La hipótesis de una expansión adiabática del universo está conectada con el problema del universo plano. De las ecuaciones de Friedmann sabemos que durante la época RD, tomando

en cuenta la masa de Planck ³:

$$H^2 \approx \rho_r \approx \frac{T^4}{M_{Pl}^2} \quad (1.32)$$

De la cual se deduce

$$\Omega - 1 = \frac{kM_{Pl}^2}{a^2T^4} = \frac{kM_{Pl}^2}{S^{2/3}T^2} \quad (1.33)$$

Bajo la hipótesis de la expansión adiabática; la entropía S es constante a lo largo de la evolución del universo y, por lo tanto:

$$|\Omega - 1|_{t=t_{Pl}} = \frac{M_{Pl}^2}{T_{Pl}^2} \frac{1}{S_U^{2/3}} = \frac{1}{S_U^{2/3}} \approx 10^{-60} \quad (1.34)$$

Donde S_U es la entropía del universo y se hace uso del hecho de que la entropía en el presente tiene un valor de:

$$S_U = \frac{4\pi}{3} H_0^{-3} s = \frac{4\pi}{3} H_0^{-3} \frac{2\pi^2 g_*(T_0) T_0^3}{45} \approx 10^{90} \quad (1.35)$$

Lo cual nos dice que $(\Omega - 1)$ es tan cercano a cero en las eras tempranas debido a que la entropía en el universo actual es increíblemente grande. El problema del universo plano es entonces un problema sobre el entender por qué las condiciones iniciales corresponden a un universo que estaba tan cerca de la planitud espacial. Se habría esperado que el valor más natural para la entropía del universo en la temperatura Planckiana tuviera un valor cercano a la unidad, cuando el horizonte mismo era del orden de la distancia Planckiana ⁴. De otro modo, el problema es uno de ajuste fino y, aunque este balance es posible en principio, se siente casi improbable. También, este problema nace del hecho de que la entropía es conservada en un volumen comóvil. Es posible resolver este problema si la expansión cósmica fue no adiabática para un intervalo finito durante la época temprana del universo.

1.3.3 El problema del horizonte

En la cosmología estándar, los fotones se desacoplan del resto de componentes a una temperatura de 0.3 eV. Esto corresponde a la llamada *last-scattering* o última dispersión, como se le conoce en español, y se caracteriza por un corrimiento al rojo (redshift) de aproximadamente $z = 1100$ y ocurrió cuando el universo tenía una edad de alrededor de 380,000 años (un cálculo más exacto da $180,000(\Omega_0 h^2)^{-1/2}$ años después del Big Bang).

Desde la época del *last-scattering* en adelante, los fotones fluyen libremente y nos alcanzan básicamente intactos. Detectar fotones primordiales es equivalente a tomar una imagen del

³La masa de Planck es una unidad fundamental en física que representa aproximadamente 21.76 microgramos y se define como la masa que, incluida en una esfera con un radio igual a la longitud de Planck, generaría una densidad extremadamente alta (M_{Pl}).

⁴La distancia Planckiana o longitud de Planck l_{Pl} , es la distancia mínima que se puede medir con precisión en el Universo, y es aproximadamente 1.616255×10^{-35} metros

universo cuando tenía alrededor de 300,000 años. El espectro de la radiación del fondo de microondas es consistente con el de un cuerpo negro a una temperatura de 2.73 K durante más de tres décadas en longitud de onda. La longitud correspondiente a nuestro radio de Hubble actual en la época del last-scattering (t_{ls}) era:

$$\lambda_H(t_{ls}) = R_H(t_0) \left(\frac{a_{ls}}{a_0} \right) = R_H(t_0) \left(\frac{T_0}{T_{ls}} \right)$$

En cambio, durante el período de MD, el tamaño del radio de Hubble ha disminuido con una ley distinta.

$$H^2 \propto \rho_{NR} \propto a^{-3} \propto T^3$$

En el *last-scattering*

$$H_{ls}^{-1} = R_H(t_0) \left(\frac{T_{1s}}{T_0} \right)^{-3/2} \ll R_H(t_0)$$

El tamaño correspondiente a nuestro radio de Hubble actual era mucho más grande que el horizonte en ese tiempo. Esto puede ser demostrado comparando los volúmenes correspondientes a estas dos escalas:

$$\frac{\lambda_H^3(T_{ls})}{H_{ls}^{-3}} = \left(\frac{T_0}{T_{ls}} \right)^{-3/2} \approx 10^6 \quad (1.36)$$

Había 10^6 regiones casualmente desconectadas dentro del volumen que hoy corresponde a nuestro horizonte. Es muy complicado idear un proceso distinto a fase temprana, densa y caliente en la historia del universo que nos llevaría a un cuerpo negro preciso para una sopa de fotones, los cuales estaban causalmente desconectados la última vez que interactuaron con el plasma del entorno.

Hay otro aspecto del problema del horizonte que está relacionado con el problema de las condiciones iniciales para las perturbaciones cosmológicas. La diferencia de temperatura medida entre dos puntos separados por un ángulo grande ($\geq 1^\circ$) es consecuencia del llamado **efecto Sachs-Wolfe** la cual tiene lugar debido a que estos dos puntos tenían valores distintos de potencial gravitacional asociado para su superficie de *last-scattering*. La anisotropía en la temperatura es comúnmente expandida en armónicos esféricos.

$$\frac{\Delta T}{T}(x_0, \tau_0, \mathbf{n}) = \sum_{lm} a_{lm}(x_0) Y_{lm}(\mathbf{n})$$

Donde x_0 y τ_0 son las posiciones y el tiempo actual, respectivamente, \mathbf{n} es la dirección de observación, l los diferentes multipolos y:

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l \quad (1.37)$$

Donde los deltas son debidos a que el proceso que creó la anisotropía es estadísticamente isotrópico. Los C_l se llaman espectro de potencias CMB. Para la homogeneidad e isotropía, los

C_l no son funciones de x_0 , ni de m . La función correlación de doble punto está relacionada con los C_l de la siguiente manera:

$$\left\langle \frac{\delta T(\mathbf{n})}{T} \frac{\delta T(\mathbf{n}')}{T} \right\rangle = \sum_{l'mm'} Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}') = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\mu = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \quad (1.38)$$

Donde se ha usado el teorema de adición para los armónicos esféricos, y P_l es el polinomio de Legendre de orden l . El valor esperado de esta expresión es un promedio de un ensamble. Se puede considerar como un promedio sobre las posibles posiciones, pero no en general como un promedio sobre el cielo único que observamos debido a la varianza cósmica.

Ahora considerando la superficie del *last-scattering*. En las coordenadas comóviles, esta se encuentra a una distancia alejada de nosotros:

$$\int_{t_{ls}}^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_{\tau_{ls}}^{\tau_0} d\tau = \tau_0 - \tau_{ls} \quad (1.39)$$

Una escala comóvil dada λ es entonces proyectada en la superficie superior del last scattering en una escala angular:

$$\theta \approx \frac{\lambda}{\tau_0 - \tau_{ls}} \quad (1.40)$$

Dónde se han despreciado los efectos de una pequeña curvatura. Ahora considerando que la escala λ es del orden de un horizonte sonoro comóvil en el momento del *last-scattering*, $\lambda \approx c_s \tau_{ls}$, donde $c_s \approx 1/\sqrt{3}$ es la velocidad sonora a la cual los fotones se propagan en el plasma en el *last-scattering*. Esto corresponde al ángulo:

$$\theta \approx c_s \frac{\tau_{ls}}{\tau_0 - \tau_{ls}} \approx c_s \frac{\tau_{ls}}{\tau_0}, \quad (1.41)$$

Esto se ha hecho tomando en cuenta que $\tau_0 \gg \tau_{ls}$. Debido a que el universo es MD desde el tiempo de *last-scattering* en adelante, el factor de escala tiene el siguiente comportamiento: $a \approx T^{-1} \approx t^{2/3} \approx \tau^2$. El ángulo θ_{HOR} subtendido por el horizonte sonoro en la superficie del *last-scattering* entonces se vuelve:

$$\theta_{HOR} \approx c_s \left(\frac{T_0}{T_{ls}} \right)^{1/2} \approx 1^\circ \quad (1.42)$$

Donde se ha usado $T_{ls} \approx 0.3$ eV:

$$l_{HOR} = \frac{\pi}{\theta_{HOR}} \approx 200 \quad (1.43)$$

De este estimado se concluye que dos fotones que en la superficie de *last-scattering* estaba separados por un ángulo mayor que θ_{HOR} , corresponden a multipolos más pequeños que $\uparrow_{HOR} \approx 200$ donde no existía contacto causal. Por otro lado, está claro que a pequeñas anisotropías del mismo orden de magnitud $\delta T/T \approx 10^{-5}$ están presentes en $l_{HOR} \ll 200$. Dando como resultado que uno de los hechos más impresionantes de las fluctuaciones en el CMB

es que parecen no ser causales. Fotones en la superficie del *last-scattering* los cuales estaban causalmente desconectados, tienen las mismas anisotropías. La existencia de los horizontes de partículas en la cosmología estándar impide explicar la suavidad como un resultado de eventos microscópicos: El horizonte en el desacople, es la última vez que se pueden imaginar fluctuaciones de temperatura siendo suavizadas por interacciones entre partículas, corresponde a una escala angular en el cielo de alrededor 1° , el cual impide que las variaciones de temperatura en escalas más grandes sean borradas. De las consideraciones hechas, aparece al resolver los defectos de la teoría estándar del Big Bang requiere dos modificaciones básicas en las suposiciones hechas:

1. El Universo tiene que haber pasado por un período no adiabático. Esto es necesario para resolver el problema de la entropía y el del universo plano. Una fase no adiabática podría dar origen a la entropía grande que observamos ahora.
2. El Universo tuvo que haber pasado por un periodo primordial donde las escalas físicas λ evolucionan más rápido que el radio de Hubble H^{-1} .

La segunda condición es reconocible. Si hay un periodo durante el cual las escalas físicas crecen más rápido que el radio de Hubble, las escalas físicas que están ahora en el horizonte, y que estuvieron fuera del horizonte en algún periodo, tiene la posibilidad de estar dentro del radio de Hubble en alguna época primordial. Si esto pasa, la homogeneidad e isotropía del CMB puede ser explicada fácilmente: fotones que se reciben actualmente y fueron emitidos en el *last-scattering* de zonas causalmente desconectadas tienen la misma temperatura debido a que tienen una posibilidad de interactuar entre ellos en alguna época primordial de la evolución del universo. La solución al problema del horizonte está basado en la diferencia entre el horizonte de partículas y el radio de Hubble: R_H es más grande que el radio de Hubble actualmente, por lo que las partículas estaban en contacto causal en las épocas tempranas pero no en la época actual. La segunda condición puede ser expresada fácilmente como una condición del factor escala. Debido a que una escala dada λ escala como $\lambda \approx a$ y el radio de Hubble $H^{-1} = a/\dot{a}$ tenemos que imponer un periodo donde:

$$\left(\frac{\lambda}{H^{-1}}\right) > 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0 \quad (1.44)$$

Esto es equivalente a necesitar que el radio entre las escalas de longitud comóviles λ/a y el radio comóvil de Hubble incremente con el tiempo.

$$\left(\frac{\lambda}{H^{-1}}\right) = \left(\frac{\lambda/a}{1/aH}\right) > 0 \quad (1.45)$$

Entonces se puede introducir la siguiente definición rigurosa: Una fase inflacionaria es un periodo del Universo donde este **ACELERA**.

1.4 Inflación y perturbaciones cósmicas

El conocimiento actual del origen de la estructura del Universo es que se originó por pequeñas perturbaciones semilla, las cuales a lo largo del tiempo crecieron hasta formar la estructura que observamos. Una vez el universo se vuelve MD, algunas semillas de la densidad no homogénea comienzan a crecer debido a fenómenos de inestabilidades gravitacionales formando así la estructura que vemos ahora. La inestabilidad gravitacional, es llamada inestabilidad Jeans. La presencia de semillas inflacionarias primordiales es también confirmada por mediciones detalladas de las anisotropías en el CMB; las temperaturas anisotrópicas en escalas angulares mayores a 1° , el tamaño angular del horizonte en el *last-scattering*.

La mejor suposición del origen de estas perturbaciones son las fluctuaciones cuánticas durante una era inflacionaria en el universo temprano. Aunque originalmente fueron introducidas como posible solución a los enigmas cosmológicos como los problemas del horizonte, universo plano y la entropía, por mucho la propiedad más útil de la inflación es que genera un espectro de densidades de perturbación y ondas gravitacionales. Estas perturbaciones se extienden desde escalas extremadamente pequeñas a escalas cosmológicas por la expansión del espacio durante la inflación.

Una vez la inflación ha terminado, sin embargo, el radio de Hubble incrementa más rápido que el factor escala, por lo que las fluctuaciones vuelven a entrar eventualmente en el radio de Hubble durante las épocas de RD o MD. Las fluctuaciones que salieron alrededor de 60 e-folds o más antes del recalentamiento vuelven a entrar con longitudes de onda físicas en el rango de observaciones cosmológicas accesibles. Este espectro provee una firma distintiva de la inflación. Pueden ser medidas de varias maneras, incluyendo el análisis de las anisotropías del CMB.

Debido a que la gravedad interactúa con cualquier componente del universo, pequeñas fluctuaciones de campo inflatón están íntimamente relacionadas a fluctuaciones de la métrica del espacio-tiempo, dando origen a perturbaciones en la curvatura \mathcal{R} . Las longitudes de onda λ de estas perturbaciones crecen exponencialmente y dejan rápidamente el radio de Hubble cuando $\lambda > H^{-1}$. En las escalas de super Hubble, fluctuaciones en las curvaturas están congeladas y pueden ser consideradas como clásicas. Finalmente, cuando una longitud de onda de estas fluctuaciones vuelve a entrar en el horizonte, en alguna RD o MD, la curvatura de las perturbaciones en el espacio-tiempo dan origen a las perturbaciones en la materia por medio de la ecuación de Poisson. Estas fluctuaciones van a empezar a crecer dando origen a las estructuras que vemos hoy en día.

La inflación requiere una fuente de presión negativa p y una densidad de energía ρ que se diluya lentamente [9]. Esta fuente de tensión-energía puede ser moderada por la energía potencial $V(\phi)$ de un campo escalar ϕ , con ayuda de un mecanismo que mantiene un valor casi constante de $V(\phi)$ durante el periodo inflacionario. Este ϕ es un campo escalar llamado inflatón, el cual es un parámetro de orden utilizado para describir el cambio en la densidad de energía durante la inflación. Entre los enfoques para obtener un potencial casi constante durante la inflación se encuentran:

- Postular un potencial casi plano.
- Postular una acción efectiva para ϕ que contenga autointeracciones lo suficientemente fuertes como para retrasar la evolución del campo a un potencial abrupto.

La existencia de estados de materia que tienen una densidad de energía alta que no puede ser disminuida rápidamente es lo que hace posible la inflación [9]. En la teoría original, el estado propuesto fue un campo escalar en un mínimo local de su función de energía potencial. Starobinsky propuso algo similar; planteó la densidad de estado de altas energías mediante correcciones del espacio curvo al tensor de energía-momento de un campo escalar. A este campo se le llama *falso vacío*, ya que el estado actúa temporalmente como si fuera la densidad de estado de menor energía posible.

1.4.1 Desarrollo de la teoría de inflación

Tomando un campo escalar de Higgs a altas temperaturas como $kT \gg m_\phi c^2$. La densidad del número de partículas de Higgs, n_ϕ , viene dada por la distribución de Bose-Einstein, vista en física estadística:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\epsilon\beta} - 1} \quad (1.46)$$

Aquí ϵ es una función de la energía que para este caso será el producto del momento por la velocidad de la luz, pc , y β es un parámetro de temperatura del sistema que viene expresado como $1/kT$ donde T es la temperatura absoluta de todo el sistema y k la constante de Boltzmann. Así, al expresar la distribución de campo:

$$n_\phi = \int_0^\infty \frac{dn}{dp} dp = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\epsilon\beta} - 1} \quad (1.47)$$

con $g = 1$ (grados de libertad internos) y al realizar una normalización covariante del campo ϕ , se tiene:

$$n_\phi = \frac{E|\phi^2|}{(\hbar c)^2} \quad (1.48)$$

y el valor esperado del campo de Higgs sería⁵:

$$\langle \phi_T \rangle^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{E(e^{E/T}) - 1} \approx \frac{T^2}{12} \quad (1.49)$$

y el potencial de Higgs vendrá dado por:

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^2 + \frac{T^2}{12}) + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \frac{1}{8}\lambda\phi^2 T^2 - \frac{\pi^2}{90}T^4 \quad (1.50)$$

y su derivada sería:

$$\frac{\partial V_T(\phi)}{\partial \phi} \approx (-\mu^2\phi + \lambda\phi^3 + \frac{\lambda}{4}T^2\phi) \quad (1.51)$$

Y los puntos críticos se encuentran en:

$$\phi = 0 \text{ y } |\phi|^2 = \frac{\mu^2 - \lambda T^2/4}{\lambda} \quad (1.52)$$

La segunda solución solo aplica para $T < T_C = 2\mu/\lambda^{1/2} = 2v$. Para $T > T_c$ la masa depende de la temperatura efectiva de las excitaciones del campo escalar alrededor de $\phi = 0$ la cual es:

$$m_\phi^2 = 2\mu^2 - \frac{\lambda T^2}{2} \quad (1.53)$$

De esta forma surge el término cosmológico efectivo:

$$\Lambda = 8\pi G\rho_v \approx 8\pi G \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad (1.54)$$

Donde ρ_v es la densidad de energía en el vacío ($\rho_v \approx \frac{\mu^4}{4\lambda}$). Cuando T cae por debajo de T_c hasta cuando la transición de fase ocurre, la energía potencial de campo de inflatón puede causar inflación del universo. Esta transición de fase ocurre cuando $\mu^2 < 0$, provocando que se pase de una fase simétrica a un rompimiento de fase. En este proceso, el mínimo original del potencial de Higgs se transforma en un máximo y se forma un valle de mínimos.

Si el cambio de fase ocurre a la energía de la teoría de gran Unificación ($\mu \approx 10^{14} GeV$), se tiene:

$$\Lambda \approx 10^{18} GeV \quad (1.55)$$

Esto implica que si la inflación dura al menos 10^{-31} s se forma una expansión lo suficientemente grande. Una vez la transición de fase ocurre, entonces $\Lambda \rightarrow 0$ y el calor latente se libera incrementando la temperatura del universo hasta $T_c/g^{1/4}$ y la evolución del universo puede proceder como en el modelo del big bang caliente, con materia que se condensa cuando la

⁵En esta ecuación se adopta el sistema natural usado en cosmología donde $k = \hbar = c = 1$, por lo que la temperatura tendrá unidades de energía

temperatura cae a través de su acople a los campos de Higgs. La fuente básica de radiación y materia en el universo es entonces la expansión del falso vacío. Durante el periodo inflacionario,

$$T_{\mu\nu} \approx g_{\mu\nu} \frac{\Lambda c^2}{8\pi G_N} = g_{\mu\nu} \rho_v c^2 \quad (1.56)$$

Se puede deducir que ρ_v permanece fijo, el universo se expande debido a la presión hacia afuera $p = -\rho_v c^2$ de este falso vacío. Entonces, la energía gravitacional se convierte en energía de falso vacío, la cual es convertida en materia y radiación después de la transición de fase. Como la curvatura $k \rightarrow 0$ como resultado de la inflación, y como por hipótesis $\lambda = 0$ después del cambio de fase, lo cual predice que ahora $\Omega = 1$.

1.4.2 Aproximación de slow-roll

Se llama periodo de *slow-roll* cuando la evolución de un campo escalar ϕ libera energía potencial $V(\phi)$ almacenada en el inflatón cuando es dominado por su energía cinética $\frac{\dot{\phi}^2}{2}$, la cual conduce a una expresión de expansión exponencial del universo.

Para un potencial ordenado, el tiempo tomado por ϕ para alcanzar cierto estado como resultado de la fluctuación cuántica, donde se ha fijado la dirección del rompimiento de simetría, requiere que sea muy corto. La transición de un estado A a uno B de un campo de inflación homogéneo $\phi(t)$ puede compararse con un balón rodando cuesta abajo. La Ecuación de movimiento para este caso corresponde a (Desarrollo en el capítulo 5.2):

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_\phi \dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (1.57)$$

El término $3H\dot{\phi}$ surge de la expansión del universo y corresponde al corrimiento al rojo del momento del campo ($\dot{\phi}$) o por la expansión del Universo. H es una constante y el valor de Γ_ϕ es el ancho de decaimiento de la partícula ϕ . Esta ecuación de movimiento, que es igual a la de una bola que rueda cuesta abajo con fricción en un valle, tiene dos regímenes cualitativamente diferentes, cada uno de los cuales tiene una solución analítica simple. Uno de ellos es el régimen de rodamiento lento, donde la fricción domina y ϕ rueda a velocidad terminal. Tomando la ecuación de aceleración de Friedmann junto con la definición de masa de Planck $M_{pl} = (1/G)^{1/2}$ se obtiene:

$$H^2 \approx \frac{8\pi G\rho}{3} = \frac{8\pi\rho}{3M_{pl}^2} \quad (1.58)$$

donde la densidad de energía está dada por:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (1.59)$$

teniendo en cuenta la suposición del universo plano $k = 0$, compatible con todas las observaciones. La homogeneidad del espacio implica que $\nabla\phi \approx 0$, y si entre A y B el potencial es suficientemente

plano para que $\ddot{\phi}$ pueda ser despreciada y con $\Gamma \ll H$, entonces

$$\dot{\phi} \approx -\frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{1}{3H} \quad (1.60)$$

que en el caso de la condición $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$, conduce a

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right| \ll 9H^2 \quad (1.61)$$

Si el potencial domina sobre el término $\dot{\phi}^2$ se obtiene

$$V \gg \frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{M_{pl}}{(48\pi)^{1/2}} \quad (1.62)$$

Para calcular el número de *e-folds* (se le llama e-fold al intervalo de tiempo en el que el crecimiento exponencial de una cantidad aumenta en un factor e):

$$N(\phi_1 \rightarrow \phi_2) = \int_{t_1}^{t_2} H dt = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{V(\phi) d\phi}{V'(\phi)} \quad (1.63)$$

Siendo ϕ_1 el valor del inflatón cuando inicia la inflación y ϕ_2 el valor del inflatón cuando termina la inflación. Para el slow-roll, el término $\ddot{\phi}$ en la ecuación de movimiento es insignificante y el término de creación de partículas $\Gamma_{\phi}\dot{\phi}$ no está operativo. Durante *slow-roll* la ecuación de movimiento se reduce a:

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi) \quad (1.64)$$

y con las condiciones anteriores se llega a:

$$H = -\frac{V'(\phi)}{3\dot{\phi}} \quad (1.65)$$

y

$$H^2 = \frac{V'(\phi)}{3\dot{\phi}^2} \quad (1.66)$$

Por lo tanto

$$H dt = -\frac{8\pi V(\phi)}{M_{pl}^2 V'(\phi)} d\phi \quad (1.67)$$

y la ecuación para N se expresa

$$N = \int_{t_1}^{t_2} H dt = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{V(\phi) d\phi}{V'(\phi)} \quad (1.68)$$

Donde el signo negativo implica que $\phi_2 < \phi_1$. Se pueden obtener así los parámetros:

$$\epsilon(\phi) = \frac{1}{2m_{pl}^2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \quad (1.69)$$

$$\eta(\phi) = \frac{1}{m_{pl}^2} \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \quad (1.70)$$

donde $m_{pl} = M_{pl}/\sqrt{8\pi}$ es la masa reducida de Planck, con estos parámetros se encuentra el índice espectral de perturbaciones escalares n_s y el cociente de perturbaciones tensoriales y escalares r :

$$n_s(\phi) = 1 - 6\epsilon(\phi) + 2\eta(\phi) \quad (1.71)$$

$$r(\phi) = 16\epsilon(\phi) \quad (1.72)$$

Siendo estos, dos de los principales parámetros inflacionarios cuyos valores pueden ser medidos experimentalmente al estudiar anisotropías en la radiación cósmica de fondo (CMB).

1.4.2.1 Aproximación Mukhanov-Sasaki

La aproximación slow-roll es válida cuando los parámetros de slow-roll (ϵ_H, η_H) son pequeños [5].

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 \quad (1.73)$$

$$|\eta_H| \ll 1 \quad (1.74)$$

Cuando estos parámetros son pequeños, la expansión es casi exponencial, las ecuaciones para modos exponenciales se pueden aproximar con soluciones analíticas y los espectros escalares tienen formas simples. Cuando la aproximación de slow-roll no es suficiente, se usa la ecuación de Mukhanov-Sasaki:

$$v'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)v_k = 0 \quad (1.75)$$

$$z = a\frac{\dot{\phi}}{H} = a\sqrt{2\epsilon}M_{pl} \quad (1.76)$$

La ecuación de Mukhanov-Sasaki no depende de asumir el slow-roll por lo que incluye los efectos completos de la dinámica de fondo y permite obtener espectros de perturbaciones precisos para cualquier modelo.

1.4.2.2 Variable de Mukhanov-Sasaki

En el Universo inflacionario, el campo inflatón ϕ no es completamente homogéneo ya que, a nivel cuántico las fluctuaciones de vacío son inevitables; estas pequeñas fluctuaciones son amplificadas por la expansión exponencial del universo.

Al perturbar el campo de inflatón:

$$\phi(t, x) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, x) \quad (1.77)$$

Se obtienen variables, las cuales son artefactos de gauge (dependen de la elección de coordenadas). Mukhanov y Sasaki demostraron que existe una combinación especial:

$$v = a \left(\delta\phi + \frac{\dot{\phi}}{H} \psi \right) \quad (1.78)$$

La cual es invariante bajo gauge⁶, encapsula tanto la fluctuación de campo como la del espacio-tiempo y es la variable canónica que se cuantiza. La ecuación de Mukhanov-Sasaki muestra que los modos cuánticos en el vacío inflacionario cruzan el horizonte; una vez congelados, actúan como fluctuaciones clásicas de densidad. Estas fluctuaciones son las semillas de las anisotropías del CMB y de la formación de galaxias.

⁶Una transformación invariante bajo gauge significa que las cantidades físicas del sistema no cambian cuando se aplica una transformación de gauge. La invariancia gauge indica que nuestro formalismo matemático tiene grados de libertad extras que no corresponden a física real, lo que obliga a la existencia de campos de interacción.

Capítulo 2

Metodología

2.1 Ecuaciones de movimiento sin perturbaciones

Para estudiar las ecuaciones de movimiento asociadas a un campo escalar sin perturbaciones, se desarrolló un programa en Python que realiza cálculos numéricos para la dinámica de fondo del modelo escogido. Esta dinámica de fondo se basa en tres ecuaciones: las dos ecuaciones de Friedmann (ecuaciones 1.11 y 1.14) adaptadas para un campo escalar y la ecuación de Klein-Gordon (ecuación 1.57).

$$H^2 = \frac{1}{3m_{pl}^2} \rho_0 = \frac{1}{3m_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (2.1)$$

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = -\frac{1}{2m_{pl}^2} \dot{\phi}^2 \quad (2.2)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi(\phi) = 0 \quad (2.3)$$

El método de resolución de estas ecuaciones se basa en el implementado en el artículo [1], en el cual se realizan cambios de variables ingeniosos que simplifican considerablemente los cálculos. Adicionalmente, se convierten las cantidades físicas a cantidades adimensionales equivalentes; para ello, se introduce una nueva variable $S = 5 \times 10^{-5} (\text{ms})^{-1}$, que corresponde a las anisotropías medidas en el Universo. Las conversiones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 T &= (tM_{pl})S \\
 x &= \frac{\phi}{M_{pl}} \\
 y &= \frac{\dot{\phi}}{SM_{pl}^2} \\
 z &= \frac{H}{SM_{pl}} \\
 A &= (aM_{pl})S
 \end{aligned}$$

Al realizar estos cambios de variables, las ecuaciones de dinámica de fondo se transforman en ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dx}{dT} = y \quad (2.4)$$

$$\frac{dy}{dT} = -3zy - \frac{V_0}{S^2} \frac{df}{dx} \quad (2.5)$$

$$\frac{dz}{dT} = -\frac{1}{2}y^2 \quad (2.6)$$

$$\frac{dA}{dT} = Az \quad (2.7)$$

Estas ecuaciones requieren condiciones iniciales. El artículo [1] propone las siguientes condiciones iniciales como punto de partida, pero éstas deben modificarse de manera que cumplan los requisitos para que ocurra inflación y reproduzcan los datos medidos en el CMB. El primer paso para realizar los cálculos de la dinámica de fondo es definir el modelo que se

| Variable | Valor |
|----------|--|
| x_i | 17.5 |
| y_i | 0 |
| z_i | $\sqrt{\frac{y_i^2}{6} + \frac{v_0 \cdot f(x_i)}{3S^2}}$ |
| v_0 | 10^{-10} |
| A_i | 1×10^{-3} |

Tabla 2.1: Condiciones iniciales propuestas en el artículo [1].

usará. Para ello, debe elegirse un potencial y expresarlo en la forma $V(\phi) = V_0 f(\phi)$, ya que el programa está adaptado para trabajar con potenciales que sean función únicamente del inflatón (potenciales de campo escalar inflatón).

Al finalizar los cálculos, se pueden derivar cantidades importantes del sistema consideradas, las cuales son cantidades que pueden ser medidas:

- El número de *e-folds* antes del fin de la inflación: $N_e = N_T - N$, donde $N = \log \frac{A}{A_i}$.
- Los parámetros de *slow-roll*:

$$\begin{aligned}\epsilon_H &= \frac{y^2}{2z^2}, \\ \eta_H &= -\frac{1}{yz} \frac{dy}{dT}.\end{aligned}$$

- El espectro de potencias de las fluctuaciones escalares: $P_s = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_H} \left(\frac{H}{M_{\text{pl}}} \right)^2$.
- La inclinación espectral escalar: $n_s = 1 + 2\eta_H - 4\epsilon_H$.
- El radio tensor-escalar: $r = 16\epsilon_H$.

Para asegurar que las condiciones iniciales reproduzcan los datos medidos en el CMB y soporten una inflación adecuada, se deben cumplir las condiciones $N_T \geq 70$ (condición de inflación) [1] y un valor de $A_s = 2.1 \times 10^{-9}$ [1, 4, 5] en la escala de pivote elegida (por ejemplo, $N_e = 60$).

El factor que modifica el valor de N_T es el valor inicial x_i . Este valor debe ajustarse iterativamente hasta que se cumpla la condición de inflación. Para verificar que se cumple esta condición, se grafica el número de *e-folds* en función del tiempo; si la condición se satisface, se observará una pendiente pronunciada durante al menos 70 *e-folds*, lo cual garantiza la condición de inflación.

Con el objetivo de reproducir el valor de la amplitud $A_s = 2.1 \times 10^{-9}$ en la escala de pivote, se ajusta el valor de V_0 mediante el método de bisección hasta lograr una convergencia adecuada. Si el valor calculado es menor que el esperado, se incrementa V_0 ; si es mayor, se disminuye, hasta alcanzar el valor correcto de A_s en la escala de pivote.

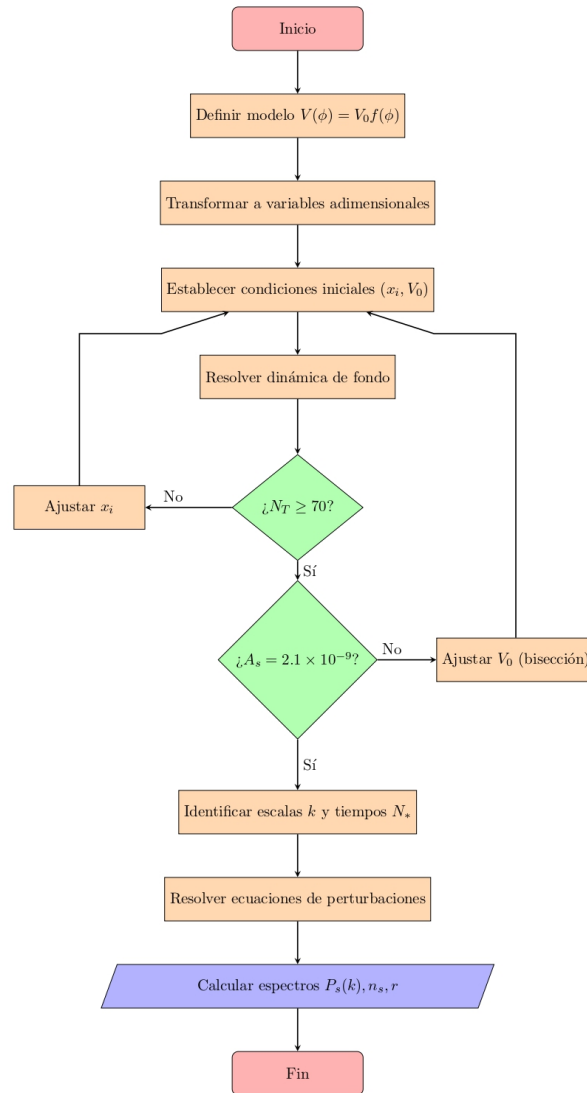


Figura 2.1: Flujo de trabajo completo para la simulación numérica de inflación con campo escalar (Código en la sección 5.1.1). El proceso inicia con la definición del potencial inflacionario $V(\phi) = V_0 f(\phi)$ y su transformación a variables adimensionales. Tras establecer condiciones iniciales (x_i, V_0) , se resuelve la dinámica de fondo y se verifica iterativamente que se cumplan las condiciones $N_T \geq 70$ (suficiente inflación) y $A_s = 2.1 \times 10^{-9}$ (amplitud escalar medida). Finalmente, se identifican escalas comóviles k , se resuelven las ecuaciones de perturbaciones de Mukhanov-Sasaki y se calculan los espectros de potencia $P_s(k)$, n_s y r .

2.2 Ecuaciones de movimiento con perturbaciones

Para estudiar las ecuaciones de movimiento asociadas a un campo escalar con perturbaciones, especialmente en situaciones donde las condiciones de *slow-roll* no se cumplen, se utiliza la ecuación de Mukhanov-Sasaki (ecuación 1.76). Adaptada a los cambios de variable realizados en el método propuesto, esta ecuación toma la siguiente forma:

$$\ddot{v}_k + H\dot{v}_k + \left[\frac{k^2}{a^2} - \frac{1}{a^2} \frac{z''}{z} \right] v_k = 0 \quad (2.8)$$

donde $z'' \equiv d^2z/dx^2$, $\dot{v} \equiv dv/dt$ y $\ddot{v} \equiv d^2v/dt^2$.

En esta ecuación, z no es la variable adimensional del parámetro de Hubble usada anteriormente; en este caso corresponde a la variable $z = aM_{pl}\sqrt{2\epsilon_H}$ de la ecuación de Mukhanov-Sasaki. El término de masa efectiva se reescribe como:

$$\frac{z''}{z} = a^2 \left[\frac{5\dot{\phi}^2}{2M_{pl}^2} + 2\frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}}{HM_{pl}^2} + 2H^2 + \frac{\dot{\phi}^4}{H^2M_{pl}^4} - V_{,\phi\phi}(\phi) \right] \quad (2.9)$$

donde $V_{,\phi\phi}(\phi) \equiv \partial^2V(\phi)/\partial\phi^2$.

Los modos de Fourier están caracterizados por el número de onda k . Para calcular la evolución de un modo particular, es necesario conocer el tiempo en el cual éste se vuelve un estado super-Hubble. Las fluctuaciones cuánticas durante la inflación son generadas en el régimen sub-Hubble a medida que el radio de Hubble se encoge; las longitudes de onda comóviles de modos distintos se vuelven iguales al radio de Hubble (cuando $k = aH$). Esto se conoce como salida de Hubble. El tiempo de salida de Hubble para distintos modos puede determinarse graficando las longitudes de onda en función del número de *e-folds*. Se pueden escribir las ecuaciones de Mukhanov-Sasaki en términos de las variables adimensionales introducidas anteriormente:

$$v_{k,T} = \frac{dv_k}{dT} \quad (2.10)$$

$$\frac{dv_{k,T}}{dT} = -zv_{k,T} - \left[\frac{k^2}{A^2} - \frac{5}{2}y^2 + 2\frac{y}{z} \left(3zy + \frac{V_0}{S^2}f_x \right) - 2z^2 - \frac{1}{2}\frac{y^4}{z^2} + \frac{V_0}{S^2}f_{xx} \right] v_k \quad (2.11)$$

donde $f_x \equiv df/dx$ y $f_{xx} \equiv d^2f/dx^2$.

Para simular la evolución de un modo de perturbación alrededor del horizonte de salida, se deben introducir sus condiciones iniciales cuando éste se considera sub-Hubble. Esto corresponde al vacío de Bunch-Davies:

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau} \quad (2.12)$$

donde τ es el tiempo conforme. Cada modo satisface esta condición aproximadamente hasta 5 *e-folds* antes de la salida del horizonte; posteriormente, los modos se encuentran en el régimen

de salida del horizonte. Entonces, se introducen los valores de las cantidades de fondo como condiciones iniciales para las perturbaciones.

Como primer paso para resolver numéricamente las ecuaciones de Mukhanov-Sasaki, se debe resolver la dinámica de fondo para el modelo seleccionado, como se indica en la sección anterior, así como calcular sus cantidades derivadas $\{N_e, \epsilon_H, \eta_H\}$. Luego, se identifican distintas escalas comóviles k . Para ello, se determinan sus épocas de *salida de Hubble* graficando aH en escala logarítmica contra N_e e identificando el valor $N_e = N_*$, que será el valor de la escala de pivote k_p . Este valor de N_e se asocia a cada escala comóvil k por el valor de aH en su época de *salida de Hubble*.

Las condiciones de Bunch-Davies se imponen para un modo dado v_k en la época en que éste es sub-Hubble. Para la mayoría de potenciales inflacionarios, las condiciones de Bunch-Davies pueden imponerse siempre que $k \geq 100aH$ [1]. Se resuelven las ecuaciones con estas condiciones iniciales durante un intervalo de tiempo suficiente para apreciar cómo los modos se vuelven super-Hubble y se congelan a un valor constante.

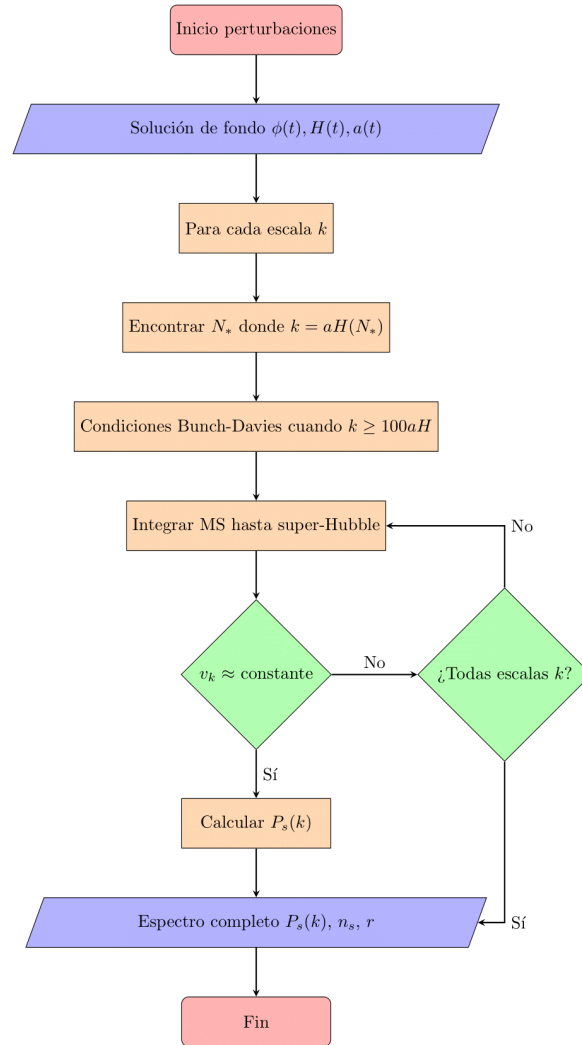


Figura 2.2: Procedimiento para el cálculo de perturbaciones escalares mediante la ecuación de Mukhanov-Sasaki (Código descrito en la sección 5.1.3). Partiendo de la solución de fondo previamente calculada, para cada escala comóvil k se determina el tiempo de salida del horizonte N_* donde $k = aH$. Se imponen condiciones iniciales de vacío de Bunch-Davies cuando $k \geq 100aH$, se integra numéricamente la ecuación de Mukhanov-Sasaki hasta que los modos se vuelven super-Hubble y se congelan, y finalmente se calcula el espectro de potencia escalar $P_s(k)$. El proceso se repite para todas las escalas de interés.

Capítulo 3

Resultados y discusión

3.1 Potencial de Starobinski

El modelo utilizado corresponde al potencial de Starobinski, el cual posee la siguiente forma [10]:

$$V(\phi) = v_o \left(1 - e^{\sqrt{2/3}\phi}\right)^2$$

Las condiciones iniciales impuestas para este potencial son:

| Variable | Potencial Starobinski |
|----------|-------------------------|
| x_i | 5.65 |
| y_i | 1×10^{-8} |
| v_0 | 1.056×10^{-10} |
| A_i | 1×10^{-3} |

Tabla 3.1: Condiciones iniciales usadas en el potencial de Starobinski. Estas condiciones iniciales son importantes para los cálculos de la dinámica de fondo, la cual será la base para los cálculos de Mukhanov Sasaki, ambos cálculos deben ser congruentes en cuanto a condiciones iniciales.

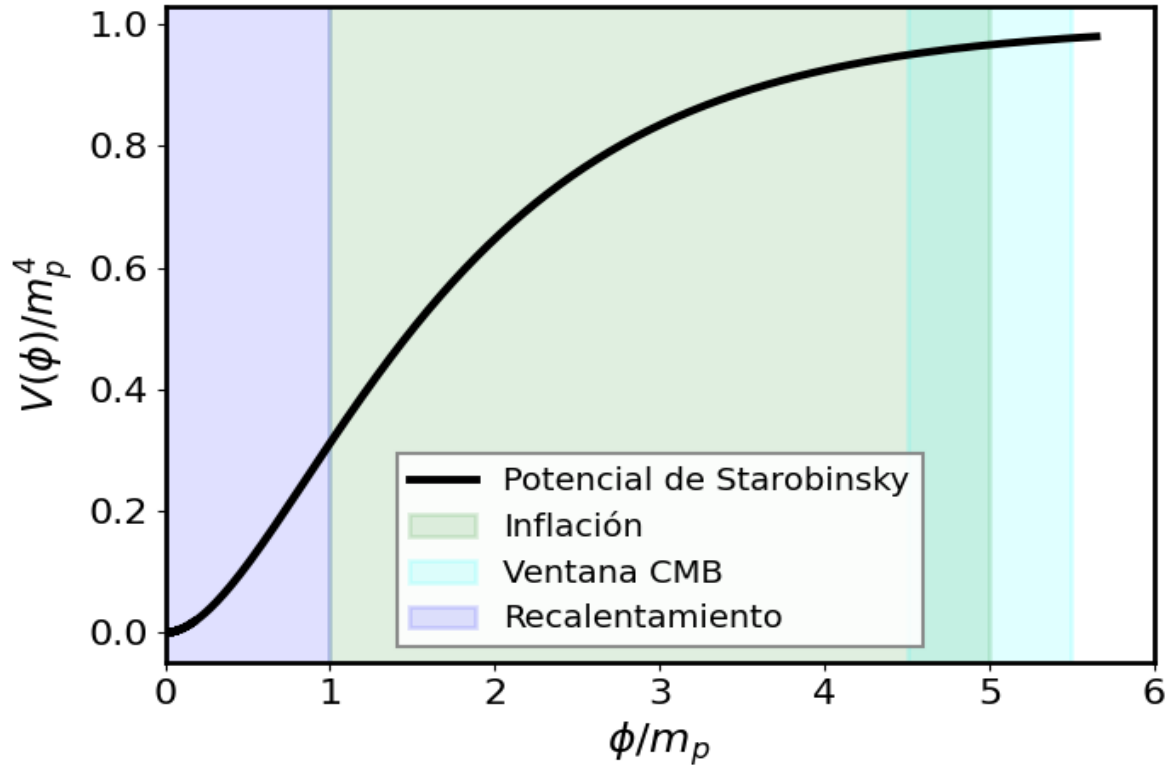


Figura 3.1: El potencial de Starobinski es una modificación a la relatividad general usada para explicar la inflación cosmológica. Fue el primer modelo en describir el comportamiento del Universo al pasar por un periodo rápido de expansión exponencial [2]. Tanto el eje de potencial como el de campo escalar son adimensionales y están normalizados con respecto a la masa de Planck reducida.

En la figura 3.1 se muestran las etapas del potencial de Starobinski: la zona sombreada en morado representa la época de recalentamiento descrita por el potencial, la franja verde representa la época de inflación, el objeto de la investigación, y la franja de color aqua representa la ventana de mediciones del CMB, con respecto a la cual se normalizarán los cálculos.

3.1.1 Condiciones de inflación

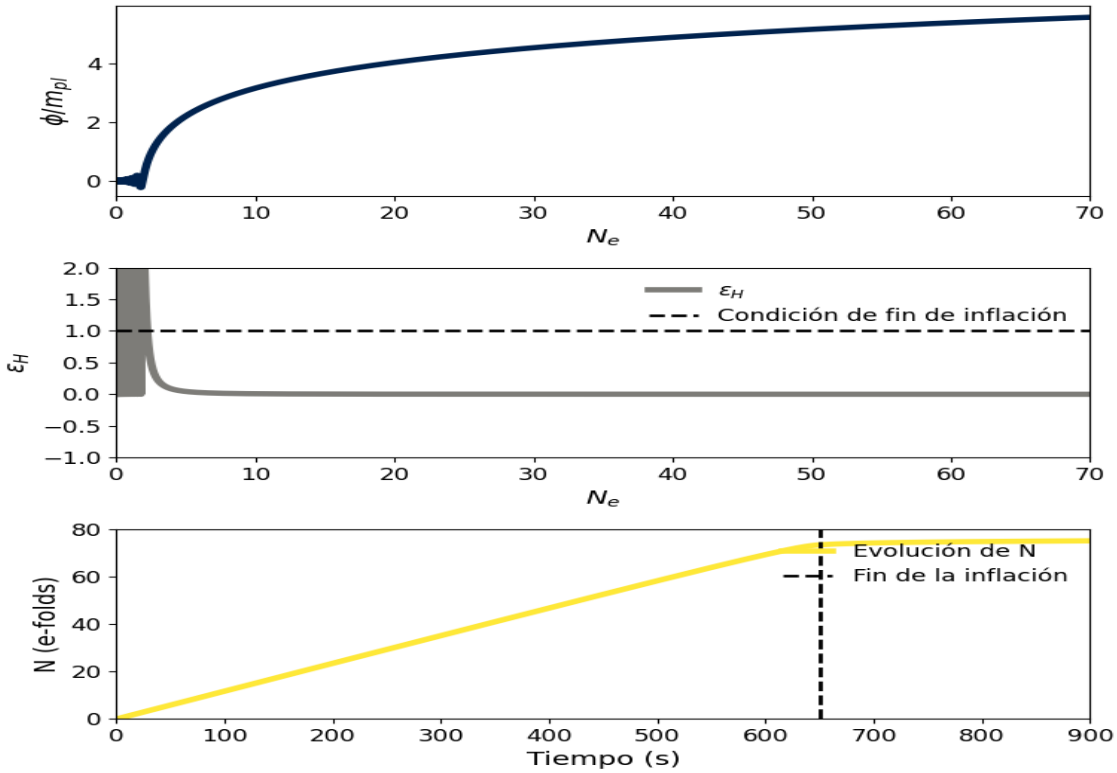


Figura 3.2: Condiciones de inflación para el potencial de Starobinski: La evolución del campo inflatón, muestra una inflación que se sostiene por al menos 70 e-folds, hasta caer en una etapa de recalentamiento (oscilación). La gráfica del parámetro de inflación ϵ_H , muestra que la inflación es estable hasta los últimos 5 e-folds, que es cuando se ve un cambio brusco en el parámetro de inflación, lo que podría afectar los resultados de la aproximación Slow-roll en esta etapa. En la gráfica de crecimiento e-folds se presencia el fin de la inflación al observar como la razón de cambio converge a un valor constante (la curva se aplana) alrededor de los 650 segundos.

El potencial de Starobinski, bajo las condiciones iniciales impuestas, genera cambios en el campo de inflatón que corresponden a una etapa de inflación de 70 e-folds, la figura 3.2, muestra una curva azul corresponde a la evolución del campo de inflatón, la curva aumenta proporcionalmente al número de e-folds, N_e , se definen como el número $N = Ht$ en $a = e^{Ht}$ restantes para que acabe la época de inflación y se empieza a producir la expansión desacelerada, traduciéndolo al tiempo cósmico la gráfica de la evolución del inflatón nos dice que el campo inflatón se va reduciendo hasta llegar a una etapa en la que empieza a oscilar (etapa de recalentamiento) y se amortigua hasta un valor constante cuando la etapa inflacionaria ha acabado.

El parámetro de inflación ϵ_H define el cambio que experimenta el campo de inflatón durante la inflación, si el cambio es mínimo, la aproximación de Slow-roll es suficiente para ilustrar las propiedades físicas del modelo que se está aplicando, en el caso de Starobinski el parámetro ϵ_H

es muy bajo, durante casi toda la inflación lo que hace que la aproximación de slow-roll sea óptima en las etapas donde $\epsilon_H < 1$. En la curva color gris la evolución de ϵ_H muestra un cambio brusco cuando faltan menos de 5 e-folds para el fin de la inflación lo cual podría representar un problema durante esta etapa para la aproximación slow-roll denotando la necesidad de otro método para el análisis de este modelo durante estas etapas.

La gráfica amarilla muestra el crecimiento de e-folds con respecto al tiempo cósmico el factor de escala definido como $a = e^{Ht}$, experimenta un crecimiento de e-folds acelerado evidenciado por la pendiente de la recta en esta gráfica, hasta llegar a un punto donde la pendiente es mínima, la parte donde la pendiente es pronunciada corresponde a la etapa de inflación, donde el factor de escala crece de manera casi exponencial y el fin de la inflación trae consigo una etapa de expansión desacelerada, la cual aún se ve en el Universo actual.

3.1.2 Espectros escalares

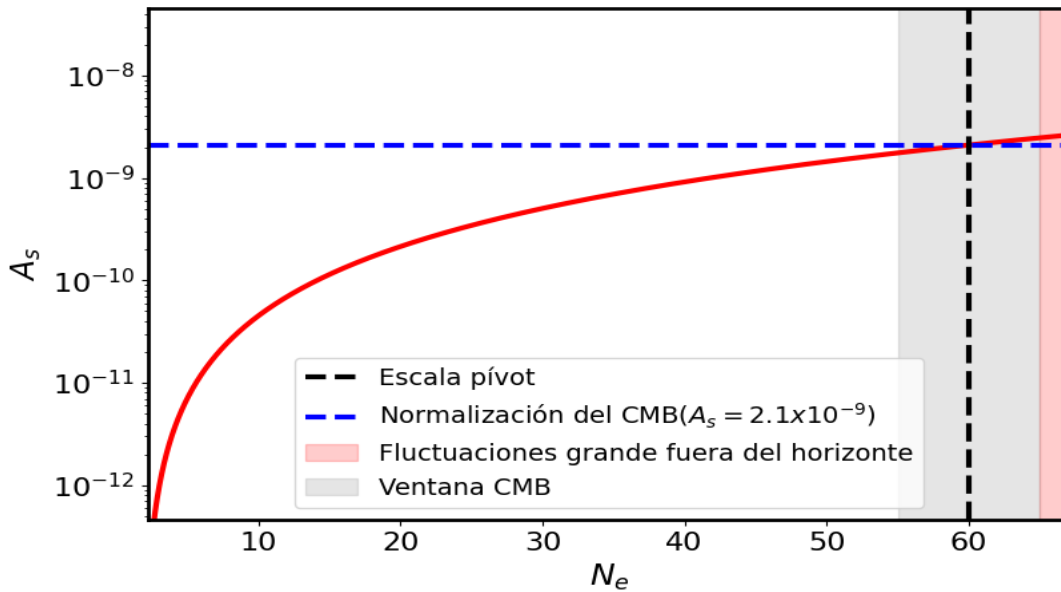


Figura 3.3: Espectro potencial escalar bajo la aproximación slow-roll, normalizado en $N_e = 60$ (escala de pivote). Para garantizar que los resultados representen los valores medidos por el satélite Planck, el espectro escalar potencial calculado mediante slow-roll se normaliza utilizando los datos de la amplitud del CMB en la escala de pivote.

El espectro escalar se ha normalizado para la aproximación de slow-roll con respecto a los datos de Planck a una amplitud de $A_s = 2.1 \times 10^{-9}$ en una fase de pivote a 60 e-folds.

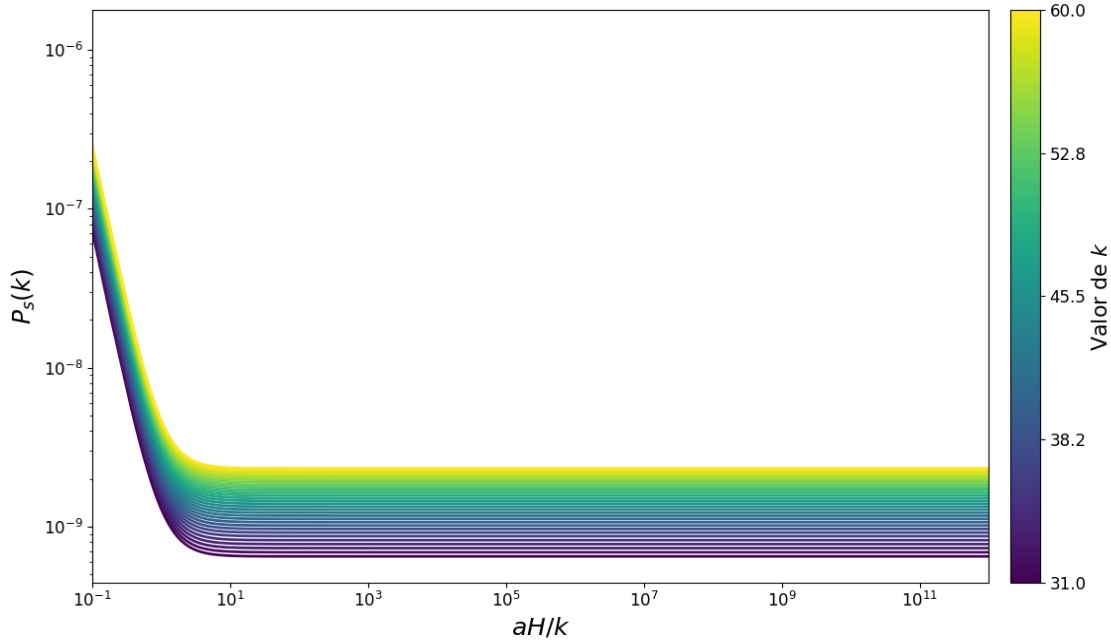


Figura 3.4: Espectro potencial escalar calculado con Mukhanov-Sasaki para valores de $N_k = [30, 60]$. En este espectro se aprecian dos fases importantes para las transiciones de los modos a medida que salen del horizonte. En la fase de salida, la longitud de onda se hace comparable a la del horizonte, k^2 deja de dominar en la ecuación de Mukhanov-Sasaki y empieza actuar la expansión (valle en la gráfica) y en la segunda fase los modos dejan de oscilar para empezar a crecer o amortiguarse, por la expansión del espacio los modos se congelan.

El cálculo de Mukhanov-Sasaki en la figura 3.4 muestra una transición de los modos al régimen fuera del horizonte, con una meseta en el espectro, el ruido producido en los modos, se debe a los tiempos de integración escogidos, esto no representa ningún obstáculo para la física del asunto, el cual es demostrar que los modos al pasar el horizonte tienden a congelarse como lo dice la teoría.

En la figura 3.4 se evidencian 2 fases de los modos de perturbación durante la inflación: en la *fase de salida del horizonte*, la longitud de onda se hace comparable al tamaño del horizonte. En este punto, el término k^2 de la ecuación de Mukhanov-Sasaki deja de dominar, y empieza a actuar la expansión; los modos dejan de oscilar para empezar a crecer o amortiguarse: las oscilaciones cuánticas se *estiran* por la expansión del espacio, el modo se *congela* y su amplitud deja de evolucionar significativamente. En la *fase Super-Hubble*, el modo se encuentra completamente fuera del horizonte; sus puntos ya no pueden comunicarse casualmente. El campo ya no experimenta la expansión local, la fluctuación se *congela*, por lo que la curvatura comóvil y su potencia P_s se estabilizan. Dando como resultado una potencia constante que son los valores que se observan en el CMB.

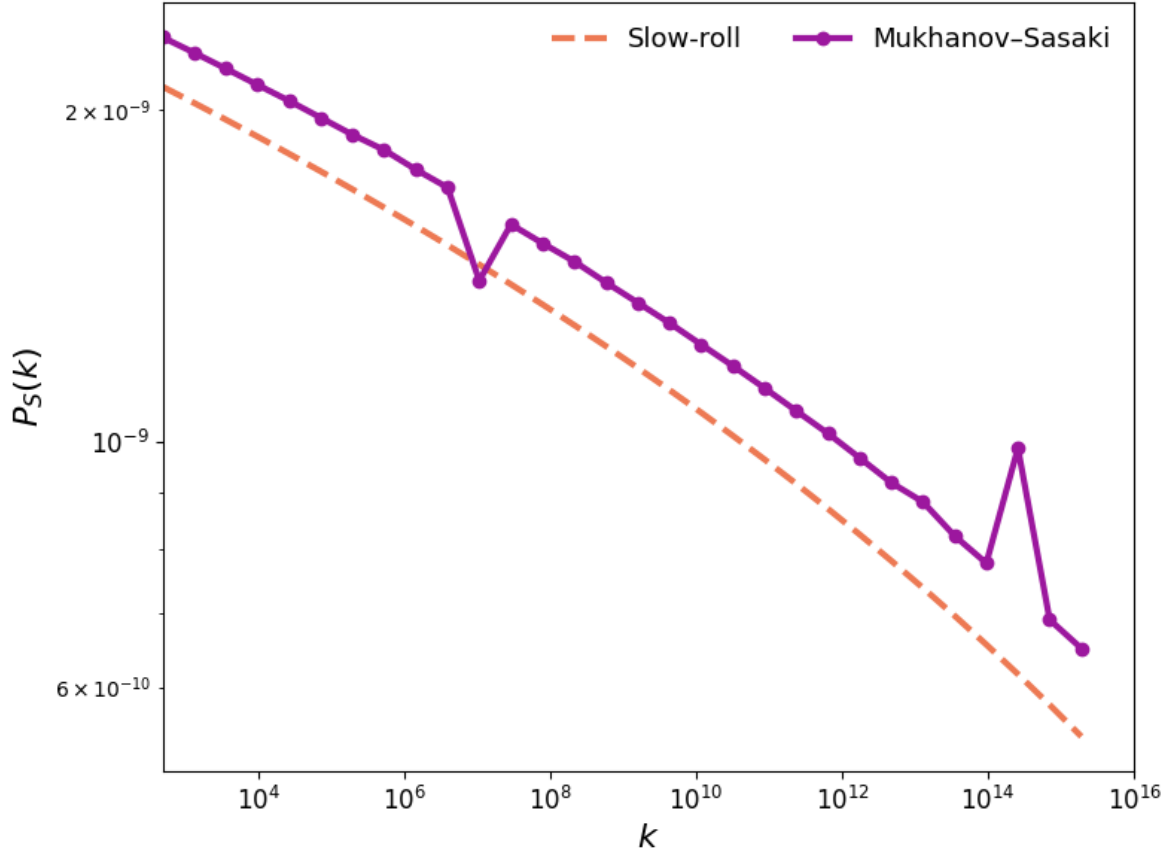


Figura 3.5: Comparación de espectros escalares: En amarillo, la curva calculada con la aproximación Slow-roll y en violeta el cálculo numérico de Mukhanov-Sasaki. Los comportamientos de ambas gráficas son uniformes a excepción de dos puntos en los cálculos de Mukhanov-Sasaki, los valores de el cálculo de Slow-roll, subestiman los valores de potencial para el espectro escalar, debido a que no toman en cuenta las perturbaciones cuánticas del sistema.

Al comparar el potencial escalar del modo $N_k = 60$, que fue escogido como escala de pivote, con el calculado para el mismo modo pero con la aproximación slow-roll se puede observar que ambos mantienen la misma forma, en el caso de Mukhanov-sasaki se ven dos puntos fuera de la forma esperada de la curva, lo que puede deberse a efectos de ruido numérico. Para verificar que no se debe a errores de elección en las condiciones iniciales se ha calculado el índice espectral, en Starobinski se espera un índice espectral de $n_s \approx 0.96$ para un modo de pivote en $N = 60$, los valores mas reciente de las mediciones del CMB son [11]:

$$n_s = 0.9649 \pm 0.0042 \quad (3.1)$$

$$A_s = 2.1 \times 10^{-9} \quad (3.2)$$

La amplitud resultante para el modo de pivote calculado es de $A_s = 2.23 \times 10^{-9}$, la cual se encuentra en el orden correcto, los calculos se encuentran en la escala observacional adecuada

y el índice espectral obtenido $n_s = 0.96$ el cual es un valor aceptable para el índice espectral esperado para este modelo, lo que valida los calculos obtenidos de espectros escalares.

3.1.3 Diferencias entre slow-roll y Mukhanov-sasaki

Para evidenciar cuán diferentes son los resultados de un modelo sin perturbaciones (slow-roll) y uno con perturbaciones (Mukhanov-Sasaki) se calculó la diferencia relativa entre los potenciales en los puntos calculados por Mukhanov-Sasaki:

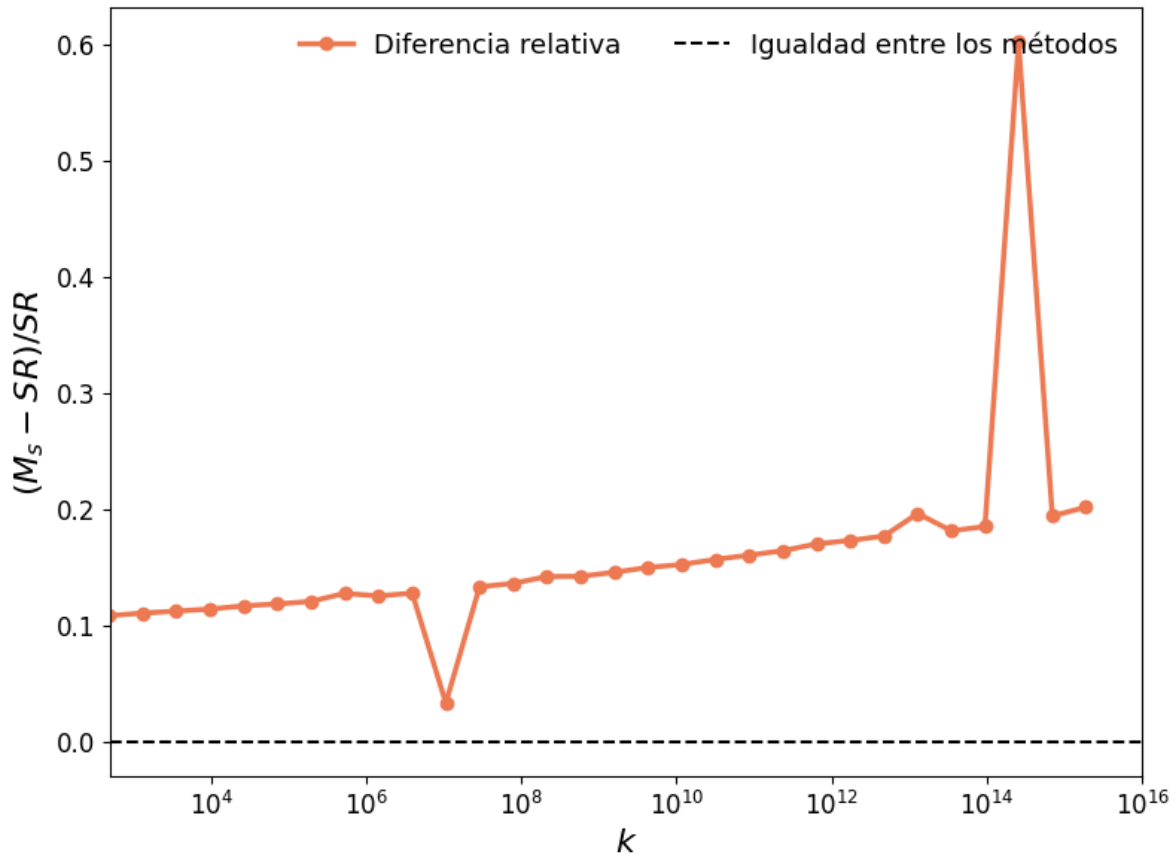


Figura 3.6: Diferencia relativa entre Mukhanov-Sasaki y Slow-roll: La diferencia entre ambos calculos oscila entre 10% – 20%, existen dos puntos que difieren del comportamiento normal de los demás, esto puede deberse a errores numéricos ocasionados por la pocas pendiente que se observa en las derivadas del potencial para estos puntos, lo que puede sobrestimar los valores para dado punto en la ecuación de Mukhanov-Sasaki. Estas diferencias evidencian la necesidad de usar Mukhanov-Sasaki por sobre slow-roll, si se quiere un espectro de potencial primordial más preciso.

En promedio hay una diferencia relativa entre los dos modelos que ronda en el rango del 10% al 20%, que va aumentando conforme incrementa el valor del número de onda, las unicas

medidas que difieren en mayor medida son las de los puntos que no siguen la curva uniformemente, lo que da indicios de errores numéricos para estos puntos, que podrían solucionarse con una red de puntos mayor a la hora de resolver Mukhanov-Sasaki, el aumento en la diferencia relativa conforme aumentan las longitudes de onda puede deberse a los efectos que introducen los cambios en el parámetro de inflación, cerca del final de la misma, al estar ϵ_H muy cerca del valor unitario la aproximación de Slow-roll comienza a fallar y se evidencian en mayor medida los efectos de las fluctuaciones cuánticas que se perciben en Mukhanov-Sasaki.

El cálculo de la diferencia relativa confirma que:

- El desacuerdo entre ambas técnicas es pequeño (10–20%) en la región donde slow-roll es una buena aproximación.
- La diferencia crece hacia valores altos de k , reflejando la sensibilidad de estos modos al comportamiento del inflatón cerca del final de la inflación.
- Los puntos más discrepantes corresponden a errores numéricos debido a discretización insuficiente en el integrador, sugiriendo que una malla más fina podría reducir estas oscilaciones residuales.

Este análisis justifica de manera clara por qué es necesario utilizar la ecuación completa de Mukhanov-Sasaki si se desea obtener un espectro preciso más allá de la aproximación de slow-roll.

El análisis numérico muestra que el campo inflatón inicia en una región del potencial donde la pendiente es suficientemente suave para sostener una fase prolongada de expansión acelerada. Durante la mayor parte de la evolución, el parámetro de slow-roll ϵ_H se mantiene en valores muy pequeños, confirmando que el modelo opera en un régimen dominado por la fricción de Hubble y con una derivada temporal del campo muy reducida.

Sin embargo, se observa un incremento abrupto de ϵ_H en los últimos 4–5 e-folds antes del fin de la inflación. Este comportamiento coincide con la región del potencial donde la pendiente se hace más pronunciada, indicando que el campo abandona gradualmente el régimen de slow-roll. Este incremento produce modificaciones apreciables en los modos de mayor número de onda, lo cual explica la diferencia creciente entre las aproximaciones slow-roll y Mukhanov-Sasaki para valores altos de k . El análisis también confirma que la transición del inflatón hacia un régimen oscilatorio después del final de la inflación es suave, lo cual es consistente con la interpretación física de un periodo de recalentamiento.

Capítulo 4

Conclusión

El presente trabajo permitió estudiar de manera numérica la generación del espectro primordial de perturbaciones escalares en el contexto del modelo inflacionario de Starobinski, utilizando tanto la dinámica de fondo como la ecuación completa de Mukhanov-Sasaki. La simulación logró reproducir de forma satisfactoria los parámetros observacionales más relevantes del CMB, lo cual demuestra la consistencia del modelo estudiado y la validez del método implementado.

Se verificó que el modelo de Starobinski produce una fase inflacionaria prolongada, superior a los 70 e-folds, y que sus predicciones para el índice espectral n_s y la amplitud A_s coinciden con los valores reportados por el satélite Planck. Asimismo, el comportamiento del inflatón y de los parámetros de slow-roll mostró que el régimen inflacionario es estable durante casi toda su evolución, salvo en los últimos instantes antes de finalizar la inflación, donde la aproximación de slow-roll pierde precisión.

El análisis del espectro mediante la ecuación de Mukhanov-Sasaki permitió observar con mayor detalle el proceso de congelamiento de los modos fuera del horizonte, reproduciendo fielmente el comportamiento esperado de las perturbaciones primordiales. La comparación con el espectro obtenido mediante slow-roll evidenció diferencias que se acentúan para valores altos de k , lo cual confirma que el tratamiento completo de las perturbaciones es necesario si se busca un análisis preciso.

En conjunto, los resultados obtenidos demuestran que la metodología empleada es adecuada para el estudio numérico de modelos inflacionarios y que puede extenderse a otros potenciales de interés cosmológico. El trabajo sienta así una base sólida para investigaciones futuras relacionadas con la caracterización del espectro primordial, la inclusión de perturbaciones tensoriales o el análisis de modelos inflacionarios más complejos.

Capítulo 5

Anexos

5.1 Códigos Utilizados

5.1.1 Dinámica de Fondo

En la Dinámica de fondo se hace uso de las librerías numpy y scipy.integrate para resolver el sistema de ecuaciones por medio del algoritmo descrito en el Flujo de trabajo de la Figura 2.1:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
#Modelo de Inflacion
S = 5e-5
v0 = 1.055885e-10
# funcion de potencial escogido
def f(x):
    return (1 - np.exp(-2/np.sqrt(6) * x))**2
#Derivadas numericas
def dfdx(x, h=1e-5):
    return (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)

def d2fdx2(x, h=1e-5):
    return (f(x + h) - 2*f(x) + f(x - h)) / (h**2)
#Condiciones iniciales
xi = 5.65      # valor inicial del campo para ~60 e-folds
yi = 1e-8     # velocidad inicial del campo (mejor que 0 exacto)
Ai = 1e-3     # factor de escala inicial
zi = np.sqrt(yi**2/6 + (v0*f(xi)/(3*S**2))) # Hubble inicial
#Sistema dinamico
def sys(var, T):
    [x, y, z, A] = var
    dxdT = y
```

```

    dydT = -3*z*y - v0*dfdx(x)/S**2
    dzdT = -0.5*y**2
    dAdT = A*z
    return [dxdT, dydT, dzdT, dAdT]

#Tiempo de integracion (unidades S*m_p)
T = np.linspace(0, 1000, 20000)
#Solucion del sistema de ecuaciones
sol = odeint(sys, [xi, yi, zi, Ai], T, rtol=1e-8, atol=1e-10, mxstep=100000)
x, y, z, A = np.transpose(sol)
phi, phi_t, H = x, y*S, z*S
#Calculo de magnitudes derivadas
N = np.log(np.maximum(A/Ai, 1e-15))
Ne = np.max(N) - N

eps = 1e-12 #epsilon para evitar divisiones por cero

epsH = -(z**2 + ((v0*f(x)/S**2 - y**2))/3) / (z**2 + eps)
etaH = -(-3*z*y - v0*dfdx(x)/S**2) / (y*z + eps)

ns = 1 + 2*etaH - 4*epsH
r = 16*epsH
Ps = (S*z)**2 / (8 * np.pi**2 * (epsH + eps))

aH = A*z
meff = (2.5*y**2
        + 2*y*(-3*z*y - v0*dfdx(x)/S**2) / (z + eps)
        + 2*z**2
        + 0.5*y**4 / (z**2 + eps)
        - v0*d2fdx2(x)/S**2)

#Almacenar todos los datos relevantes en un archivo.txt
np.savetxt('ESCRIBIR LA RUTA DONDE SE VAN A GUARDAR LOS DATOS',
           np.c_[T, N, Ne, x, y, z, aH, epsH, etaH, meff, Ps])

```

5.1.2 Método de Bisección

Para obtener el valor de potencial inicial V_0 normalizado a los valores medidos por Planck [11] se usa el método de bisección:

```

import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
S = 5e-5 # unidad de tiempo escalada
As_target = 2.1e-9 # Valor medido por Planck

```

```

# funcion de potencial escogido
def f(x):
    return (1 - np.exp(-2/np.sqrt(6) * x))**2
#Derivadas numericas
def dfdx(x, h=1e-5):
    return (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)

def d2fdx2(x, h=1e-5):
    return (f(x + h) - 2*f(x) + f(x - h)) / (h**2)
# sistema dinamico
def sys(var, T, v0):
    [x, y, z, A] = var
    dxdT = y
    dydT = -3*z*y - v0*dfdx(x)/S**2
    dzdT = -0.5*y**2
    dAdT = A*z
    return [dxdT, dydT, dzdT, dAdT]
# funcion que, dado un v0, integra y devuelve Ps en Ne=60
def compute_Ps_at_60(v0):
    xi, yi, Ai = 5.65, 1e-8, 1e-3
    zi = np.sqrt(yi**2/6 + (v0*f(xi))/(3*S**2))
    T = np.linspace(0, 1000, 20000)
    sol = odeint(sys, [xi, yi, zi, Ai], T, args=(v0,), rtol=1e-8, atol=1e-10,
    mxstep=100000)
    x, y, z, A = np.transpose(sol)

    N = np.log(np.maximum(A/Ai, 1e-15))
    Ne = np.max(N) - N
    eps = 1e-12
    epsH = -(z**2 + ((v0*f(x)/S**2 - y**2))/3) / (z**2 + eps)

    Ps = (S*z)**2 / (8 * np.pi**2 * (epsH + eps))

# interpolar Ps en Ne 60
if np.any((Ne > 59) & (Ne < 61)):
    idx = np.argmin(np.abs(Ne - 60))
    return Ps[idx]
else:
    return np.nan
# algoritmo de biseccion para encontrar v0 correcto
def tune_v0(v0_min=1e-12, v0_max=1e-8, tol=1e-12, max_iter=50):
    for i in range(max_iter):
        v0_mid = 0.5*(v0_min + v0_max)

```

```

Ps_mid = compute_Ps_at_60(v0_mid)

print(f"Iter {i}: v0={v0_mid:.3e}, Ps={Ps_mid:.3e}")

if np.isnan(Ps_mid):
    return np.nan

if abs(Ps_mid - As_target) < tol:
    return v0_mid

if Ps_mid < As_target:
    v0_min = v0_mid
else:
    v0_max = v0_mid
return v0_mid
#Ajuste de v0
v0_opt = tune_v0()
print(f"\n>>> v0 ajustado = {v0_opt:.6e}")

```

5.1.3 Método de Mukhanov-Sasaki

A partir de los datos obtenidos del cálculo de la dinámica de fondo se realizan los cálculos de Mukhanov-Sasaki con el siguiente código, cuyo Flujo de trabajo está descrito en la figura 2.2:

```

import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import os
import glob
base_dir = r"Ruta donde se guardaron los datos anteriores"
modes_dir = os.path.join(base_dir, "modes")
os.makedirs(modes_dir, exist_ok=True)
data_bg = np.loadtxt(os.path.join(base_dir, "nombre del archivo"))
#Parametros de modelos(cambiar con el modelo)
S = 5e-5
v0 = 1.056e-10 #Debe estar normalizada

#Derivadas
def f(x):
    return (1 - np.exp(-2/np.sqrt(6) * x))**2#Cambiar con el modelo
def dfdx(x,h=1e-5):
    return (f(x+h) - f(x-h))/(2*h)
def d2fdx2(x,h=1e-5):
    return (f(x+h) - 2*f(x) + f(x-h))/h**2
def find_index(Ne_value):

```

```

    """Buscar el indice en los datos de fondo que cumpla con Ne >= Ne_value"""
    return np.max(np.where(data_bg[:,2] >= Ne_value))
#Modos que se generan
Nk_list = np.linspace(31,60,30) # E-folds antes del fin de inflacion
#Tiempo que integra
T = np.linspace(0, 1000, 20000)
#Sistema
def system(var, T, k):
    x, y, z, A, v, v_T, u, u_T, h, h_T, g, g_T = var

    #Fondo
    dxdT = y
    dydT = -3*z*y - v0*dfdx(x)/S**2
    dzdT = -0.5*y**2
    dAdT = A*z

    # Fluctuaciones escalares (Mukhanov-Sasaki)
    dvdT = v_T
    dv_TdT = -z*v_T + v*(2.5*y**2 + 2*y*(-3*z*y - v0*dfdx(x)/S**2 )/z
    + 2*z**2 + 0.5*y**4/z**2 - v0*d2fdx2(x)/S**2 - k**2/A**2)
    dudT = u_T
    du_TdT = -z*u_T + u*(2.5*y**2 + 2*y*(-3*z*y - v0*dfdx(x)/S**2 )/z +
    2*z**2 + 0.5*y**4/z**2 - v0*d2fdx2(x)/S**2 - k**2/A**2)

    #Fluctuaciones tensoriales
    dhdT = h_T
    dh_TdT = -z*h_T - h*(k**2/A**2 - 2*z**2 + 0.5*y**2)
    dgdT = g_T
    dg_TdT = -z*g_T - g*(k**2/A**2 - 2*z**2 + 0.5*y**2)

    return [dxdT, dydT, dzdT, dAdT, dvdT, dv_TdT, dudT, du_TdT, dhdT, dh_TdT,
    dgdT, dg_TdT]
# Loop por modo
for Nk in Nk_list:
    # Numero de onda por modo (horizon exit)
    k = data_bg[find_index(Nk), 6]

    # Condiciones inciales: 5 e-folds antes del horizon exit
    xi = data_bg[find_index(Nk+5), 3]
    yi = data_bg[find_index(Nk+5), 4]
    zi = np.sqrt(yi**2/6 + (v0*f(xi)/(3*S**2)))
    Ai = 1e-3 * np.exp(77.4859 - (Nk+5))

```

```

# Condiciones iniciales: fluctuaciones (Bunch-Davies vacuum)
vi = 1/np.sqrt(2*k)
ui = 0
v_Ti = 0
u_Ti = -k*(1/np.sqrt(2*k))/Ai
hi = 1/np.sqrt(2*k)
gi = 0
h_Ti = 0
g_Ti = -k*(1/np.sqrt(2*k))/Ai

#EDO
sol = odeint(system, [xi, yi, zi, Ai, vi, v_Ti, ui, u_Ti, hi, h_Ti, gi, g_Ti],
              T, args=(k,), rtol=1e-8, atol=1e-10, mxstep=100000)

x, y, z, A, v, v_T, u, u_T, h, h_T, g, g_T = np.transpose(sol)

# Cantidades derivadas
Nt = 73.03
Ne = Nt - np.log(A/Ai)
aHk = (A*z)/k
epsH = -(z**2 + ((v0*f(x)/S**2 - y**2))/3)/z**2
zeta2 = (v**2 + u**2)/(2*epsH*(A/S)**2)
P_S = k**3 * zeta2/(2*np.pi**2)
h2 = (h**2 + g**2)/((A/S)**2)
P_T = 4*k**3 * h2/np.pi**2

#Guardar todos los datos
outfile = os.path.join(modes_dir, f"inf_MS_data_{Nk:.1f}.txt")
np.savetxt(outfile, np.c_[Ne, aHk, zeta2, P_S, h2, P_T])
print(f" -> Modo Nk={Nk} guardado en {outfile}")

```

5.2 Derivación de la ecuación de movimiento del inflatón para la aproximación Slow-roll

5.2.1 Acción para un campo escalar en espacio-tiempo curvo

La acción para un campo escalar ϕ acoplado mínimamente a la gravedad es:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L},$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ y el lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi).$$

5.2.2 Métrica FLRW y simplificación

Consideramos un universo homogéneo e isótropo (métrica FLRW):

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [dr^2 + r^2 d\Omega^2],$$

con componentes:

$$g_{00} = 1, \quad g_{ij} = -a(t)^2 \delta_{ij}, \quad g^{00} = 1, \quad g^{ij} = -\frac{1}{a(t)^2} \delta^{ij}.$$

Para un campo homogéneo $\phi = \phi(t)$:

$$\partial_i \phi = 0, \quad \dot{\phi} = \partial_0 \phi.$$

Entonces:

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = g^{00} \dot{\phi}^2 = \dot{\phi}^2.$$

El determinante métrico es:

$$\sqrt{-g} = a(t)^3.$$

5.2.3 Ecuación de Euler-Lagrange en espacio curvo

La ecuación de movimiento se obtiene variando S respecto a ϕ :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0.$$

Sustituyendo $\sqrt{-g} = a^3$ y $\partial_i \phi = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3} \partial_0 [a^3 g^{00} \dot{\phi}] &= \frac{1}{a^3} \partial_0 (a^3 \dot{\phi}) \\ &= \frac{1}{a^3} (3a^2 \dot{a} \dot{\phi} + a^3 \ddot{\phi}) \\ &= 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \ddot{\phi}. \end{aligned}$$

Los términos espaciales ($\mu = i$) son nulos. Por tanto:

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0.$$

5.2.4 Identificación de H y término de disipación

Definiendo el parámetro de Hubble $H = \dot{a}/a$:

$$\ddot{\phi} + 3H \dot{\phi} + V'(\phi) = 0.$$

Si se añade un término fenomenológico de disipación $\Gamma_\phi \dot{\phi}$ (debido a acoplamientos con otros campos):

$$\boxed{\ddot{\phi} + (3H + \Gamma_\phi) \dot{\phi} + V'(\phi) = 0}.$$

Esta es la ecuación (1.57) del texto.

5.2.5 Ecuación de Friedmann

La densidad de energía y presión para el campo escalar homogéneo son:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi).$$

La ecuación de Friedmann (con $\Lambda = 0$) es:

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho = \frac{8\pi\rho}{3m_{\text{pl}}^2},$$

donde $m_{\text{pl}}^2 = 1/G_N$ (en unidades $c = 1$).

En aproximación *slow-roll* ($\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$), $\rho \approx V(\phi)$, luego:

$$H^2 \approx \frac{8\pi V}{3m_{\text{pl}}^2}.$$

Esta es la ecuación (1.58) del texto

Bibliografía

- [1] Siddharth Bhatt, Swagat Saurav Mishra, Soumen Basak, and Surya N Sahoo.
Numerical simulations of inflationary dynamics: slow roll and beyond.
SciPost Physics Codebases, 2024.
- [2] Delia Perlov and Alex Vilenkin.
The Theory of Cosmic Inflation.
Springer, 2024.
- [3] Futamase T.Nakamaru T.
Uchu Yogo Zukan (Gran guía Visual del Cosmos).
blackiebooks, 2022.
- [4] Konstantinos Dimopoulos.
Introduction to cosmic inflation and dark energy.
CRC Press, 2020.
- [5] Antonio Riotto.
Inflation and the theory of cosmological perturbations.
INFN, Padova, 2002.
- [6] Scott Dodelson and Fabian Schmidt.
Modern cosmology.
Academic press, 2020.
- [7] Sean Carroll.
Las ideas fundamentales del Universo. Espacio, tiempo y movimiento.
arpa, 2023.
- [8] Ramon Cererols and Toni De la Torre.
La Ciencia de The big bang theory.
Fundació Dr. Antoni Esteve, 2018.
- [9] William Alexander Larin Escobar.

Pruebas de modelos inflacionarios basadas en observaciones de radiación cósmica de fondo, 2023.

- [10] Jerome Martin, Christophe Ringeval, and Vincent Vennin.
Encyclopædia inflationaris: Oviparous edition.
Physics of the Dark Universe, 2024.
- [11] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, Jonathan Aumont, Carlo Baccigalupi, Mario Ballardini, Anthony J Banday, RB Barreiro, Nicola Bartolo, S Basak, et al.
Planck 2018 results-vi. cosmological parameters.
Astronomy & Astrophysics, 2020.