



UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

ELABORACIÓN DE MATERIAL DIDÁCTICO PARA
LA CATEDRA DE MATEMÁTICA I PARA LA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS,
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Maestría en Didáctica de la matemática

Elaborado por: Pedro Javier Rivas Mejía RM07005

Asesor Externo: Miguel Cruz Ramírez, PhD

Asesor Interno: Walter Otoniel Campos Granados MSc.

Ciudad Universitaria, enero 2024

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR:

M.Sc. Juan Rosa Quintanilla

VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO:

MS.c. Roger Armando Arias Alvarado

SECRETARIO GENERAL:

Lic. Pedro Rosalfo Escobar Castaneda

FISCAL GENERAL:

Lic. Carlos Amilcar Serrano Rivera

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO:

Dr. Luis Gilberto Parada Gómez

VICE-DECANO:

Dr. José Nerys Funes Torres

SECRETARIA:

M.Sc. Ángela Gudelia Portillo de Pérez

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR DE ESCUELA:

MSc. Dimas Noe Tejada Tejada

ASESOR EXTERNO:

Miguel Cruz Ramírez, PhD

ASESOR INTERNO:

MSc. Walter Otoniel Campos Granados

Agradecimientos

Mi primer agradecimiento va dirigido al creador por darme la oportunidad de culminar este proceso más de mi vida.

De igual manera agradezco a todos mis familiares que me han apoyado de una u otra forma, a lo largo de este proceso, especialmente a mi hija que me inspira a ser mejor cada día.

También agradezco a los docentes encargados de impartirnos las materias ya que sin ellos este proceso no sería posible.

Agradezco también a mis asesores de tesis, el Doctor Miguel Cruz y al Master en Matemática Walter Otoniel Campos Granados por todo el apoyo brindado en el desarrollo de este trabajo.

También agradezco a mis amigos compañeros de la maestría por ser parte de mi formación especialmente a mi amigo Javier.

Agradezco además a todas las personas amigos, compañeros y conocidos, que de una u otra forma han creído en mi y me han dado palabras de aliento para seguir adelante.

Índice	Pág
Resumen -----	1
Introducción -----	2
Metodología -----	4
Capítulo I	
1. Referentes teóricos -----	5
1.1 Definición de material o recurso didáctico -----	7
1.2 Importancia de los materiales didácticos -----	13
1.3 Ventajas de los materiales didácticos -----	14
1.4 Dificultades o inconvenientes que genera el uso de los materiales didácticos -----	16
1.5 Clasificación -----	18
1.6 Tipos de material didáctico -----	19
1.7 El material didáctico como apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje -----	27
1.8 La evaluación del material didáctico -----	28
Capítulo II	
2. Propuesta, análisis y resultados -----	31
2.1. Estructura del material de texto -----	31
2.2. Resultados y Análisis -----	36
2.2.1 Resultados de los estudiantes -----	36
2.3. Descripción de las actividades -----	40
Conclusiones -----	41
Recomendaciones -----	42
Bibliografía -----	43
Anexos -----	48

RESUMEN

La eficacia y utilidad de un material didáctico esta medida por el grado de motivación y el aprendizaje que genera en el estudiante, por lo tanto, debe ser pensando, diseñado e implementado en su proceso de aprendizaje, es decir que, esos recursos deben tener en el centro al ser humano que se está formando, cambiando la idea equivocada de facilitarle al docente el desarrollo de las clases, si al final, este ya lo sabe; sumado a esto, con la emergencia sanitaria generada por el COVID-19 y el avance tecnológico en las comunicaciones, el proceso educativo ha experimentado una serie de transformaciones en cuanto a las modalidades educativas (virtual, semipresencial) que requieren la actualización de los docentes y los materiales utilizados por estos. El presente documento contiene un recurso didáctico cuyo fin último es ofrecer un método de aprendizaje efectivo para los estudiantes que cursan la asignatura de Matemática I, con los elementos necesarios para explicar y motivar a través de un diseño llamativo, práctico y con el desarrollo minucioso de ejemplos que están pensados en el estudiante y la utilidad de los mismos en su aprendizaje y la vida misma.

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza, los tiempos modernos exigen la adecuación de los contenidos de los planes y programas de estudio, para que estos realmente cumplan con su cometido en practicidad y utilidad, por tanto, es necesario la elaboración de materiales didácticos que representen un apoyo efectivo y práctico para los docentes y estudiantes, los cuales permitan alcanzar los objetivos del proceso de enseñanza-aprendizaje, y serán necesarios en el desarrollo de las clases y por cada una de las unidades, visto someramente pareciera una tarea sin mayor complejidad, sin embargo, si los materiales antes mencionados no son elaborados y estructurados de la forma adecuada no permitirán alcanzar los objetivos de enseñanza y no serán de utilidad para el educador y menos para el educando.

El presente material está dividido en tres unidades, las cuales representan la base de la asignatura Matemática II, por lo que resulta necesario que los estudiantes comprendan de manera adecuada los conceptos, definiciones y procesos desarrollados en dichas unidades y sobre todo que les resulten de utilidad en la resolución de problemas. En la primera unidad se describen las relaciones numéricas, en la segunda unidad se desarrollan las funciones y finalmente, en la tercera unidad se desarrollan la matriz y el determinante.

El fin último del presente material es generar una herramienta de utilidad para el docente y para el alumno, y que le facilite la comprensión de los contenidos desarrollados en cada una de las unidades antes mencionadas, teniendo como eje primordial la resolución de problemas, dado que la pandemia sanitaria del COVID-19 obligó a desarrollar las clases de manera virtual y semipresencial, es necesario que los estudiantes cuenten con un material que sirva de referencia para practicar los contenidos desarrollados en las clases.

El presente material (material tipo texto) tiene la estructura de libro y está enfocado en la guía y solución de problemas, por lo que, sin menospreciar la teoría, la intención de este material es fomentar la utilidad práctica de las matemáticas en cada una de las carreras que ofrece la facultad, y sin profundizar en definiciones complejas y difíciles de asimilar para los estudiantes.

El material está estructurado en dos columnas, una que posee lo grueso del contenido, y la otra donde se exponen notas, ilustraciones y algunos procesos que no estén especificados en el grueso del material, también podrá ser utilizado para que el estudiante pueda escribir sus propias conclusiones.

Contiene, además, una sección de ejemplos, los cuales están desarrollados e ilustrados de manera tal, que el estudiante de manera autodidacta pueda comprender y guiarse en todos los procesos; finalmente, cuenta con una guía de ejercicios, con la respectiva solución de los mismos.

METODOLOGÍA

El desarrollo de la investigación se realizó de la siguiente forma:

1. Revisión bibliográfica: se consultaron diferentes fuentes bibliográficas en las cuales se encuentren conceptos que son necesarios para la investigación además fuentes las cuales aborden los contenidos que componen la catedra de Matemática I, para elegir los aspectos que nos hagan alcázar los objetivos planteados el programa de dicha asignatura. Con esto se tendrá la base para el marco teórico y el material escrito.
2. Diseño del material didáctico: se pretende diseñar el material escrito de la asignatura Matemática I de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de El Salvador, el cual estará enfocado en la parte procedimental más que en la parte teórica.
3. El material se utilizó, durante el ciclo I-2023, con el objetivo de conocer la aceptación de los estudiantes hacia el material escrito, esta implementación estuvo dirigido a parte de los estudiantes que cursaron la asignatura en el ciclo I-2023, con el cual se realizó un pequeño análisis de los resultados; rescatando los aspectos positivos y negativos, luego se finalizó con las conclusiones y recomendaciones
4. Obtención de los resultados: se realizó una encuesta en línea a través de la herramienta Formularios de Google dirigida a los estudiantes en enlace: https://docs.google.com/forms/d/1LuopjVOOQ8LqsTefuCmEeAcWWH51fEeCrJo0FWnHrIQ/viewform?edit_requested=true, además se agrega en el anexo 3, con el propósito de conocer la aceptación del material por parte de los estudiantes de la facultad de ciencias económicas que cursan la asignatura Matemática I, posteriormente un breve análisis de los resultados; rescatando los aspectos positivos y negativos, finalizando con las conclusiones y recomendaciones

CAPÍTULO I

Referentes teóricos

Según se plantea en el artículo de González Marí (2010), se puede datar que el origen del material didáctico lo podemos ubicar en la tradición filosófica empirista de los siglos XVII y XVIII. Para los empiristas el conocimiento tiene su inicio en los sentidos. Así, Comenius publica en 1.592 una voracidad de la escuela materna. Es necesario presentar todas las cosas, en la medida en que sea posible, a los sentidos correspondientes; y que el discente aprenda a identificar las cosas visibles por la vista, los sonidos por el oído, los olores por el olfato...". Pero en este caso, fue el pensador de la ilustración Rosseau (1.712-1.778) el que puso las bases de lo que llama "aprendizaje por experimentación" y "educación sensorial": "Que el alumno/a esté al tanto de todas las experiencias, que haga todas aquellas que están a su alcance, y que descubra las demás por el mero hecho de la inducción.

Existen diferentes tipos de materiales didácticos, la importancia de su clasificación está en el aprovechamiento de sus características, para desarrollar, seleccionar o adaptar un recurso didáctico es de suma importancia tomar en cuenta que son un medio, no un fin.

Por tanto, estos recursos didácticos deben responder al objetivo educativo que se pretenden lograr y los contenidos temáticos que correspondan. Además, debe tomarse en cuenta a quién va dirigido ya que dependerá de sus capacidades, estilos cognitivos, intereses, conocimientos previos, experiencia o edad el que realmente cumpla su función.

Los materiales didácticos deben de favorecer el aprendizaje en los destinatarios, es importante incluir estrategias de enseñanza en el desarrollo de los contenidos, como diferentes estilos o colores de la fuente, recuadros, ejemplos, ilustraciones, espacios de apuntes, entre otros aspectos.

Las diferentes secciones en las que se organiza el material impreso o digital, para fines de aplicarse como manual para el estudiante, debe incluir: Portada, índice,

objetivo, introducción, desarrollo temático por unidades y el desglose temático. Cada unidad debe contar con su presentación, contener guías de trabajo; además, debe presentar bibliografía para que el estudiante tenga más fuentes donde instruirse.

Impartir una asignatura en nivel universitario parece una tarea sencilla, pero se tiene que tener claros muchos aspectos ya que ampliar los conocimientos, habilidades y actitudes de los estudiantes, resulta complejo ya que no todos cuentan con los mismos conocimientos previos. La planeación de un curso, en un proceso ordenado y organizado para garantizar el logro de los objetivos planteados en el programa de la asignatura a desarrollar. Parte de dicha planeación incluye el uso de los denominados “materiales didácticos” o “apoyos didácticos”. Es un hecho que la impartición del curso se beneficiará con este tipo de recursos, puesto que son los medios que auxilian la labor del facilitador al simplificar la comprensión de los contenidos a revisar. Estos materiales explican o demuestran o ilustran el tema, aportando elementos que propician la atención de los estudiantes para facilitar la comunicación e interacción entre el participante, el facilitador y los contenidos.

La importancia del material didáctico radica en la influencia que tienen en la percepción de los que estudiantes para ponerlos en contacto con el objeto de aprendizaje, ya sea de manera directa o indirecta.

En este texto se expone un material didáctico de la asignatura Matemática I, que se imparte en la Facultad de Ciencias Económicas, de la Universidad de El Salvador, los cuales pretenden ser herramientas de apoyo tanto a los estudiantes como a los docentes que imparten dicha cátedra.

1.1 DEFINICIÓN DE MATERIAL O RECURSO DIDÁCTICO

Antes de comenzar a dar una definición concreta, es preciso indicar que al principio se proporcionaron bastantes definiciones acerca de estos conceptos, con notables diferencias entre ellos.

En este caso Álvarez (1996, citado por González Marí, 2010) se centra únicamente en el material didáctico dejando de lado el concepto de recurso para hacer referencia a todo tipo de juego medio técnico o recurso idóneo para ayudar al alumnado a superar los problemas planteados. De igual manera Alsina, Burgués et Fortuny (1988) expresan que mediante el material didáctico engloban todos aquellos juegos, medios técnicos, recursos o aparatos capaces de proporcionarle una ayuda al alumnado para la comprensión y consolidación de conceptos fundamentales en las fases del aprendizaje.

Por otra parte, Gerna y Carrillo (1988, citado por González Marí, 2010) utilizan ambos términos, aunque dan a entender que el recurso es una noción más general que engloba el material didáctico.

A la hora de reflexionar acerca de la relación que se produce entre los recursos y materiales didácticos, Coriat (1997, citado por González Marí, 2010) hace visible la referencia sobre ambos conceptos. Dicho autor argumenta que los materiales didácticos son creados y diseñados específicamente con fines educativos, mientras que por el contrario los recursos los considera unos instrumentos no creados únicamente por el aprendizaje de determinados conceptos, nociones o ideas que el profesor decide si utilizarlo o no en la práctica. Por lo que Coriat (1997) señala que un buen material didáctico trasciende de la intención de uso general y admite varias aplicaciones; por ello no hay una raya que delimite claramente que es un material didáctico y que es un recurso.

Es importante destacar la definición que presenta Parcerisa, A (1996) acerca de los materiales didácticos, la cual indica “que los materiales didácticos son aquellos artefactos que empleados de distintas formas de representación (simbólica, objetos) ayudan y favorecen a la construcción de conocimiento, dentro de una estrategia de enseñanza más amplia”.

Tabla 1

Definición de recursos y materiales según Carretero, Coriat y Nieto (1955)

	RECURSOS	MATERIALES
Definición	Se entiende por recurso cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que el Profesor decide incorporar en sus enseñanzas.	Se distinguen de los recursos porque, inicialmente, se diseñan con fines educativos (Si bien, en general, un buen material didáctico trasciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones; por ello, no hay una raya que delimite claramente qué es un material y qué es un recurso).
Tipos	La calculadora, la fotografía y diapositiva, la prensa, los programas y anuncios de radio y TV, los vídeos, programas de ordenador de propósito general (procesadores de texto, hojas de cálculo, editores de gráficos, gestores de bases de datos), los juegos, el retroproyector y la historia de las matemáticas	Las hojas de trabajo preparadas por el profesor, los programas de ordenador de propósito específico (paquetes de estadística elemental, por ejemplo), materiales manipulativos, etc.

Cascallana (1988) llama *materiales estructurados* a los que estamos llamando *materiales*, y *no estructurados* a lo que llamamos *recursos*.

La historia de los materiales didácticos para la enseñanza de las Matemáticas no es reciente. El muy recomendable capítulo de Szendrei, en el Handbook (Bishop et All., 1996), hace un recorrido por el papel que han desempeñado los materiales en la enseñanza de las matemáticas. El artículo de Thompson, (1994) nos da una idea sobre el papel y las cualidades de los materiales.

Se entiende por material didáctico al conjunto de medios materiales que intervienen y facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos materiales pueden ser tanto físicos como virtuales, asumen como condición, despertar el interés de los estudiantes, adecuarse a las características físicas y psíquicas de los mismos, además que facilitan la actividad docente al servir de guía; asimismo, tienen la gran virtud de adecuarse a cualquier tipo de contenido (Morales, 2012).

Los **materiales didácticos**, también denominados *recursos didácticos*, *auxiliares didácticos* o *medios didácticos*, pueden ser cualquier tipo de dispositivo diseñado y elaborado con la intención de facilitar un proceso de enseñanza y aprendizaje. Los materiales didácticos son los elementos que emplean los docentes para facilitar y conducir el aprendizaje de los alumnos (libros, carteles, mapas, fotos, láminas, videos, software, entre otros).

También se consideran materiales didácticos aquellos materiales y equipos que nos ayudan a presentar y desarrollar los contenidos para que los alumnos trabajen con ellos para la construcción de los aprendizajes significativos. No existe un término unívoco acerca de lo que es un recurso didáctico, así que, es sumamente de importancia recalcar que, material didáctico es un medio de enseñanza que en un contexto educativo determinado facilita el desarrollo de las actividades formativas.

Material didáctico es aquel que reúne medios y recursos que facilitan la enseñanza y el aprendizaje. Suelen utilizarse dentro del ambiente educativo para facilitar la adquisición de conceptos, habilidades, actitudes y destrezas (ECURED, s/f).

Se entiende por material didáctico al conjunto de medios materiales que intervienen y facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje (Morales, 2012).

Como podrá observarse, la función de estos elementos es facilitar el aprendizaje ya que la intención “didáctica” es, precisamente, la acción de propiciar la enseñanza y de estimular, y motivar al capacitando para que los adquiera (Hernández, 2010). El aprendizaje es aquello que se hace con la finalidad fundamental de enseñar o instruir (RAE, s/f).

Estos materiales pueden ser tanto físicos como “virtuales” (cualquier tipo de elemento plausible de ser transmitido y captado por los medios que ofrecen las Tecnologías de la Información y la Comunicación) y asumen como condición, despertar el interés de los estudiantes, adecuarse a las características físicas y psicológicas (perceptuales y cognitivas) de los mismos, además que facilitan la tarea del docente como facilitador del proceso.

Hablando de aquellos que son “físicos” cualquier objeto puede funcionar como material didáctico cuando el docente le imprime dicha condición, pero todo, dependerá del contexto, del conocimiento previo de los estudiantes.

Según Cabero (2001), existe una diversidad de términos para definir el concepto de materiales didácticos, tales como los que se presentan a continuación:

1. *Medio* (Saettler, 1991; Zabalza, 1994)
2. *Medios auxiliares* (Gartner, 1970; Spencer-Giudice, 1964)
3. *Recursos didácticos* (Mattos, 1973)
4. *Medio audiovisual* (Mallas, 1977 y 1979)
5. *Materiales* (Gimeno, 1991; Ogalde y Bardavid, 1991)

Esta diversidad de términos conduce a un problema de indefinición del concepto, así como también de la amplitud con que éstos son considerados Cabero (2001, p 290).

Es decir, cada autor da un significado específico al concepto, lo que conduce a tener un panorama mucho más amplio en cuanto a materiales didácticos se refiere. La terminología utilizada para nombrar a los materiales didácticos da lugar a considerarlos, según Cebrián (Citado en Cabero, 2001 p. 290).

Todos los objetos, equipos y aparatos tecnológicos, espacios y lugares de interés cultural, programas o itinerarios medioambientales, materiales educativos que, en unos casos utilizan diferentes formas de representación simbólica, y en otros, son referentes directos de la realidad. Estando siempre sujetos al análisis de los contextos y principios didácticos o introducidos en un programa de enseñanza, favorecen la reconstrucción del conocimiento y de los significados culturales del currículum.

Son empleados por los docentes e instructores en la planeación didáctica de sus cursos, como vehículos y soportes para la transmisión de mensajes educativos. Los contenidos de la materia son presentados a los alumnos en diferentes formatos, en forma atractiva, y en ciertos momentos clave de la instrucción. Estos materiales didácticos (impresos, audiovisuales, digitales, multimedia) se diseñan siempre tomando en cuenta el público al que van dirigidos, y tienen fundamentos psicológicos, pedagógicos y comunicacionales.

Sin embargo, los términos *material* y *recurso* se emplean generalmente de manera unívoca y hasta viciosa. Afirma Odderey Matus que los *recursos didácticos* son todos aquellos elementos físicos que sirven de mecanismos auxiliares para facilitar y procesar los elementos de la enseñanza en vistas a lograr un aprendizaje posterior. Entre estos tenemos los lápices, marcadores, papel, pizarra, plastilina, hilo, disco compacto y otros. En cambio, los *materiales didácticos* son aquellos recursos ya *mediados* pedagógicamente, ya transformados para hacer más efectivo el proceso de enseñanza y aprendizaje, entre estos encontramos una hoja de aplicación (una hoja de papel con texto o imágenes puestas en él con una intención), una canción motivadora (grabada en un CD), el libro de texto, un papelógrafo (papelón con un esquema escrito sobre él), una pequeña maqueta hecha con plastilina (como modelo a ser imitado por los estudiantes), entre otros.

Funciones

Al momento de realizar los materiales didácticos es muy importante tomar en cuenta al público al que va dirigido con la finalidad que ese recurso realmente sea de

utilidad; entre las funciones que tienen los materiales didácticos se encuentran las siguientes (vid. Morales, 2012).

- Proporcionar información: un material didáctico tiene como función ofrecer información a una o varias personas, esta información que brinda debe ser de relevancia para el receptor, que principalmente se encuentra en un contexto educativo, el motivo de brindar la información por conducto de este medio, es para que el receptor pueda comprenderla con mayor facilidad.
- Cumplir con un objetivo: antes de realizar un material didáctico es primordial tener en claro el objetivo que se desea cumplir con éste, para que una vez que ya se haya determinado, se proceda a la realización de un material que cumpla con las características deseadas para satisfacer al objetivo.
- Guiar el proceso de E-A (enseñanza-aprendizaje): como bien se menciona en el punto anterior acerca de la importancia de los objetivos; los materiales didácticos ayudan a que el proceso de E-A no pierda su camino, es decir delimita los contenidos para no confundir a los estudiantes con información que no sea tan relevante.
- Contextualizar a los estudiantes: en los materiales didácticos se puede y deben incluirse imágenes u objetos que favorezcan al estudiante a relacionar lo que se le está explicando, en ocasiones se puede preparar información de lugares en donde de ningún modo han estado, es ahí donde los materiales tienen la función de contextualizarlos por medio de imágenes u objetos.
- *Factibilizar* la comunicación entre el docente y los estudiantes: los materiales didácticos deben estar creados a tal grado que cualquier persona pueda entenderlos; además, los materiales didácticos han manifestado cambios a través del tiempo en comparación con la educación tradicionalista, han generado estímulos en las relaciones entre los profesores y los alumnos, porque los primeros toman en cuenta las características de las personas a quienes va dirigido el material, y eso le permite a los estudiantes aportar ideas al momento de la explicación.
- Acercar las ideas a los sentidos: los materiales didácticos son tan diversos que pueden ser percibidos por los distintos sentidos (tacto, olfato, gusto, tacto

y vista), lo cual es un gran apoyo para que los estudiantes puedan vincular la información de una manera más personal, y algunos casos se puede llegar a relacionar con experiencias y así lograr que los aprendizajes sean significativos.

- “Motivar a los estudiantes; esta es una de las funciones más importantes que tienen los materiales didácticos, en años pasados, la educación era tan tradicionalista que no despertaba el interés de los estudiantes, todo era muy monótono, pero con la inclusión de los materiales didácticos a las aulas escolares, se ha ido despertando la curiosidad, creatividad, entre otras habilidades, que le permiten a los a los alumnos a prestar mayor atención en los contenidos que se abordan.”
- Por último, el *Diccionario ciencias de la educación*, reitera y agrega lo siguiente: “Despertar el interés del alumno; adecuarse a las características físicas y psíquicas del alumno; facilitar la actividad docente-discente; consistencia y simplicidad; eliminar porcentajes de riesgo en su manipulación; adecuarse a contenidos y metodología.” En otras palabras, empoderarse de la idea de la utilidad de lo que se aprende, no como acumular conocimiento sino como desarrollar herramientas que permitan enfrentar y resolver las dificultades que la cotidianidad ofrece.

1.2 IMPORTANCIA DE LOS MATERIALES DIDÁCTICOS

El material didáctico favorece el desarrollo de las habilidades en los alumnos, así como en el perfeccionamiento de las actitudes relacionadas con el conocimiento, a través del el lenguaje oral y escrito, la imaginación, la socialización, el mejor conocimiento de sí mismo y de los demás, por esto, el propósito del uso de los materiales didácticos ha ido cumpliendo una creciente importancia en la educación. Además, promueve la estimulación de los sentidos y la imaginación, dando paso al aprendizaje significativo. La importancia del material didáctico radica en la influencia que los estímulos a los órganos sensoriales ejercen en quien aprende, es decir, lo pone en contacto con el objeto de aprendizaje, ya sea de manera directa o dándole

la sensación de indirecta. Alsina (2004) en su artículo menciona, María Montessori afirmó “que el niño tiene la inteligencia en su mano” por lo que es evidente que aprenden a través de la manipulación y el juego con distintos materiales o recursos. Así, como años más tarde Piaget e Inhelder (1995) indicaron “que el niño aprende a partir de la acción sobre objetos”. Por lo que, podemos decir que la educación es cada vez más consciente de la importancia y de la necesidad que tiene el juego, la manipulación y la interacción activa del estudiante en el aprendizaje de las matemáticas. Como afirma Canals (2001) “si sabemos proponer la experimentación de forma adecuada en cada edad, y a partir de aquí fomentar el dialogo y la interacción necesaria, el material, lejos de ser un obstáculo que nos haga perder el tiempo o dificulte el paso a la abstracción, la facilitará en manera, porque fomentará el descubrimiento y hará posible un aprendizaje sólido y significativo”.

1.3 VENTAJAS DE LOS MATERIALES DIDÁCTICOS

El uso de los materiales didácticos en un aula de matemáticas para trabajar un determinado contenido genera numerosas ventajas o beneficios en una diversidad de ámbitos; tanto en el desarrollo personal y social del alumnado como en su nivel intelectual, ejerciendo una influencia educativa en el aprendizaje de dichos discentes.

Según González Marí (2010):

- Los materiales didácticos ofrecen actividades matemáticas atractivas y motivadoras para hacer cambiar la actitud del alumnado hacia el ámbito de las matemáticas.
- Permite progresar con eficacia a la mayoría de alumnos/as mejor que otros procedimientos, técnicas o medios.
- Permiten al alumnado a participar activamente y realizar actividades de manera autónoma.
- El trabajo con dichos materiales contribuye a proporcionar un entorno idóneo para la implantación de situaciones-problema, así como situaciones de aprendizaje significativas y entretenidas.

- Los materiales didácticos son flexibles; es decir se puede adaptar a cualquier nivel, grupo de alumnos/as e incluso cualquier actividad.
- Permiten el trabajo en grupo o en equipo por parte de los alumnos/as lo que genera que se produzca la interacción entre el alumnado posibilitando, el dialogo, debate y colaboración entre docente y discente.

Para que todas estas ventajas o beneficios citados anteriormente tengan su efecto positivo, es clave que el profesorado en gran medida cumpla una serie de requisitos. Como son que tienen que tener un conocimiento pleno sobre el uso del material didáctico que van a emplear, así como estar capacitado y preparado para llevarlo a cabo, ser consciente de la diversidad de los resultados que se pueden tener, saber adaptarlos a las circunstancias y características que presenta el grupo de clase y en último lugar que su utilización ha de ser previamente planificada, programada y con una finalidad clara sobre el objeto que se quiere alcanzar.

Las ventajas que aportan los materiales didácticos los hacen instrumentos indispensables en el proceso de enseñanza aprendizaje. Proporcionan información y guían el aprendizaje, es decir, aportan una base concreta para el aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal (Díaz-Barriga y Rojas, 2010), contribuyen en el aumento de los significados; desarrollan la continuidad de pensamiento, promueven el aprendizaje duradero y brindan una experiencia real que estimula la actividad cognitiva de los destinatarios; proporcionan, además, experiencias que se obtienen fácilmente mediante diversos materiales y medios con lo que se ofrece un alto grado de interés para los capacitados; dependiendo de la creatividad del autor del material didáctico, incluso pueden funcionar para evaluar el aprendizaje. Es decir, este tipo de elementos no sólo sirven para transmitir información, se pretende funcionen como mediadores entre la realidad y el estudiante.

En el mejor de los casos, cuando el material didáctico puede propiciar la independencia del estudio del documento, favoreciendo con esto el aprendizaje autogestivo (Berridi y Martínez, 2017).

1.4 DIFICULTADES O INCONVENIENTES QUE GENERA EL USO DE LOS MATERIALES DIDÁCTICOS

Una vez conocida y argumentada la importancia del uso de los materiales didácticos como de sus numerosas ventajas, también es evidente que en torno a ellos existen una serie de dificultades e inconvenientes. En este caso se hará referencia a dos tipos de dificultades, una más enfocada a las dificultades que el profesorado pueda tener y en segundo lugar en las dificultades y problemas que generan la inducción de los materiales didácticos en un aula. Dado que existe diferentes factores que afectan el uso correcto de los materiales didácticos en un aula que son el origen de estas dificultades.

1. Problemas y dificultades siguiendo a González Marí (2010):

- Económicos, por el elevado coste que presenta los materiales didácticos; aunque por el contrario ante esta situación se puede optar por la elaboración propia.
- Estructurales, ya que pueden dificultar el agrupamiento por la distribución de la clase por las condiciones físicas que presentan.
- Grupo de clase muy numeroso.
- Concepciones previas de alumnos/as profesor/a y padres “los juegos se realizan en el patio”, “los juegos generan mucho ruido” y “las buenas clases es donde hay absoluto silencio”.
- El desarrollo curricular: los programas que hay que acabar; pueden erradicar por completo el uso de los materiales didácticos.
- Exigencia al profesorado, en el sentido que trabajar con materiales didácticos requiere una mayor preparación, por lo que necesitaran más tiempo para el diseño de las clases.

2. Dificultades o problemas, siguiendo a Gallardo (2001): según este autor hay cuatro factores que son los causantes de las dificultades o problemas que pueden surgir al usar los materiales didácticos.
- Profesor/a: en el sentido que el profesorado determinará elegir o no el uso de un determinado material didáctico, en función de su formación didáctica y científica, así como dependiendo de la concepción que tengan acerca de las matemáticas. Por lo que el profesor/a que se plantea como objetivo principal que el alumno/a construya sus propias experiencias, verá necesario y justificará la introducción de los materiales didácticos. En cambio, los docentes que conciben la enseñanza mera transmisión de conocimientos no verán conveniente el uso de otros materiales, distintos de los más tradicionales “pizarra, tiza o libro de texto”. Teniendo muy en cuenta que el desconocimiento de la existencia de materiales didácticos es otro factor que condiciona su utilización.
 - Alumno/a: el interés, motivación, participación e implicación de los alumnos/as son factores que influyen directamente en la decisión de usar unos determinados materiales didácticos. Aunque es evidente que mediante ellos se generan una actitud más receptiva y positiva por parte de los discentes hacia las matemáticas. Por lo contrario, un grupo elevado de alumnos/as pueden dificultar la organización de la clase para trabajar.
 - Centro educativo: tal como señala Coriat (1997) “el profesor/a necesita fundamentalmente el apoyo del centro educativo y del resto de profesores que con su crítica, comentarios o aliento son los mejores interlocutores para promover o inhibir el uso sistemático y sensato de materiales didácticos”. Por lo tanto, hay que indicar que las decisiones del profesor/a van condicionadas sobre todo por la cultura del centro donde trabaja. Añadiendo que no todos los centros educativos disponen de aulas adecuadas o específicas para el trabajo con determinados materiales didácticos.
 - EL contenido matemático a estudiar, plantea al profesorado una serie de cuestiones o problemáticas metodológicas que obviamente influyen en el uso

de los materiales didácticos. Por ejemplo, al docente le surge a entorno ello preguntas del estilo de: ¿es adecuado emplear este tipo de material para trabajar ese contenido matemático?, ¿se está produciendo algún tipo de aprendizaje como consecuencia del material utilizado?, ¿el material se usará ya preparado o lo construyen los propios alumnos? Y por último lugar una de las preguntas que el profesorado se hace con mayor persistencia y le causa mayor temor es ¿cómo evaluamos a los alumnos/as mediante la utilización de los materiales didácticos? Metodología de los distintos materiales didácticos.

1.5 CLASIFICACIÓN

Una clasificación de los materiales didácticos que conviene indistintamente a cualquier disciplina es la siguiente (Nérici, 1985 p. 284):

1. **Material permanente de trabajo:** Tales como el tablero y los elementos para escribir en él, videoproyectores, cuadernos, reglas, compases, computadores personales.
2. **Material informativo:** Mapas, libros, diccionarios, enciclopedias, revistas, periódicos, etc.
3. **Material ilustrativo audiovisual:** Posters, videos, discos, etc.
4. **Material experimental:** Aparatos y materiales variados, que se presten para la realización de pruebas o experimentos que deriven en aprendizajes.
5. **Material Tecnológico:** Todos los medios electrónicos que son utilizados para la creación de materiales didácticos. Las herramientas o materiales permiten al profesor la generación de diccionarios digitales, biografías interactivas, el uso de blogs educativos y la publicación de documentos en

bibliotecas digitales, es decir, la creación de contenidos e información complementaria al material didáctico.

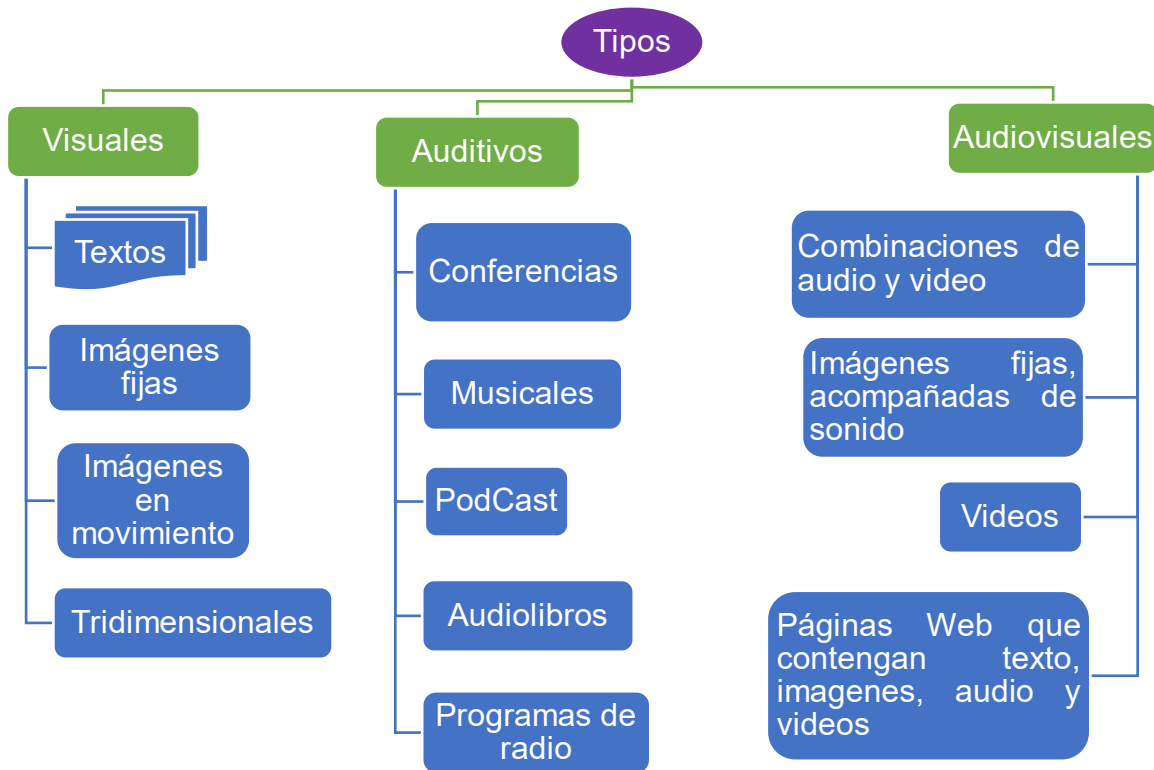
Otra forma de clasificar está en la aportación de Imídeo Nérici (1969).

- Permanentes: Los tableros, periódico mural, carteles y los similares para escribir en ellos, videoproyectores, cuadernos, reglas, compases, computadores.
- Informativos: Mapas, libros, cuentos, diccionarios, enciclopedias, revistas, periódicos, artículos, etc.
- Ilustrativos: audiovisuales, posters, videos, discos, etc.
- Experimentales: Aparatos y materiales variados que se presten para la realización de pruebas o experimentos que deriven en aprendizajes.
- Tecnológicos: Todos los medios electrónicos que son utilizados para la creación de materiales didácticos. Las herramientas o materiales permiten al profesor la generación de diccionarios digitales, biografías interactivas y la publicación de documentos en bibliotecas digitales didáctico.

Más allá de estas clasificaciones, lo importante, es la intención educativa que se incluye en su elaboración o adaptación.

1.6 TIPOS DE MATERIALES DIDÁCTICOS

Diversos elementos pueden ser utilizados como apoyos didácticos y sus características nos llevan a intentar clasificarlos para Existen diferentes formas de clasificar a los materiales didácticos, lo importante es tener en cuenta sus características para aprovecharlas.



La selección de materiales didácticos

Para que un material didáctico resulte efectivo y propicie una situación de aprendizaje exitosa, no basta con que se trate de un *buen material*, ni tampoco es necesario que sea un material de última tecnología. Se debe tener en cuenta su calidad objetiva y en qué medida sus características específicas (contenidos, actividades, entre otras) están en consonancia con determinados aspectos curriculares del contexto educativo:

Los objetivos educativos que se pretenden lograr. Aquí ha de tomarse en cuenta si el aprendizaje pretendido es de tipo declarativo, procedimental o actitudinal.

Los contenidos que se van a abordar, que deben estar en sintonía con los objetivos.

Las características de los destinatarios (estudiantes) que los utilizarán, como capacidades, estilos cognitivos, intereses, conocimientos previos, experiencia o edad.

El contexto físico en el que se desarrolla el curso y donde pensamos emplear el material que se está seleccionando; por ejemplo, si se trata de un programa multimedia por Internet y los destinatarios no cuentan con acceso a éstos debido al tipo de dispositivo móvil o computadora.

Las estrategias didácticas que acompañarán la utilización del material, como el uso de negritas, color de la fuente, recuadros, ejemplos, ilustraciones, etc. El lenguaje también es de suma importancia, el discurso que se expone en los materiales debe ser comprensible para los destinatarios. En medida de lo posible, todo material al que se le conceda el calificativo de didáctico debería promover la autoevaluación, acompañada de la retroalimentación de ejercicios que ayuden a confirmar lo que se va aprendiendo.

La selección de los materiales a utilizar con los estudiantes siempre se realizará contextualizada en el marco del diseño de una intervención educativa concreta, considerando todos estos aspectos y teniendo en cuenta los elementos curriculares particulares que inciden. La cuidadosa revisión de las posibles formas de utilización del material permitirá diseñar actividades de aprendizaje y metodologías didácticas eficientes que aseguren la eficacia en el logro de los aprendizajes previstos. Muy importante es tomar en cuenta que los materiales didácticos son un medio, no un fin; entonces su selección, elaboración o adaptación dependerá de la función que se pretende, siempre en congruencia con los objetivos de aprendizaje y los contenidos respectivos.

MATERIALES AUDIOVISUALES

Dentro de los elementos materiales didácticos, la imagen ya sea en movimiento o fija, dibujo, esquema o fotografía, probablemente es el elemento más llamativo, dado que logra captar antes la imagen que cualquier texto.

La imagen puede ser interpretada o comprendida de inmediato por cualquier persona independientemente de su género, edad y cultura. Sin embargo, el lenguaje visual requiere de un aprendizaje particular para su refinamiento y comprensión.

Las imágenes funcionan como un mediador entre el universo y las personas, en la lectura de cada imagen intervienen factores culturales e individuales. Para la elaboración de material didáctico visual se recomienda usar imágenes sencillas y esquemáticas de alto contraste, con excelente resolución para la explicación de partes o estructuras.

El sonido es el elemento que llega de forma más directa a las emociones, si se utiliza adecuadamente, éste puede lograr aprendizajes significativos en los estudiantes, porque a través de las voces y efectos, se reconstruyen en la mente, no sólo como sonidos, sino que producen imágenes que permiten enriquecer en significado, algo que genera un medio audiovisual, pues fomenta la imaginación.

El lenguaje audiovisual es unisensorial, y aunque pudiera parecer una desventaja, se compensa por el hecho de sugerir el lenguaje sonoro, pues se integra por cuatro elementos: la palabra hablada, la música, el silencio y los efectos sonoros.

Los medios sonoros permiten recordar utilizando el sistema de representación auditivo de manera secuencial y ordenada. No relacionan conceptos o elaboran definiciones abstractas con la misma facilidad que el sistema visual, y no es tan rápido, sin embargo, es fundamental en el aprendizaje de los idiomas, y naturalmente de la música.

La tecnología ha avanzado permitiendo incorporar los sonidos de diversas formas a los materiales didácticos. El sonido por sí mismo tiene la ventaja de promover la introspección, el análisis y la creatividad.

Además, la generación de sonido es mucho fácil que la creación de un video o una animación, pero deben tomarse algunas consideraciones para la obtención del aprendizaje: el sonido debe ser nítido para una comprensión fácil, no debe presentar la misma información a través de un texto escrito, ya que el receptor puede confundirse.

Los principales factores que se deben tomar en cuenta a la hora de elaborar materiales de comprensión auditiva son los siguientes: seleccionar material auténtico, permiso para utilizar el material elegido, duración del material, problemas que tiene el estudiante para desarrollar su comprensión auditiva, evaluación, y seleccionar material auténtico. (Morales, 2012)

Medios audiovisuales

De la fusión de los medios auditivos y visuales, surge una poderosa herramienta en el aprendizaje que son los medios audiovisuales, éstos permiten atender a una variada selección de formatos que obedecen a los diferentes objetivos para cada materia. La composición puede también incluir la interacción con el usuario, lo cual resulta muy beneficioso para la educación, debido a que cada uno de estos medios desarrolla su propio lenguaje, es necesario aprender a interpretarlos si se desea construir conocimiento a través de la combinación de tales medios.

Se debe tener cuidado cuando se combinan textos o sonidos con imágenes, debido a que puede darle un significado totalmente distinto al que se desea transmitir, pero si se logra una buena combinación, se convierte en un excelente material.

El lenguaje audiovisual es una mezcla de sonido, palabra e imágenes fijas o animadas.

Tabla 2

Descripción de medios audiovisuales

Medio	Texto: Palabra escrita	Imagen visual en movimiento con imagen sonora.	Multimedia
Tipo de percepción	Visual	Audiovisual	Audiovisual
Cómo se percibe	Es impresión tradicional en monitor o pantalla.	En monitor o pantalla con bocina o audífonos.	Combinación de las anteriores.

Medio	Texto: Palabra escrita	Imagen visual en movimiento con imagen sonora.	Multimedia
Características para su uso educativo	Permite tomarse el tiempo necesario para comprender. Es sencillo regresar para releer, analizar y relacionar ideas.	Ofrece excelentes posibilidades para el uso educativo, aunque puede ser cara y	Ofrece mayor variedad y flexibilidad, puede favorecer la sorpresa, generación de la atención, reflexión crítica y creatividad.
Ejemplos	<ul style="list-style-type: none"> • Libros • Apuntes • Folletos • Libros Electrónicos 	<ul style="list-style-type: none"> • Videos • Películas • Cortometrajes • Programa de televisión 	<ul style="list-style-type: none"> • Enciclopedias en disco compacto o en línea • Sitios web interactivos Entornos visuales de aprendizaje

Material didáctico impreso. El manual del participante

Los materiales impresos codifican información mediante la utilización del lenguaje textual combinándolo con representaciones icónicas y que en su mayoría están producidos por un tipo de mecanismo de impresión (física o digital). Estos recursos son muy buena opción para la representación de conceptos abstractos, razonamiento lógico y argumentación; también permite presentar gráficas, partituras, dibujos, diagramas y otro tipo de representaciones de la realidad.

También, el medio impreso permite la representación de información secuencial o lineal para ser revisado de manera aleatoria (Escamilla, 1993).

Con base a las características mencionadas arriba, podemos encontrar una diversidad de recursos que faciliten la enseñanza. Toda vez que nuestro objeto de estudio es la capacitación, revisaremos las características de una de tantas opciones, de manera específica, las del Manual de participante. El tema cobra relevancia si tomamos en cuenta que cada vez más se desarrollan cursos a distancia bajo los principios de la enseñanza mediatizada, donde intervienen distintos medios y recursos didácticos que favorecen la comunicación y el estudio individualizado mediante la interrelación y el diálogo (D'Agostino y cols, 2005).

Este tipo de manuales están dirigidos al destinatario del curso o taller que atiende a un programa de capacitación y es un elemento para presentar cuando el facilitador pretende certificarse en alguna de las normas que califican sus competencias (CONOCER, 2007, 2008, 2012 y 2012b).

DISEÑO Y DESARROLLO DE MATERIAL DIDÁCTICO

Diseñar es crear, construir o edificar algo con la meta de satisfacer o cubrir una necesidad del mejor modo posible. En el caso del material didáctico, es importante tomar en cuenta que el material sea útil con relación a la mejor comprensión de un concepto, principio o hecho de la materia o asignatura dentro de un contenido de estudio.

Para que esto sea eficiente (el material didáctico), ha de precisarse el objetivo que se persigue en relación con el contenido en cuestión, el nivel de aprendizaje o grado de profundidad del mismo, el usuario, estudiante o aprendiz y el papel que jugará el docente con respecto al propio material.

El objetivo se refiere a lo que se precisa aprender de todo lo presentado en los contenidos, qué es lo más relevante.

En cuanto al nivel de aprendizaje o grado de profundidad de éste, significa establecer qué posibilidad del manejo de la información se está buscando, si es sólo

uno superficial como los datos, fechas o ubicaciones, se trata del análisis de las relaciones existentes entre los diversos componentes que conforman una estructura concreta u abstracta.

El aprendiz, estudiante o usuario puede presentar características tales como la edad, aprendizajes previos incipientes o más especializados. Si posee características físicas completas o no, o tiene algún déficit en algún sentido.

Todo lo descrito será la causa que precise la acción del docente. Como guía o modelo del manejo, diseño, desarrollo o uso del material didáctico.

María Montessori recomienda que los materiales sean cuidadosamente diseñados, atractivos, sencillos, del tamaño del niño, con su propio control de error, deben progresar de lo sencillo a lo complejo, de lo concreto a lo abstracto y estar confeccionados para que el estudiante encuentre en ellos sólo una dificultad por solucionar y no muchas. Los materiales didácticos deben estar diseñados cuidadosamente para que los errores, al igual que los éxitos resulten evidentes. (Morales, 2012)

Decroly expone tres bases importantes para tipos de recursos que se deben utilizar en el proceso educativo:

1. Los materiales palpables, accesibles a los sentidos, para lograr el desarrollo de una percepción o impresión.
2. Los materiales abstractos con recuerdos, imágenes, textos, para llegar a ideas más generales.
3. Las manifestaciones del pensamiento, sea por la apropiación de la materia por trabajos manuales o por el lenguaje gráfico hablado.

1.7 EL MATERIAL DIDÁCTICO COMO APOYO AL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

El proceso de enseñanza-aprendizaje es el que se presenta para su estudio y mejor comprensión mediante tres principios reguladores de tal proceso, a saber:

1. Principio del carácter relativo de los niveles ascendente de dificultad.
2. Principio del tránsito de la adquisición del conocimiento, de lo simple a lo complejo.
3. Principio de las relaciones dialécticas entre las categorías concreción y abstracción (deducción eh inducción).

Esto se establece en las escuelas o instituciones educativas, por medio de la organización curricular en los planes y programas de estudio de las diversas escuelas o instituciones de educación.

La curricula toma en cuenta también, los diferentes tipos de instalación para un aprendizaje efectivo y los materiales didácticos adecuados a las mismas.

Por ejemplo, un aula o salón de clases tipo laboratorio es adecuado para la enseñanza y aprendizaje de las ciencias como biología, química o física. Un aula o salón de clases tipo centro de cómputo es conveniente si lo que se piensa enseñar y aprender es en relación a las computadoras en su manejo o construcción, por ejemplo.

Por ejemplo, en la enseñanza de matemáticas el docente hará uso en un primer momento de material sencillo y manipulable para ilustrar la suma o la multiplicación de cifras de un sólo dígito como el ábaco. Al ir profundizando el conocimiento aritmético tal vez sería recomendable el uso de tablas con las relaciones del algoritmo con distintos números. Finalmente, el uso de ilustraciones (dibujos,

comics) para resolver problemas de compra venta en una tienda apoyaría la enseñanza y aprendizaje de situaciones más complejas.

Los materiales didácticos han sido utilizados en todos los niveles de la enseñanza, y son parte indispensable del diseño curricular de toda carrera docente. Investigaciones del tema afirman su importancia y su apoyo al proceso educativo.

Quienes están en estos días aprendiendo anatomía en las aulas de medicina, pueden tener aprendizajes con el uso de figuras y paulatinamente usar materiales cada vez más especializados, es decir, pasar de figuras a modelos y de modelos simples a modelos especializados y simulaciones de órganos con cada vez más semejanza con la realidad, en ejercicios que van de la simple identificación a la ubicación y manejo apropiado ante alguna lesión o herida superficial o grave (Morales, 2012).

1.8 LA EVALUACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO

La evaluación, que se concibe como un proceso sistemático, presente a lo largo de todo el transcurso de conocimiento, es la que retroalimenta en forma permanente al maestro sobre su quehacer docente y le permite continuar de acuerdo con lo planeado, o enmendar rumbos conforme los resultados que va obteniendo.

Para que las decisiones que el maestro tome sean lo más correctas posibles, la evaluación debe contemplar todos y cada uno de los diferentes elementos que inciden en el proceso de instrucción, y es en este contexto donde la evaluación de los materiales didácticos tiene sentido.

Por lo tanto, es importante tomar en cuenta tales situaciones para rescatar lo que sea valioso de tal experiencia. Recuérdese que los materiales didácticos al ser evaluados en todo sentido brindan una retroalimentación rica y precisa que nos permitirá tomar decisiones en el ámbito educativo, respaldando en los resultados.

Si los materiales didácticos se consideran integrados dentro de la situación global y sistemática de la instrucción, se evaluarán en ese contexto. Por tanto, el criterio básico para realizar la evaluación serán los objetivos del aprendizaje propuestos para esa situación de instrucción.

Es fundamental observar criterios tales como: los psicológicos, de contenido, pedagógicos, técnicos. En cuanto a los psicológicos, se refiere a que, si el material logra motivar al estudiante, si el lenguaje empleado es adecuado, si capta la atención, y si se propicia la obtención de actitudes positivas. Si se trata del criterio de contenido, éste radica en si es actual o vigente, si es cierto o veraz, relevante, suficiente, entre otros.

Por lo que respecta al criterio pedagógico, éste toma en cuenta la parte estructural del material, es decir, si se alcanzan los objetivos propuestos de aprendizaje, si se presenta de forma gradual la información, de lo fácil a lo difícil, de lo concreto a lo abstracto o de lo simple a lo complejo. Se pondera si el lenguaje que se utiliza es claro, preciso y sencillo.

Los criterios técnicos aplican en lo relacionado con la calidad del material, por ejemplo: si es de sonido, si éste es claro y nítido, la fidelidad del sonido, entre otros. Por ejemplo, el tono o el volumen son importantes en el caso de la enseñanza de idiomas, si la dicción captada por el oído es la precisa.

Para los materiales impresos o visuales: la distribución de los párrafos, la calidad del papel, si existe un índice o bibliografía, por ejemplo, deben ser tomados en cuenta: el tamaño de la letra, el interlineado, los márgenes, la ortografía, el uso de imágenes, el color y sus tonalidades, los contrastes, la legibilidad. Algunos de los criterios anteriores también aplican para los materiales audiovisuales.

En cuanto a los materiales relativos a los sentidos del olfato, tacto o gusto, es decir, los kinestésicos, es importante señalar que también aplican criterios de calidad en cuanto a su hechura y aplicación en los criterios antes mencionados.

Es importante subrayar el hecho de que el material didáctico es necesario para tener una mejor oportunidad de aprendizaje.

¿Es posible que un texto concreto pueda ser un obstáculo para el aprendizaje más que una ayuda? Como indica Johnsen (1996), “los malos textos educativos son una verdadera calamidad para cualquier nación; los buenos textos, en cambio, producen un beneficio incalculable y constituyen una inversión en nuestro futuro internacional” (p.15).

Roseman, Kulm y Shuttleworth (2001), afirman: Hoy los libros de texto abarcan demasiados temas sin desarrollar ninguno de ellos en condiciones. Los conceptos centrales no se cubren con la suficiente profundidad como para dar al estudiante la oportunidad de comprenderlos verdaderamente. Mientras que muchos libros presentan las ideas clave que se describen en los estándares, pocos libros ayudan a los estudiantes a aprender esas ideas o a los profesores a enseñarlas correctamente (p. 56). En otras palabras, los libros ofrecen ideas sueltas, sin tocar los temas importantes y necesarios a profundidad y de manera útil para los estudiantes y sus vidas cotidianas.

Fernández Bravo (2010) hace hincapié en los enunciados de los problemas, tanto en los que aparecen en los libros de texto de matemáticas, como en los que proponen los profesores o crean los propios niños, e indica las consecuencias que pueden tener para el aprendizaje el trabajar con problemas mal enunciados.

Capítulo 2

Propuesta, análisis y resultados

2.1. Estructura del material de texto

El material escrito de la asignatura de Matemática I, se ha dividido en tres secciones, en cada una de ellas se aborda una unidad. Todo el material posee una estructura homogénea, eh incluye los elementos que se describen a continuación.

- 1) **Portada:** se especifica el nombre de la asignatura, entre otros aspectos generales.
- 2) **Introducción:** proporcionar un panorama de los contenidos a estudiar en cada uno de los capítulos, además, da una orientación sobre la forma de trabajo a desarrollar en el material.
- 3) **Objetivos:** se describen los objetivos planteados, en el programa de la asignatura, a alcázar al finalizar el estudio de los contenidos por parte de los estudiantes.
- 4) **Mapas conceptuales:** se describen los contenidos planteados, de forma general (todo el contenido), y por unidad (capítulo) de trabajo, con esto los estudiantes conocen de forma anticipada todos los contenidos que se desarrollaran por capítulo.
- 5) **Parte Teórica:** se exponen las definiciones, de forma lógica y natural, sin profundizar en aspectos complejos.
- 6) **Ejemplos:** se proporciona problemas con diferentes niveles de dificultad, sencillos, los cuales se resuelven aplicando el contenido actual y otros de mayor complejidad en los cuales se aplican contenidos de las unidades anteriores.

- 7) **Guía de trabajo:** presenta una serie de problemas y ejercicios de diferentes niveles de dificultad, para la práctica y de esta forma puedan construir sus propios conocimientos sobre la resolución de problemas y ejercicios relacionados con los temas abordados en los diferentes capítulos.
- 8) **Respuesta a las guías:** se presenta las respuestas de los problemas y ejercicios presentados en las diferentes guías de trabajo.
- 9) **Referencias:** contiene, bibliografía sobre libros para los que quieran y tengan curiosidad por conocer más sobre los temas abordados en las unidades.
- 10) **Bibliografía:** contiene textos los cuales son recomendados, para poder reforzar conceptos necesarios y complementarios, para el estudiante.

Entre otras cosas, dicho material posee un diseño diferente y atractivo, para las definiciones y los ejemplos, de manera que los estudiantes se motiven. Además, está estructurado a dos columnas, la primera en las cual se presentan algunos aspectos que no se mencionan en el grueso del material, procedimientos, notas, entre otros, además puede ser utilizado para que los estudiantes escriban sus propias conclusiones o detalles que les facilite el aprendizaje.

En estos tiempos en los cuales la educación ha dado un giro importante, es necesario contar con herramientas que faciliten y apoyen el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Especialmente es necesario que las herramientas que se les proporcionen a los estudiantes sean claras y de forma gradual, es decir, los ejemplos iniciales deben de contar con todos los procesos necesarios sin obviar ninguno, ya que, aunque para el docente sean evidentes para ciertos estudiantes no posteriormente se pueden ir reduciendo algunos detalles con el objetivo que los estudiantes vayan analizando dichos detalles.

En la actualidad los estudiantes se encuentran en modalidades híbridas, es decir virtual, presencial y a distancia, algunos de estos además de estudiar, trabajan, requiriendo un esfuerzo mayor. Realizar tareas y repasar contenidos por las noches o en los momentos que tomas sus descansos, por esto, si ellos se encuentran con materiales escuetos, se desmotivan y abandonan las asignaturas.

Figura 1

Enunciado de ejemplo del material escrito

Ejemplo 1.10

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad lineal

$$3x - 1 < 6x + 4 \leq 4x + 13.$$

Figura 2

Ejemplo de definición del material escrito

Definición 1.2: Intervalo

Es un subconjunto infinito de números reales comprendidos entre dos valores fijos, llamados extremos del intervalo.

Figura 3

Ejemplo de tablas de variación del material escrito

	$-\infty$	-2	$1/2$	3	$+\infty$
$1 - 2x$	+	+	●	-	-
$x + 2$	-	○	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	○	-
$\frac{1 - 2x}{(x + 2)(3 - x)}$	-	+	-	+	+

Es importante tener presente que la visualización es muy importante en la asimilación de nuevos conocimientos, por ende, el material cuenta con

representaciones para apoyar dicho aspecto, el material completo se encuentra en el anexo 2.

Figura 4

Ejemplo de grafica de una relación del material escrito

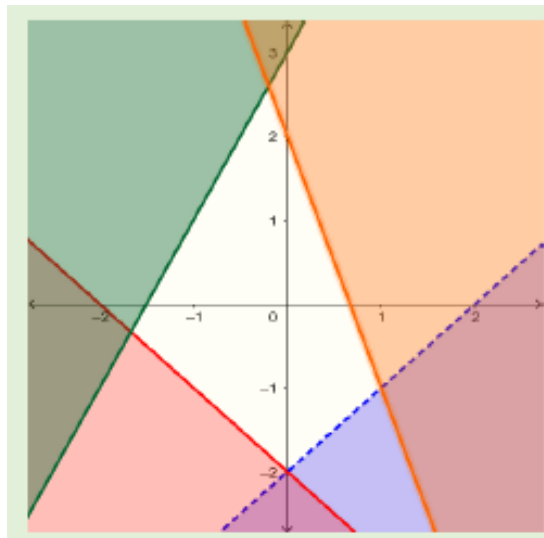


Figura 5

Ejemplo de grafica de una función del material escrito

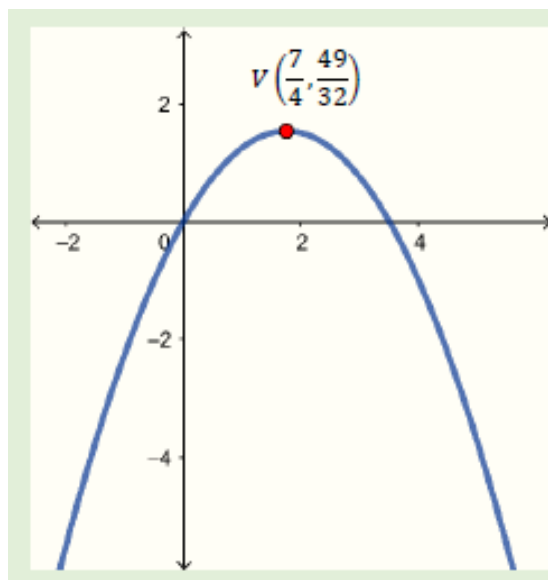


Figura 6

Ejemplo de esquema de una relación del material escrito

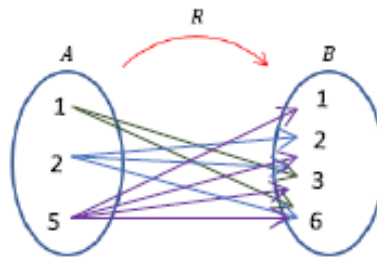


Figura 7

Esquema base del método del pivote

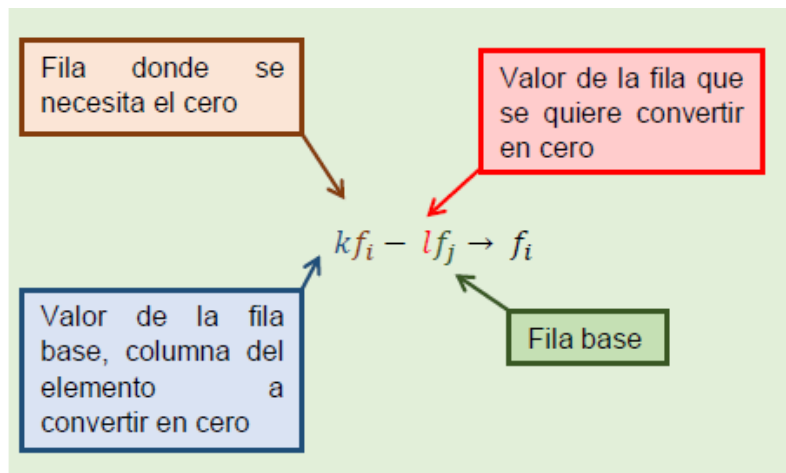


Figura 8

Desarrollo de ejercicio con procesos auxiliares al costado izquierdo

$$\begin{aligned} b^{n+m} &= b^n \times b^m \\ 5^{2x} &= (5^x)^2 \\ 5^{x+2} &= 5^x \times 5^2 \\ &= 5^x \times 25 \\ &= 25 \times 5^x \end{aligned}$$

$$5^0 = 1$$

b) $5^{2x} + 5^{x+2} = 26$

Primero.

$$5^{2x} + 25 \times 5^x - 26 = 0$$

Asiendo $u = 5^x$.

$$u^2 + 25u - 26 = 0$$

$$(u + 26)(u - 1) = 0$$

Entonces $u = -26$ y $u = 1$.

Es decir $5^x = -26$ y $5^x = 1$.

$5^x = -26$ no es posible.

$5^x = 1$, se cumple si $x = 0$.

2.2. Resultados y Análisis

Para la recolección de la información sobre la aceptación del material escrito se realizó una encuesta a tres grupos de la asignatura de matemática I, de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de El Salvador, por medio de Google Forms, con el objetivo de conocer los aspectos que los estudiantes consideran positivos en el material y aquellos en los cuales se tienen que mejorar.

Se realizó con dichos grupos, ya que únicamente ellos contaban el material para el desarrollo de sus clases, de los 130 estudiantes inscritos en la asignatura matemática I en dichos grupos, en el ciclo I-2023, solo 117 completaron el formulario, el cual se realizó luego de una evaluación, con el objetivo que dichas opiniones fueran más concretas.

2.2.1 Resultados de los estudiantes

Los datos obtenidos son muy satisfactorios. Ya que los aspectos analizados todos obtuvieron una nota mayor a 9, de forma resumida se presenta una tabla 3 que describe los promedios de los aspectos según los estudiantes, los demás resultados se presentan en los anexos (del 5 al 13) por medio de tablas y gráficos de barra.

Tabla 3

Promedios de las calificaciones de las características del material escrito

Característica	Promedio
La estructura.	9.4
La redacción.	9.3
Motivación que genera.	9.3
La cantidad de ejercicios resueltos.	9.0
Claridad en el desarrollo de ejercicios.	9.3
Construcción de esquemas.	9.3

Característica	Promedio
Las notas colocadas al costado izquierdo.	9.3
Los procesos colocados al costado izquierdo.	9.1
Las operaciones colocadas al costado izquierdo.	9.1
Promedio general	9.23

En la tabla 3 se puede observar que la estructura del material es la característica con mayor promedio 9.4, es decir que lo que más les ha gustado del material escrito es la estructura del mismo, de la misma manera se puede observar que la característica con menos promedio es la cantidad de ejercicios con 9.0, para profundizar en este aspecto en la parte de preguntas abiertas, se comenta que la cantidad de ejercicios está bien, pero se podrían agregar más para efectos de práctica.

Además, se puede observar que las notas, las operaciones y los procesos que se realizan al costado izquierdo del material, han sido vistos de buena manera por los estudiantes, es decir, los estudiantes valoran que es positivo tener dichos aspectos en el desarrollo de los ejemplos y que no se desarrollen de forma lineal.

También se puede rescatar la aceptación de esquemas que enriquecen el proceso de enseñanza y aprendizaje, al igual que los estudiantes dejan entre visto que el desarrollo de los ejemplos también es claro.

Es importante tener presente que de forma genérica el material tiene una excelente aceptación con 9.2 de promedio general en sus aspectos.

Según los comentarios realizados hacia el material la mayor parte son positivos, a continuación, se describen algunos de los mismos, todos los demás comentarios se agregarán en una tabla en el anexo 14.

- El material escrito está bien elaborado en el cual se puede comprender de manera muy clara y precisa los temas y ejercicios de cada unidad.

- El material me parece bastante completo desde la explicación teórica de los problemas hasta el desarrollo de los ejemplos
- Tiene un excelente desarrollo y organización en cuanto a los temas, y contiene pequeños detalles que ayudan un poco más a la comprensión de los ejercicios
- Sirve de ayuda para estudiar, solamente hay algunos temas que deberían de poner más ejemplos ya que se dificulta un poco la comprensión.
- Me parece algo regulares las explicaciones que tiene el material, solo que ojalá tuviera más explicación como videos

Es de dejar claro que no se quiso corregir ningún error de ortográfico, ni de gramática en los comentarios para no modificar la esencia de los mismos.

Con respecto al tiempo por semana empleado por los estudiantes se realizó una tabla resumen (tabla 4) y su respectivo gráfico de barras (Figura 9).

Tabla 4

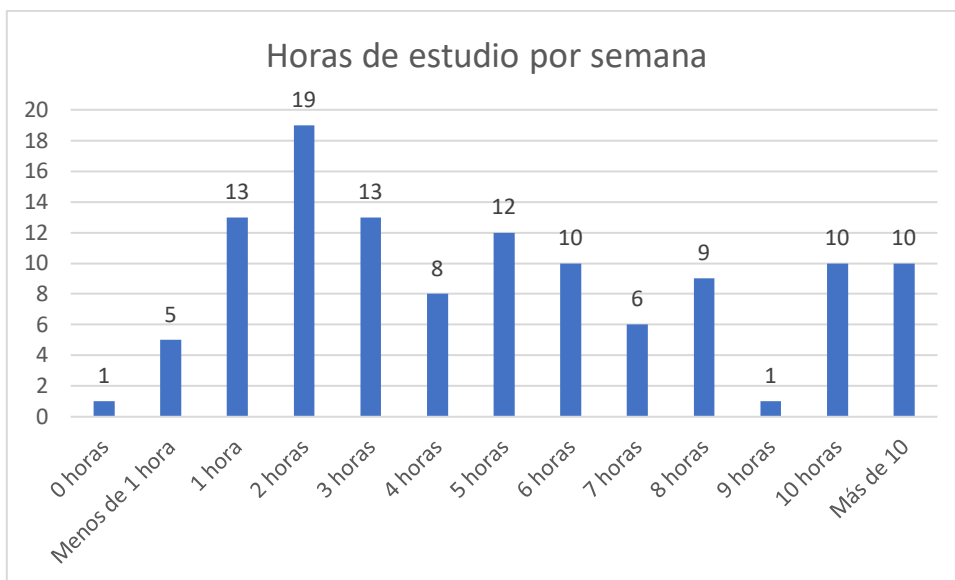
Promedio de horas empleadas en el estudio de la asignatura

Horas	# de estudiantes	%	% acumulado
0	1	1	1
Menos de 1	5	4	5
1	13	11	16
2	19	16	32
3	13	11	44
4	8	7	50
5	12	10	61
6	10	9	69
7	6	5	74
8	9	8	82
9	1	1	83
10	10	9	91
Más de 10	10	9	100
	117	100	

Como se puede observar en Tabla 4, el 16% de estudiantes manifiesta que estudia menos de 2 horas a la semana, es decir que el 84% estudia 2 o más horas por semana.

Figura 9

Grafica de barras de horas de estudio a la semana



En la figura 9 se puede observar que 2 horas es el promedio que tiene más frecuencia 19 estudiantes, un 16 % de los encuestados, luego le siguen 3 y 5 horas con 13 y 12 respectivamente, en el rango de 2 a 6 horas se encuentra en 53% de estudiantes encuestados.

Según los estudiantes encuestados los aportes al costado izquierdo son muy importantes para ellos, ya que les recuerda aspectos de contenidos anteriores, procesos y con esto se facilita la comprensión, todos los demás comentarios estarán en el apartado de anexos en una tabla, algunos de los comentarios son:

- Primero las respuestas y aclaraciones de la izquierda y segundo la resolución de ejercicios en las gráficas.
- 1- La facilidad que explica los temas he implementa los ejercicios.

2- Los aporte que ponen en la parte de la izquierda, ya que nos ayuda recordar temas, que quizás hayamos olvidado.

- La presentación y el orden de los contenidos
- 1. La forma en que están explicados los ejercicios.
- 2. La esquematización y procesos de análisis que se hacen al costado izquierdo para mayor comprensión.

Con respecto a los aspectos que se deben mejorar en el material, la mayor parte de los estudiantes encuestados se centra en la parte de agregar más ejemplos, en el anexo 15 se mostraran todos los comentarios mediante una tabla.

2.3. Descripción de las actividades

En apartado de anexos, se presentan:

Primero, el programa de la asignatura Matemática I, el cual presenta los contenidos y objetivos de la asignatura, seguido del material escrito propuesto, con todos sus apartados, guías de trabajo, soluciones y un resumen de fórmulas.

A continuación, se presenta la encuesta para evaluar la aceptación de dicho material por parte de los estudiantes, seguida de los resúmenes de los resultados por medio de tablas y gráficos de barras para que se visualicen de mejor forma dichos resultados, con respecto a las preguntas abiertas 10, 12 y 13 se presentan todos los comentarios mas una nube de palabras para cada una.

Conclusiones

- Los resultados de la encuesta indican la importancia de la formación constante y permanente de los maestros para adquirir la capacidad de crear materiales didácticos que motiven y generen conocimiento en los estudiantes, y por ende estos alcancen los objetivos planteados en los programas de las asignaturas que se estén desarrollando.
- Los docentes deben realizar encuestas para verificar si los materiales que se utilizan motivan a los estudiantes en su aprendizaje, caso contrario dificultaría la asimilación de los contenidos, el estudio permitirá realizar las modificaciones necesarias, teniendo en centro de cada material al estudiante como fin último.
- Los estudiantes encuestados indican que los aspectos más importantes en los materiales son los ejemplos, para ellos es importante de desarrollo de ejemplos y que las explicaciones sean claras y específicas, teniendo claridad en que lo desarrollado es para el estudiante, no para el docente.
- Para el estudiante es importante que los materiales sean llamativos, ilustrativos, y que despierten su interés por aprender los conceptos y contenidos que en ellos se desea transmitir.
- La creación de materiales para las asignaturas que se imparten es de suma importancia, permitiendo la actualización de los mismos periódicamente, sumando ejemplos, subsanando fallos que van surgiendo en la implementación.

Recomendaciones

- El docente universitario debe elaborar sus propios materiales, para las asignaturas que imparte, los cuales deben estar enfocados en alcanzar los objetivos de los programas de las dichas asignaturas.
- Es necesario evaluar periódicamente los materiales elaborados con la intención de mejorarlos y actualizarlos.
- Los materiales elaborados deben contar con una variada gama de ejemplos, guías de ejercicios y problemas con su respectivo solucionario, los cuales sean claros y motiven el aprendizaje.
- Los materiales didácticos elaborados deben ser pensados en el estudiante y en su proceso formativo, ya que ellos son los que darán la utilidad el mismo con su efectivo aprendizaje.

REFERENCIAS

- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Álvarez, A. (1996). *Actividades matemáticas con materiales didácticos*. Madrid: Mec-Narcea.
- Berridi R. y Martínez J. (2017). *Estrategias de autorregulación en contextos virtuales de aprendizaje*. UNAM, México
- Cabero, Julio, (2001), *Tecnología Educativa, Diseño y Utilización de Medios para la Enseñanza*, España, Paidós
- Careaga, Isabel. *Los materiales didácticos*. Editorial Trillas, México 1999.
- Carretero, R. Coriat, M. y Nieto, P. (1995). *Secuenciación, Organización de Contenidos y Actividades de Aula*. Junta de Andalucía, Materiales Curriculares. Educación Secundaria Obligatoria, Vol. 17, Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia.
- Cascallana, M.T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid, Aula XXI.
- CONOCER (2007). *Estándar de competencia EC0049 - Diseño de cursos de capacitación presenciales, sus instrumentos de evaluación y material didáctico*. Consejo Nacional de Normalización y Certificación de Competencias Laborales, México.

- CONOCER (2008). Estándar de competencia EC0050. Diseño de cursos de capacitación para ser impartidos mediante Internet. Consejo Nacional de Normalización y Certificación de Competencias Laborales, México.
- CONOCER. (2012). Estándar de competencia EC0301. Diseño de cursos de formación del capital humano de manera presencial grupal, sus instrumentos de evaluación y manuales del curso, versión 6. México: Consejo Nacional de Normalización y Certificación de Competencias Laborales, México.
- CONOCER. (2012b). Estándar de competencia ECO217. Impartición de cursos de formación del capital humano de manera presencial grupal, versión 1. Recuperado el 2 de octubre de 2017, de Consejo Nacional de Normalización y Certificación de Competencias Laborales, México.
- Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: Un panorama. En L. Rico (Coord.). La educación matemática en la enseñanza secundaria, Barcelona: Horsori.
- D'Agostino, G.; Meza, J.; Cruz, A. (2005). Elementos y características del material impreso que favorecen la formación y el aprendizaje a distancia en la UNED. Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica. Revista RIED, 8, 1 y 2, 335-366.
- Díaz-Barriga, A. F. y Rojas, G. H. (2010). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista. México: McGraw Hill.
- ECURED (s/f). Material didáctico. Sitio ECURED, Cuba. Recuperado en junio del 2020, https://www.ecured.cu/Material_did%C3%A1ctico
- Escamilla, A. (1993). Unidades didácticas: una propuesta de trabajo en el aula. Edit: Edel Vives, Zaragoza, España.

- Fernández Bravo, J. A. (2010). La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños. Madrid: Grupo Mayéutica Educación.
- Feynman, R. P. (1987). ¿Está Ud. De broma, Sr. Feynman?. Madrid: Alianza Editorial S.A.
- Gallardo J. (2001). Recurso y materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas. UMA, España.
- González Marí, J.L. (2010). Recursos, Material didáctico y juegos y pasatiempos para Matemáticas en Infantil, Primaria y ESO: consideraciones generales. Málaga: Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Málaga.1-24.
- Guerrero A (2009). Los materiales didácticos en el aula. Revista digital para profesores de la enseñanza. Federación de Enseñanza de CCOO. Recuperado de feandalucia.ccoo.es
- Gutiérrez, F., Prieto D. (1993). La Mediación Pedagógica. Guatemala: Instituto de Investigaciones y Mejoramiento Educativo (IIME).
- Gutierrez, F. (1995). Mediación pedagógica en la elaboración de libros de texto. Costa Rica: San José: UNESCO, 1995
- Gutiérrez, F., Prieto D. (1999). La mediación pedagógica. Apuntes para una educación a distancia alternativa. (6a. ed.) Argentina: Ediciones CICCUS-La Crujía.
- Gonzales M. (2010). Recursos, Material didáctico y juegos y pasatiempos para el desarrollo del Pensamiento Lógico elemental en Infantil y Primaria. Matemáticas Infantil, Primaria y ESO, UMA España.

- Hernández F. A. (2011). Didáctica general. Universidad de Jean, España. <https://bit.ly/3dEFA9I>
- Johnsen, E. B. (1996). libros de texto en el caleidoscopio. Barcelona: Pomares-Corredor S.A.
- *Material didáctico*. [En Wikipedia]. Recuperado (2021, Noviembre 5) de https://es.wikipedia.org/wiki/Material_did%C3%A1ctico
- Morales M. P. (2012). Elaboración de material didáctico. Red tercer Milenio. México. recuperado en junio 2020 de http://www.aliat.org.mx/BibliotecasDigitales/derecho_y_ciencias_sociales/Elaboracion_material_didactico.pdf
- Mortis L. S., Rosas J. R. y Chairez F. E. (2007). Diseño de material didáctico
- Muntean, A. (2011). Sobre algunos errores en libros de texto de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), 87, 30-53.
- Néreci, Imídeo G. *Hacia una didáctica general dinámica*. Editorial Kapelusz, México. 1969. P. 282-356.
- Nérici, G. I. (1985). *Hacia una didáctica general dinámica*. Ed. Kapeluz, Brasil.
- Núñez Ch. M. E. y Silver T. (2002). Guía para la elaboración de materiales educativos orientados al aprendizaje autogestivo. Documento de trabajo, Sistema de Universidad Virtual, Universidad de Guadalajara, México. <https://bit.ly/2BOPMip>

- Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona, Graó.
- Real Academia Española. <https://www.rae.es/>
- Roseman, J. E., Kulm, G., & Shuttleworth, S. (2001). Putting textbooks to the test. *ENC Focus*, 8(3), 56-59.
- Sobrino, D. (2013). “El trabajo con blogs en Ciencias Sociales, Geografía e Historia”. *Clío* 39. History and History teaching. Disponible en <http://clio.rediris.es/n39/articulos/Sobrinoclio39.pdf>
- Szendrei, J. (1996). Concrete Materials in the Classroom. En Bishop et all. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, 411-434. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Tan S. (2018). *Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida*. México, Cengage Learning Editores, S.A de C.V.
- Tébar, L. (2009). *El profesor mediador del aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Magisterio, ISBN: 9789582009793; 9582009799.
- Thompson, P.W. (1994). Concrete Materials and Teaching for Mathematical Understanding. *Arithmetic Teacher* Vol. 41, nº 9, 556-558. (Versión en español de la Fundación Santillana).

ANEXOS

Anexo 1: Programa de estudios de Matemática I



**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE ESTUDIO DE MATEMÁTICA I**



HOJA DE DATOS GENERALES

Ciclo Académico	: I/2023
Carreras a las que se sirve y Nº de orden en El pensum	: Licenciatura en: 1. Administración de Empresas 2. Contaduría pública 3. Mercadeo internacional 4. Economía
Plan	: 1994
Asignatura	: MATEMÁTICA I
Número de horas por ciclo	: 100
Duración del ciclo en semanas	: 16
Unidades Valorativas	: 5
Ciclo en el Plan de Estudio	: Primer ciclo

SYLLABUS DE SISTEMAS ORGANIZACIONALES

Unidades Valorativas	: 5
Horas teóricas por ciclo	: 48
Horas prácticas por ciclo	: 32
Asesoría y admón. de evaluaciones	: 20 horas
Duración de la hora clase	: 50 minutos

DESCRIPCIÓN DE LA ASIGNATURA

El curso está estructurado en tres unidades didácticas teóricas que se complementan con los contenidos de las otras asignaturas del mismo nivel y a la vez proporcionan a los estudiantes la fundamentación matemática para los cursos de niveles superiores.

En la primera unidad se inicia con el estudio de los conjuntos numéricos, las desigualdades; así como también las relaciones, algunos tipos de relaciones, dominio y rango, la proporcionalidad que existe entre ellas, y la representación gráfica de relaciones.

En la segunda unidad se inicia con el estudio de las funciones, herramienta que permitirá al estudiante plantear, analizar y resolver los problemas económicos que se le presentan en el futuro. También estudiara algunos tipos de funciones, sus gráficos, dominio y rango y sus características más importantes.

En la Tercera unidad se estudia las matrices con el objeto de servir de apoyo para la solución de problemas que involucran el manejo simultáneo de valores numéricos y en especial para la solución de sistemas de ecuaciones lineales; para luego continuar con el estudio de determinantes el cual consiste en proporcionar todas las herramientas para la solución de determinantes y poderlas aplicar a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

En cada unidad se incluirán ejercicios de aplicación a las Ciencias Económicas.

OBJETIVO GENERAL DE LA ASIGNATURA

Al finalizar el curso de matemática I, el estudiante sea capaz de, Resolver problemas del área de las Ciencias Económicas aplicando los conocimientos adquiridos en la asignatura

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Que los estudiantes adquieran la capacidad, de diferenciar y aplicar, los diferentes tipos de relaciones matemáticas en la solución de los problemas del área económica.
- b) Que el estudiante sea capaz de aplicar los métodos matriciales para resolver problemas de las ciencias económicas

OBJETIVOS POR UNIDAD DIDÁCTICA

Unidad 1. Relaciones

Que al finalizar la unidad I el estudiante sea capaz de:

1. Identificar los diferentes tipos de intervalos y representarlos en la recta real.
2. Distinguir y resolver inecuaciones lineales, cuadráticas y racionales.
3. Determinar el dominio y el rango de relaciones.
4. Determinar el punto de intersección entre dos rectas y graficarlas.

Unidad 2. Funciones

Que al finalizar la unidad II, el estudiante sea capaz de:

1. Identificar algunos tipos de funciones de uso frecuente en la realidad y encontrar su dominio y rango.
2. Representar gráficamente diferentes tipos de funciones

Unidad 3. Matrices y determinantes

Que al finalizar la unidad III, el estudiante sea capaz de:

1. Identificar los diferentes tipos de matrices.
2. Realizar operaciones con matrices.
3. Obtener matrices equivalentes utilizando operaciones elementales entre filas y el método del pivote.
4. Determinar la inversa de una matriz con el método de Gauss.
5. Transformar un sistema de ecuaciones lineales aplicando el método de la matriz aumentada.
6. Resolver problemas de Ciencias Económicas aplicando matrices.
7. Identificar el orden de un determinante.
8. Calcular el determinante de una matriz, por diferentes métodos.
9. Aplicar determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales no homogéneas.

CONTENIDO GENERAL
(Contenido Sintético del Programa)

Unidad 1: Relaciones

Unidad 2: Funciones

Unidad 3: Matrices y determinantes

Unidad 1: Relaciones

1.1 Conjuntos numéricos

1.2 La recta real. Intervalos

 1.2.1 Operaciones con intervalos

1.3 Inecuaciones

 1.3.1 Lineales

 1.3.2 Cuadráticas

 1.3.3 Racionales

 1.3.4 Aplicaciones Económicas de las inecuaciones

1.4 Relaciones de R en R

 1.4.1 Producto Cartesiano

 1.4.2 Plano Cartesiano

 1.4.3 Concepto de relación. Dominio y rango

 1.4.4 Representación gráfica de relaciones

Unidad 2: Funciones

2.1 Funciones

2.1.1 Concepto de función, Dominio y rango

2.1.2 Función polinomial: Definición, dominio y rango

a) Grado cero (función constante)

b) Grado uno (función lineal) la línea recta

b.1) Pendiente de una recta: Razón de cambio

b.2) Formas de la ecuación de la recta

b.2.1) Punto pendiente

b.2.2) Pendiente-intercepto

b.2.3) General

b.3) Posición relativa entre rectas:

Paralelas, concurrentes y perpendiculares

b.4) Aplicaciones de la línea recta (oferta, demanda y punto de equilibrio)

c) Grado dos (Función cuadrática)

c.1) Ecuación de la parábola y representación Gráfica.

2.1.3 Inversa de una función

2.1.4 Funciones especiales

a) Función valor absoluto

b) Función seccionada

c) Función exponencial y Ecuaciones exponenciales

d) Función logarítmica y Ecuaciones Logarítmicas

Unidad 3. Matrices y determinantes

- 3.1 Matrices: definición y notación
- 3.2 Algunos tipos de matrices
- 3.3 Operaciones con matrices y propiedades
- 3.4 Matrices equivalentes: operaciones elementales entre filas y método del pivote.
- 3.5 Determinación de la inversa de una matriz: método de Gauss
- 3.6 Solución de sistemas de ecuaciones lineales por medio de la matriz aumentada.
- 3.7 Aplicación de matrices
- 3.8 Definición y notación de un determinante
- 3.9 Cálculo de determinantes
 - 3.9.1 Cálculo de determinantes de orden 2
 - 3.9.2 Cálculo de determinantes de orden 3
 - a) Método de Sarrus
 - 3.9.3 Cálculo de determinantes de orden 3 o mayor
 - a) Método de cofactores
 - b) Método del Pivote
- 3.10 Propiedades de los determinantes
- 3.11 Método de Cramer

METODOLOGÍA

El curso de Matemática I se desarrollará de la siguiente manera:

- Tres horas semanales de clase expositiva, en las cuales el docente transmitirá la base teórico-conceptual propuesta en el programa a los alumnos, así como la resolución de ejercicios motivando su participación.
- Dos horas de asesoría, coordinadas por el docente en las cuales se propondrá una serie de ejercicios para que los estudiantes puedan resolverlos en forma individual o grupal, aplicando los conceptos vistos en clase.
- Se realizarán tres exámenes parciales con una ponderación del 75% y dos controles de lectura con una ponderación del 25%.

Sistema evaluativo

Evaluación	Ponderación
Primer Examen Parcial	25%
Segundo Examen Parcial	25%
Tercer Examen Parcial	25%
Primer Control de lectura	15%
Segundo Control de lectura	10%

CALENDARIZACION DE ACTIVIDADES

EVALUACIÓN	FECHA**
Primer Examen Parcial Tema: "Relaciones"	Semana del 11 al 14 de abril de 2023
Segundo Examen Parcial Tema: "Funciones"	Semana del 22 de mayo al 26 de mayo de 2023
Tercer Examen parcial Tema: "Matrices"	Semana del 10 al 14 de julio de 2023
Primer Control de Lectura Tema: "Aplicaciones de la línea recta"	Viernes 12 de mayo de 2023
Segundo Control de lectura Tema: "Determinantes"	Viernes 23 de junio de 2023

**Estas fechas pueden ser modificadas, por situaciones ajenas a la cátedra.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

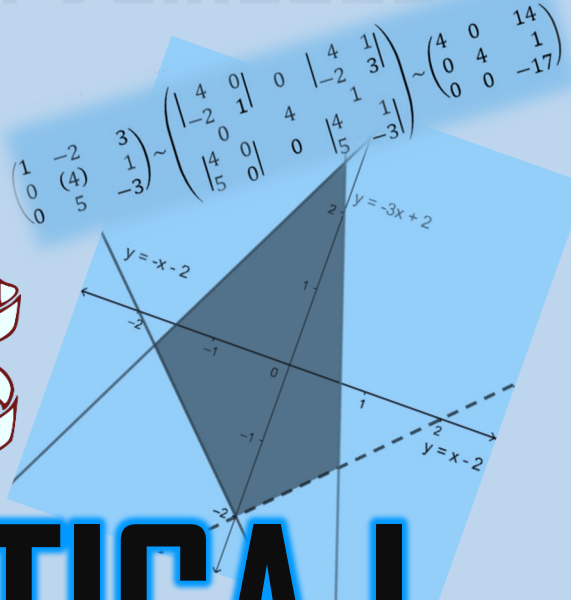
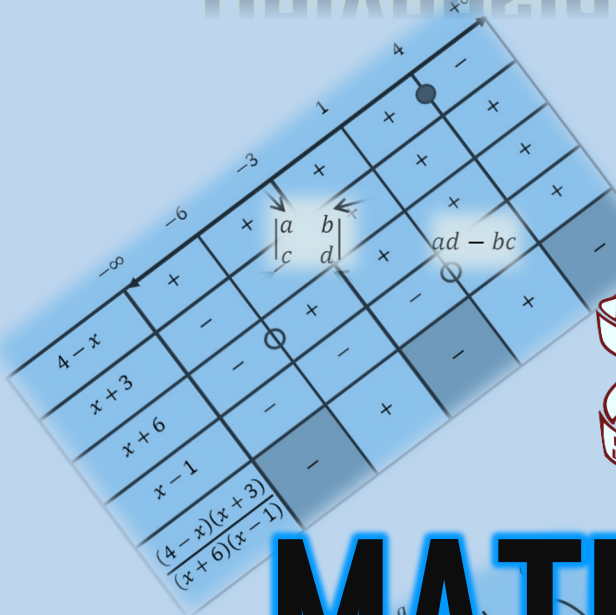
- Material de apoyo, preparado por docentes del Departamento de Matemática y Estadística de la Facultad de Ciencias Económicas.
- Raúl Aguilera Liborio, Matemática I para Ciencias Económicas, UCA Editores, 1993.
- Raúl Aguilera Liborio, Matemática III para Ciencia Económicas, UCA Editores, 1993
- Ernest F. Haeussler y Richard S. Paul, Matemática para Administración Economía, México D.F, Grupo Editorial Iberoamericano S.A de C.V, 2008, 12 edición
- Jean E. Weber, Matemática para Administración y Economía, Editorial Harla, México 4° Edición, 1984
- Jagdish Arya y Robin Larder, Matemática Aplicada a la Administración y a la Economía, México Prentice Hall Hispanoamericana, S.A, 3° Edición

Catedra

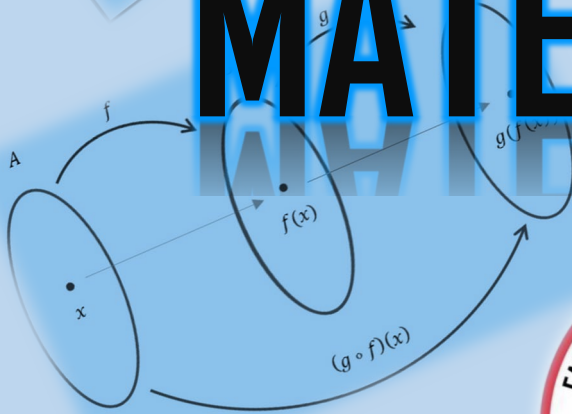
PERSONAL DOCENTE ASIGNADO A LA CÁTEDRA

- 1) Ing. Claudia Esther vega Figueroa
- 2) Lic. Edgar Antonio Medrano
- 3) Ing. Edgardo Antonio Morales
- 4) Lic. Ethel Beatriz Castillo De Girón
- 5) Lic. Karla María Posada Menjívar
- 6) Lic. Margarita Faustina Ramírez Vásquez
- 7) Lic. María Mirtala Cardoza De Aguilar
- 8) Lic. Mario Wifredo Crespín Elías
- 9) Lic. Marvin Enrique Gracias Castro
- 10) Ing. Oscar Armando Méndez
- 11) Lic. Patricia Judith Chafoya De Escalante
- 12) Ing. Oscar Armando González (Coordinador)

Universidad de El Salvador



MATEMÁTICA I

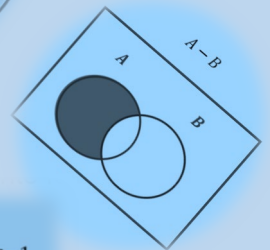


$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$



$$|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \dots + a_{1n}c_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}c_{1j}$$

$$|A| = \frac{(-1)^{i+j}}{(a_{ij})^{n-2}} |D|_{n-1}$$



Facultad de Ciencias

Económicas

Matemática I

“La ciencia intenta encontrar la lógica y la simplicidad en la naturaleza. Las matemáticas intentan establecer orden y simplicidad en el pensamiento humano”.
James Joseph Sylvester

Índice	Pág
Introducción -----	1
Objetivos -----	2
Esquema de contenidos -----	3
1. Relaciones -----	4
1.1 Conjuntos Numéricos -----	6
1.2 La recta real. Intervalos -----	8
1.2.1 Operaciones con intervalos -----	15
1.3 Desigualdades o Inecuaciones -----	23
1.3.1 Desigualdades lineales -----	25
1.3.2 Desigualdades cuadráticas -----	29
1.3.3 Desigualdades racionales -----	32
1.3.4 aplicaciones económicas de las inecuaciones -----	38
1.4 Relaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} -----	42
1.4.1 Producto cartesiano -----	43
1.4.2 Plano cartesiano -----	47
1.4.3 Concepto de Relación: dominio y Rango -----	48
1.4.4 Representación gráfica de relaciones -----	53
Guía de ejercicios sobre relaciones -----	65
2. Funciones -----	71
2.1.1 Concepto de función. Dominio y rango -----	73
2.1.2 Función polinómica: Definición, dominio y rango -----	79

a) Grado cero (función constante) -----	80
b) Grado uno (función lineal) la línea recta -----	81
b.1) Pendiente de una recta: Razón de cambio -----	83
b.2) Formas de la ecuación de la recta -----	86
b.2.1) Dos puntos -----	86
b.2.2) Punto pendiente -----	87
b.2.3) Pendiente-intercepto -----	88
b.2.4) General -----	89
b.3) Posición relativa entre rectas -----	90
b.4) Aplicaciones de la línea recta -----	93
b.4.1) Función de demanda -----	94
b.4.2) Función de oferta -----	96
b.4.3) Punto de equilibrio -----	98
c) Grado dos (Función cuadrática) -----	102
c.1) Ecuación de la parábola y representación Gráfica -----	102
Grado tres (Función cúbica) -----	107
Composición Funciones -----	109
2.1.3 Inversa de una función -----	114
2.1.4 Funciones especiales -----	118
a) Función seccionada -----	119
b) Función valor absoluto -----	122
c) Función exponencial y Ecuaciones exponenciales -----	127
d) Función logarítmica y Ecuaciones Logarítmicas -----	131
Guía de ejercicios sobre funciones -----	141
3. Matrices y determinantes -----	152
3.1 Matrices: Definición y notación -----	154
3.2 Algunos tipos de matrices -----	162

3.3 Operaciones con matrices y propiedades -----	169
3.4 Matrices equivalentes: Operaciones elementales entre filas y método del pivote -----	184
3.5 Determinación de la inversa de una matriz: Método de Gauss -----	199
3.6 Solución de Sistema de Ecuaciones Lineales por medio de la matriz aumentada -----	203
3.7 Aplicación de matrices -----	217
3.8 Definición y notación de un determinante -----	229
3.9 Cálculo de determinantes -----	230
3.9.1 Cálculo de determinantes de orden 2 -----	230
3.9.2 Cálculo de determinantes de orden 3	
a) Método de Sarrus -----	231
3.9.3 Cálculo de determinantes de orden 3 o mayor -----	234
a) Método de Cofactores -----	234
b) Método del pivote -----	238
3.10 Propiedades de los determinantes -----	242
3.11 Método de Cramer -----	245
Guía de ejercicios sobre matrices -----	249
Resumen de fórmulas básicas -----	261
Soluciones a los ejercicios y problemas planteados -----	264
Referencias bibliográficas -----	288
Bibliografía complementaria -----	289

Introducción

Un material didáctico es interesante para los estudiantes cuando es útil en la solución de problemas de la vida, dado que le da sentido al aprendizaje; el presente material representa precisamente una guía útil en la adquisición de conocimientos para el abordaje y solución de ejercicios matemáticos para cualquier estudiante, sin embargo, el presente documento está diseñado para los estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas, en la asignatura de Matemáticas I, la cual es la base para la asignatura Matemáticas II, el cual contiene cuatro grandes apartados, inicialmente se desarrollan las relaciones numéricas, con su guía de ejercicios, en segundo se describen las funciones numéricas, en tercer lugar se abordan las matrices y determinantes, para culminar con el apartado de las soluciones a los ejercicios planteados a lo largo del material, en palabras sencillas el presente material representa una guía minuciosamente diseñada para que el estudiante pueda desarrollar paso a paso las operaciones matemáticas que implementará y le serán necesarias en el transcurso de su formación académica y en la práctica misma de su profesión. El diseño y la forma en que se plantea el contenido del material permite que el estudiante pueda adquirir conocimiento en cualquier modalidad de aprendizaje, sea está presencial, virtual o autodidáctica, ya que su diseño es simple y comprensible y lo más importante, se trata de un material práctico y útil.

Objetivos

Objetivo general

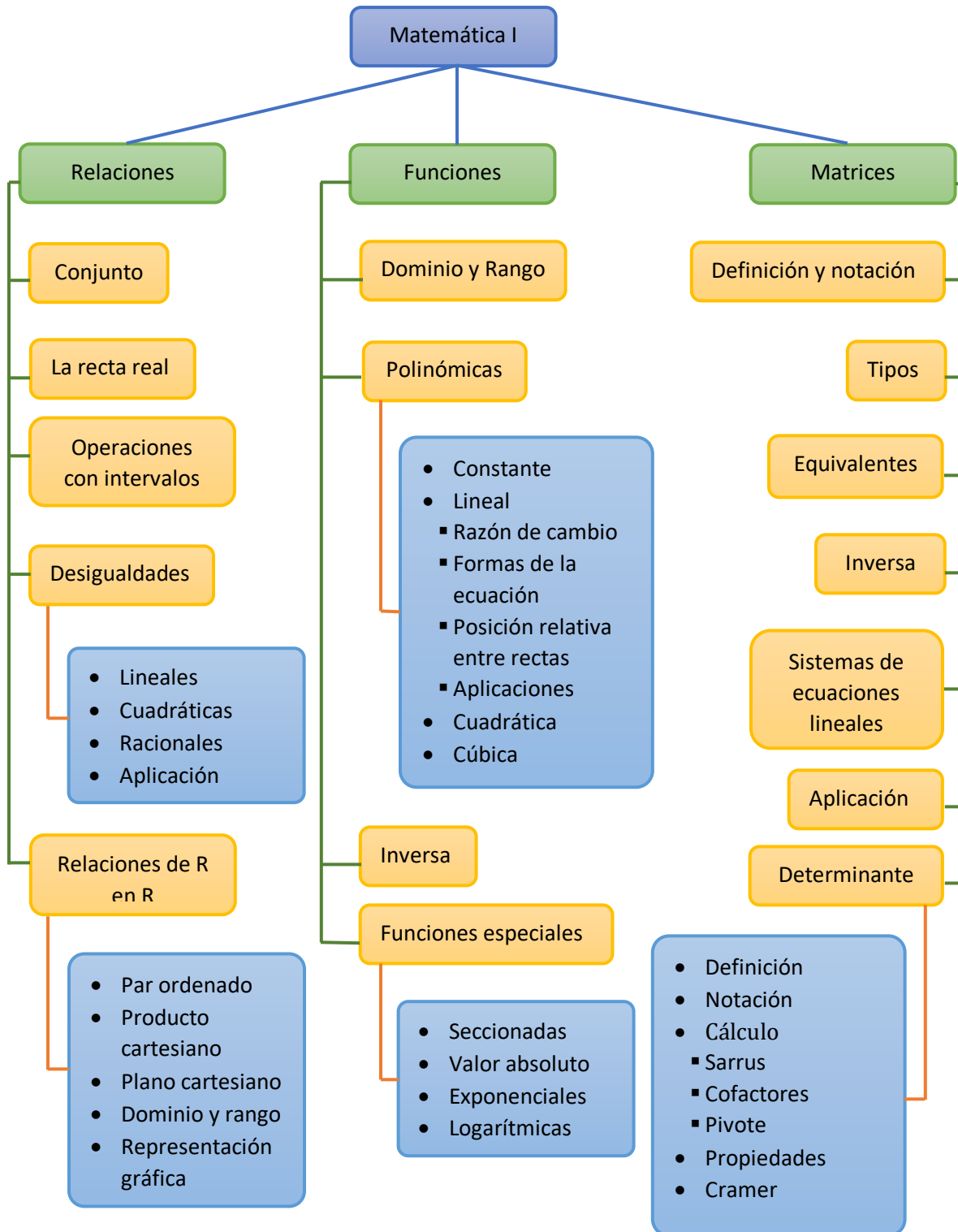
Desarrollar el conocimiento y la capacidad para resolver problemas matemáticos de manera práctica y de utilidad en la formación y en la vida de los estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de El Salvador.

Objetivos específicos

- Identificar los diferentes tipos de intervalos y representarlos en la recta real.
- Distinguir y resolver inecuaciones lineales, cuadráticas y racionales.
- Determinar el dominio y el rango de relaciones
- Determinar el punto de intersección entre dos rectas y graficarlas.
- Identificar algunos tipos de funciones de uso frecuente en la realidad y encontrar su dominio y rango.
- Representar gráficamente diferentes tipos de funciones.
- Identificar los diferentes tipos de matrices.
- Realizar operaciones con matrices.
- Obtener matrices equivalentes utilizando operaciones elementales entre filas y el método del pivote.
- Determinar la inversa de una matriz con el método de Gauss.
- Transformar un sistema de ecuaciones lineales aplicando el método de la matriz aumentada.
- Resolver problemas de Ciencias Económicas aplicando matrices.
- Calcular el determinante de una matriz, por diferentes métodos.
- Aplicar determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales no homogéneas

Figura 1

Contenidos generales matemática I



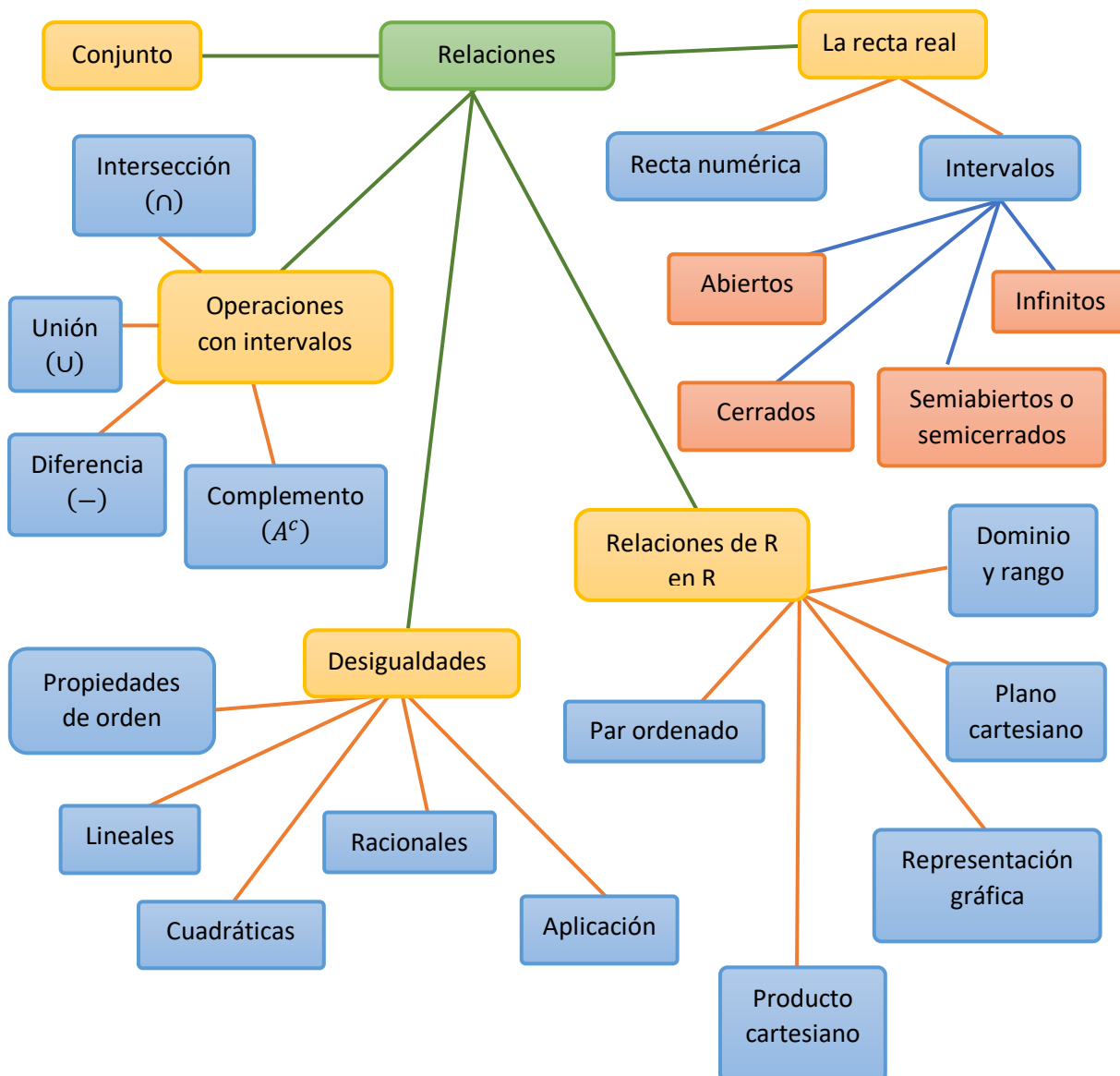
Capítulo I

Relaciones

"La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples" S. Gudder.

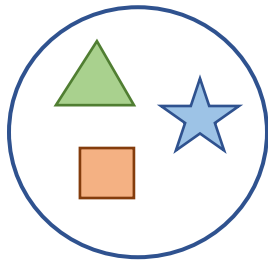
Figura 2

Contenido capítulo I relaciones



Capítulo 1 Relaciones

Las aportaciones de las matemáticas en el mundo moderno no están limitadas a avances tecnológicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se emplean ahora para analizar complejos problemas en ciencias sociales, políticas y biológicas en formas nuevas y sorprendentes (Stewart et. al, 2012).

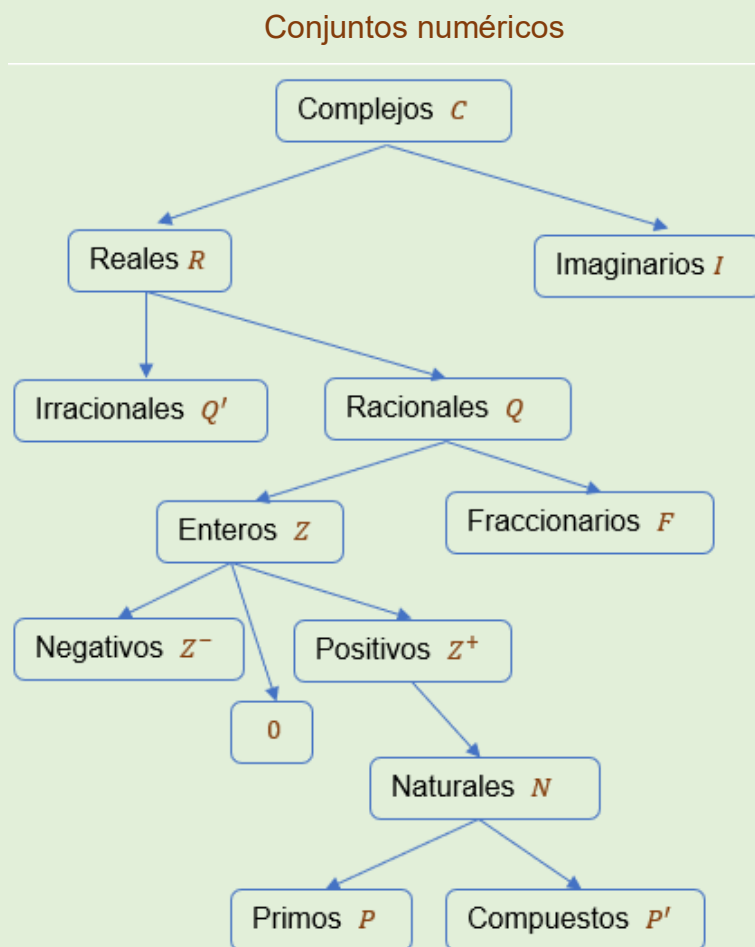


Fraccionarios son los números que se pueden expresar como decimales finitos o periódicos.

1.1 Conjuntos Numéricos

El concepto de conjunto se relaciona a una colección o agrupación de elementos con características o propiedades similares. Los elementos contenidos en los conjuntos pueden ser: objetos, animales, personas, números, entre otros. En este capítulo se abordarán los conjuntos numéricos.

Los conjuntos se pueden expresar por comprensión o por extensión, por extensión cuando cada elemento es numerable y por comprensión cuando se indica la propiedad común que tienen sus elementos.



Naturales

1. Contar
2. Ordenar
3. Identificar

Z^- es el conjunto de los números enteros negativos, y Z^+ es el conjunto de los números enteros positivos, $Z^+ = N$.

$$Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

$$Z^+ = N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Cuando se habla de conjunto, existen un grupo muy importante con los cuales se puede expresar cantidades y medidas, estos se conocen como conjuntos numéricos.

La construcción, de los conjuntos numéricos, se inicia en un principio con la noción de cantidad, con el paso del tiempo, a cada cantidad se le asignó una representación dando origen al conjunto de los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, ...

Posteriormente, surgieron algunas operaciones como: la suma, que tomaba dos cantidades y al adicionarlas el resultado era otro número natural, por ejemplo: $1 + 1 = 2$. Cuando surgió la operación resta, se generó un problema, pues al realizar la sustracción de $2 - 1 = 1$, ¿pero al querer realizar $1 - 2 = ?$, no había forma de representarlo, pues solamente existían los números naturales, para dar respuesta a este problema apareció un nuevo conjunto de números que contenía los números naturales (N) y los números naturales con signo negativo, así: $-3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots$; con este conjunto la operación $1 - 2 = -1$, ya tenía solución.

Tiempo después surge el cero, el cual representaba operaciones como $1 - 1 = 0$, y así, con esto se formó lo que hoy se conoce como el conjunto de los números enteros:

$$Z = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$$

Cuando surgió la operación División, se generó un nuevo problema; ya que $\frac{2}{1} = 2$, pero $\frac{1}{2} = ?$, para el cual, no había representación, con esto surgió la necesidad de un nuevo conjunto, y dicho conjunto numérico es el que conocemos como; el conjunto de los números racionales:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in Z \wedge b \neq 0 \right\}$$

Números Complejos es el conjunto formado por los números reales y los números imaginarios. Es el conjunto numérico más grande.

$$z = a + bi$$

i : unidad imaginaria

a : parte real

b : parte imaginaria

$$i = \sqrt{-1}$$

- Parte negativa o a la izquierda de cero
- Parte positiva o a la derecha de cero

Más a delante en la historia, cuando se comenzó a trabajar con magnitudes aparecieron números los cuales aún no tenían representación tales como raíces que no eran exactas, π , e , entre otros, los cuales dieron origen al conjunto de los números irracionales.

A la unión del conjunto de números racionales y el conjunto de números irracionales se le conoce como conjunto de números reales.

1.2 La recta real. Intervalos

Los conjuntos numéricos permiten representar diversas situaciones del entorno, en este capítulo se representarán dichos conjuntos en la recta real.

Definición 1.1: Recta Real o recta numérica

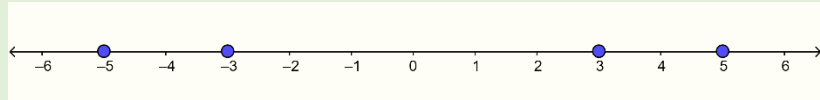
Es un gráfico unidimensional que contiene todos los números reales, está dividida en dos partes (la parte negativa y la parte positiva) simétricas por el origen (cero).

A la hora de representar números reales en la recta, es importante tomar en cuenta que:

- El valor cero divide la recta en dos partes, a la izquierda de cero donde van los valores negativos y a la derecha de cero donde van los valores positivos.
- El valor uno permite definir la unidad como la distancia entre sí mismo y el valor cero. De tal manera que esta distancia pueda representar cualquier número entero respetando esta distancia entre dos números consecutivos.

Ejemplo 1.1

En la recta real se observa que están representados los valores:
-5, -3, 3, 5.



Subconjunto hace referencia aparte o a todo un conjunto.

Definición 1.2: Intervalo

Es un subconjunto infinito de números reales comprendidos entre dos valores fijos, llamados extremos del intervalo.

Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados, semiabiertos o semicerrados e infinitos.

Tipos de Intervalos

Intervalo abierto (a, b) o $]a, b[$

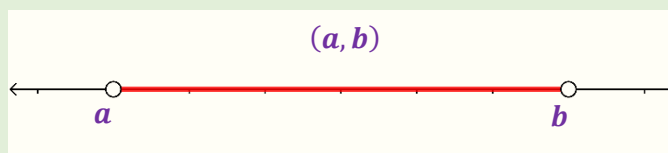
Es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b , donde a y b son los extremos del intervalo y no pertenecen al intervalo.

Notación de conjunto: $I = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

Notación de intervalo: (a, b) ó $]a, b[$:

Representación en la recta real

Gráficamente abierto significa que ambos extremos quedan huecos.



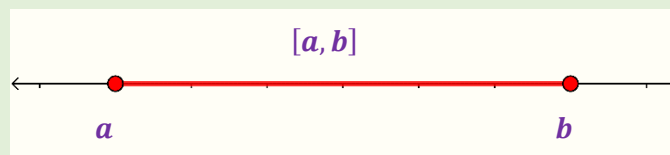
Intervalo cerrado $[a, b]$

Es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b , a y b son los extremos y pertenecen al intervalo.

Notación de conjunto: $I = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

Notación de intervalo: $[a, b]$

Representación en la recta real



Gráficamente cerrado significa que ambos extremos quedan llenos.

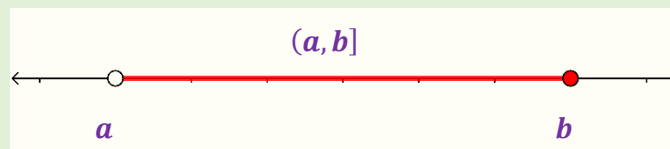
Intervalo semiabierto o Semicerrado

1. Es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores o iguales que b .

Notación de conjunto: $I = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

Notación de intervalo: $(a, b]$

Representación en la recta real



Gráficamente semiabierto o semicerrado significa que un extremo queda hueco y el otro lleno.

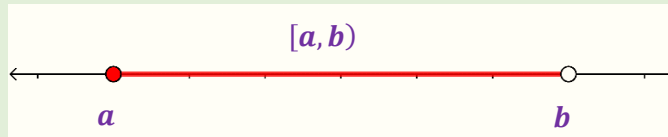
2. Es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b .

Notación de conjunto: $I = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

Notación de intervalo: $[a, b)$

Representación en la recta real

Importante tener claro que el símbolo ∞ , no representa ningún número real.



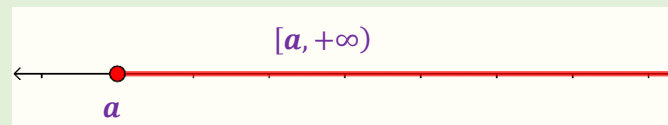
Intervalo Infinito

Este intervalo tiene la característica que crece infinitamente o decrece de infinitamente.

Notación de conjunto: $I = \{x \in R/a \leq x\}$

Notación de intervalo: $[a, +\infty)$

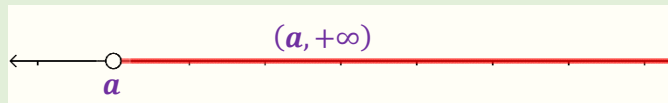
Representación en la recta real



Notación de conjunto: $I = \{x \in R/a < x\}$

Notación de intervalo: $(a, +\infty)$

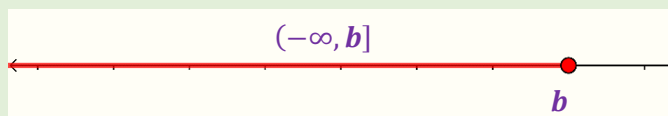
Representación en la recta real



Notación de conjunto: $I = \{x \in R/x \leq b\}$

Notación de intervalo: $(-\infty, b]$

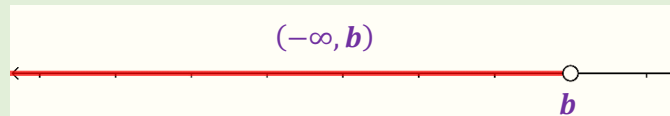
Representación en la recta real



Notación de conjunto: $I = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$

Notación de intervalo: $(-\infty, b)$

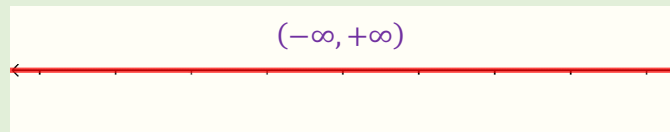
Representación en la recta real



Notación de conjunto: $I = \{x \in \mathbb{R}\}$

Notación de intervalo: $(-\infty, +\infty)$

Representación en la recta real



Ejemplo 1.2

Representar gráficamente y en notación de conjunto los intervalos siguientes:

a) $A = [-3, 4]$ **b)** $B = (-1, 3)$ **c)** $C = (-\infty, 2]$

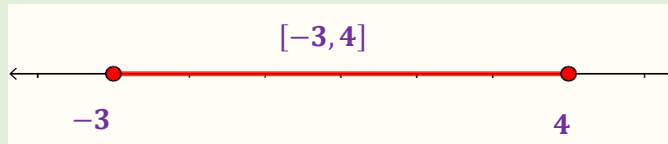
d) $D = [2, 4)$ **e)** $E = (-1, 2]$ **f)** $F = (3, +\infty)$

Solución:

a) $A = [-3, 4]$

Notación de conjunto: $A = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 4\}$

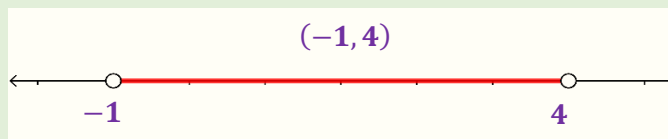
Representación en la recta real



b) $B = (-1, 3)$

Notación de conjunto: $B = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 4\}$

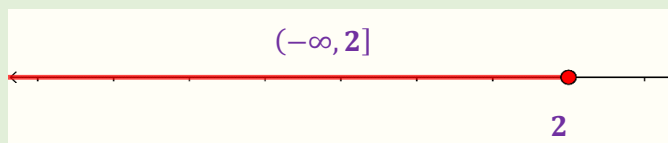
Representación en la recta real



c) $C = (-\infty, 2]$

Notación de conjunto: $C = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$

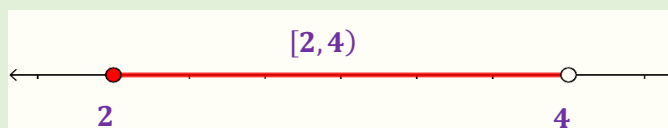
Representación en la recta real



d) $D = [2, 4)$

Notación de conjunto: $D = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 4\}$

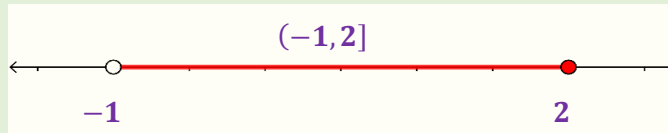
Representación en la recta real



e) $E = (-1, 2]$

Notación de conjunto: $E = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 2\}$

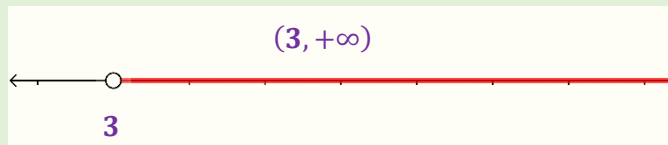
Representación en la recta real



f) $F = (3, +\infty)$

Notación de conjunto: $F = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x\}$

Representación en la recta real



Ejemplo 1.3

Representar gráficamente y en notación de intervalo los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 1\}$

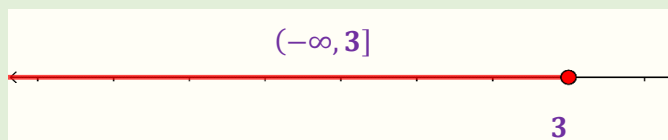
c) $C = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x < 6\}$

Solución

a) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$

Notación de intervalo: $A = (-\infty, 3]$

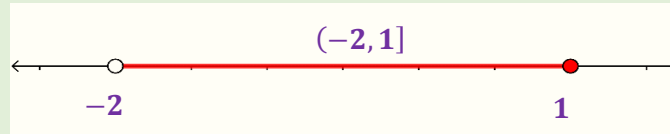
Representación en la recta real



b) $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 1\}$

Notación de intervalo: $B = (-2, 1]$

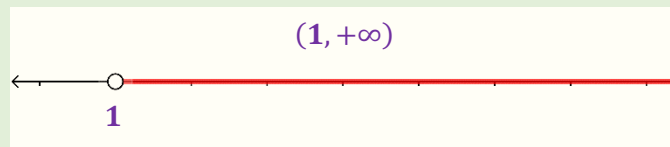
Representación en la recta real



c) $C = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x\}$

Notación de intervalo: $C = (1, +\infty)$

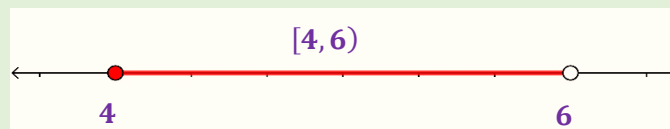
Representación en la recta real



d) $D = \{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x < 6\}$

Notación de intervalo: $C = [4, 6)$

Representación en la recta real



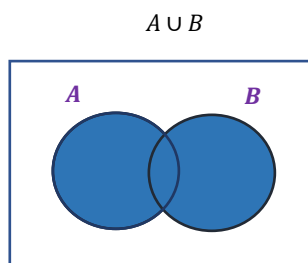
A la hora de representar los intervalos, puede hacerse en una misma recta o rectas por separados, la forma que resulte más comprensible para el lector.

1.2.1 Operaciones con intervalos

Las operaciones que pueden efectuarse entre los intervalos son: unión, intersección, diferencia, complemento, ya que los intervalos son subconjuntos de los números reales.

Unión de intervalos

Sean A y B dos intervalos, entonces la unión entre A y B , se denota por $A \cup B$, es el intervalo formado por todos los elementos que pertenecen a A o B o a ambos.



Primero se deben representar los intervalos de forma gráfica, la unión de dos intervalos será la región que contenga a ambos intervalos, es importante tener en cuenta que para pertenecer a la unión es suficiente que pertenezca a uno de los dos intervalos.

Se denota por:

$$A \cup B = \{x \in R / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Ejemplo 1.4

Dados los intervalos $A = \{x \in R / -2 < x \leq 1\}$, $B = (1, 5]$, $C = \{x \in R / 1 < x\}$ calcular.

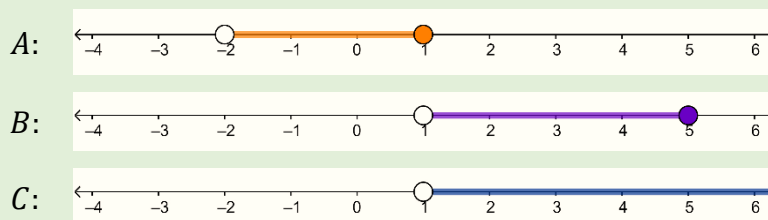
a) $A \cup B$

b) $B \cup C$

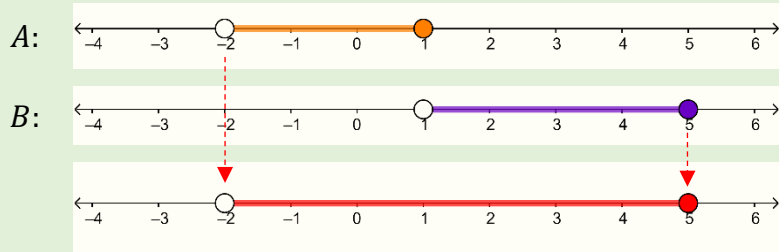
c) $A \cup C$

d) $A \cup B \cup C$

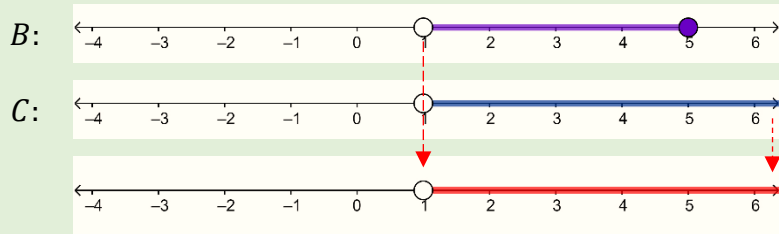
Solución



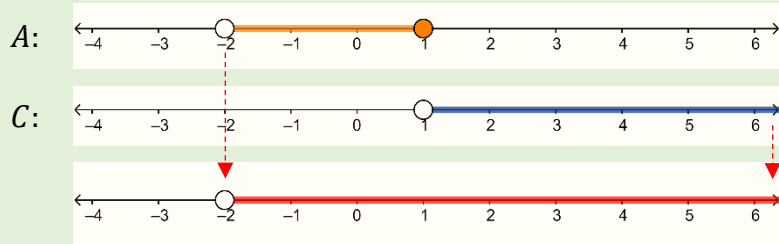
a) $A \cup B = (-2, 5]$



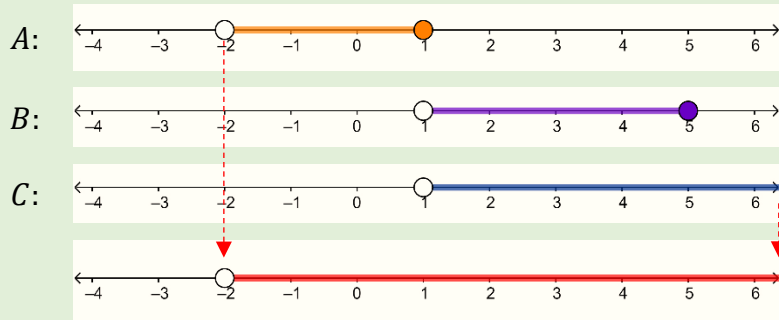
b) $B \cup C = (1, +\infty)$

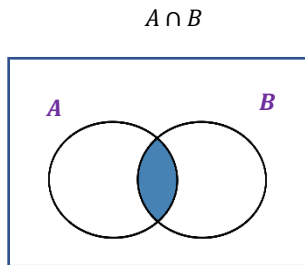


c) $A \cup C = (-2, +\infty)$



d) $A \cup B \cup C = (-2, +\infty)$





Intersección de intervalos

Sean A y B dos intervalos, entonces la intersección entre A y B , se denota por $A \cap B$, es el intervalo, formado por todos los elementos que pertenecen a A y B al mismo tiempo.

Al representar en un gráfico ambos intervalos, la intersección será la región común en la recta para ambos intervalos, es decir, pertenece a A y B al mismo tiempo.

Se denota por:

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplo 1.5

Dados los intervalos $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 1\}$, $B = (1, 5]$, $C = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x\}$ calcular.

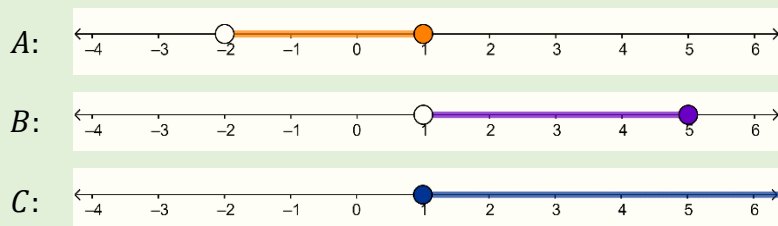
a) $A \cap B$

b) $B \cap C$

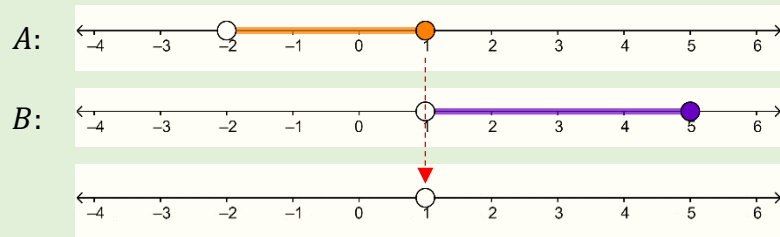
c) $A \cap C$

d) $A \cap B \cap C$

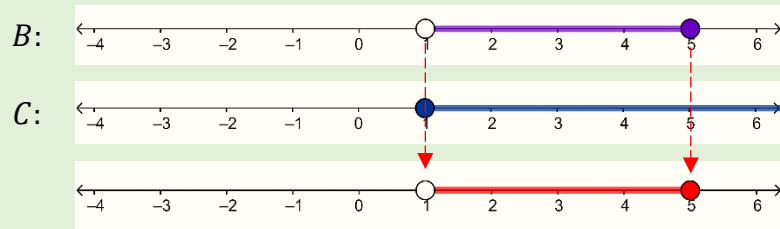
Solución



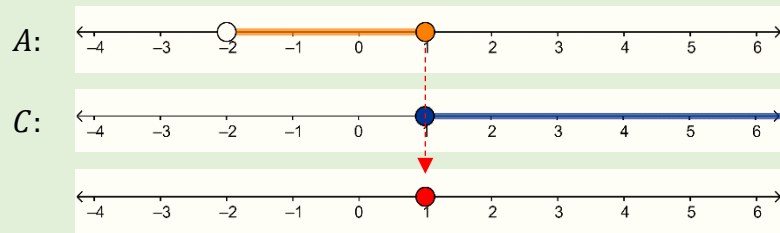
a) $A \cap B = \emptyset$



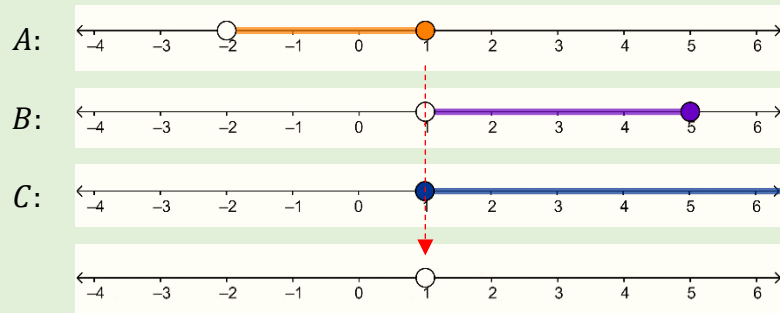
b) $B \cap C = (1, 5]$



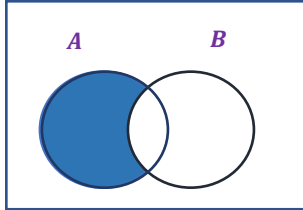
c) $A \cap C = \{1\}$



d) $A \cap B \cap C = \emptyset$



$A - B$



Diferencia de Intervalos

Al igual que las operaciones anteriores: Sean A y B dos intervalos entonces, la diferencia entre A y B denota por $A - B$, es el intervalo formado por todos los elementos que pertenecen al intervalo A y que no pertenecen al intervalo B .

Se denota por:

$$A - B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \notin B\}$$

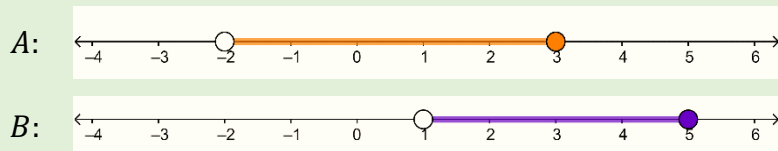
Ejemplo 1.6

Dados los intervalos $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 3\}$, $B = (1, 5]$, calcular.

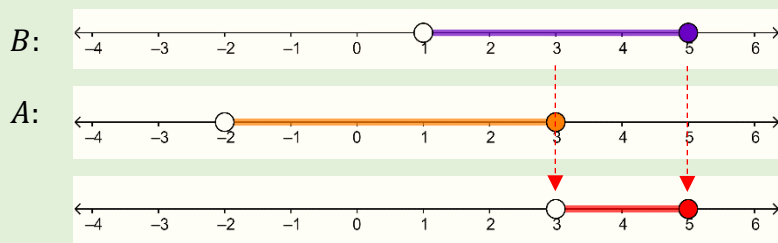
a) $B - A$

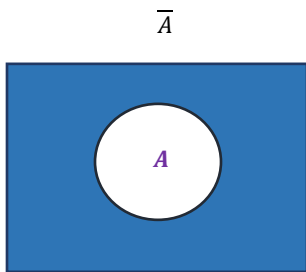
b) $A - B$

Solución

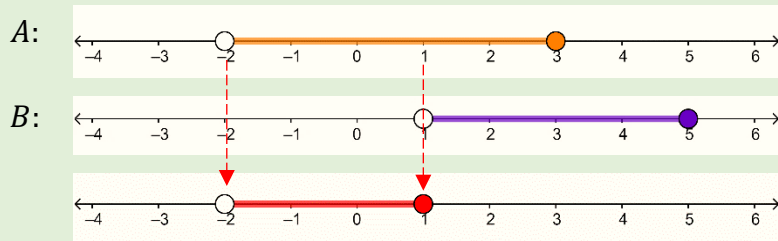


a) $B - A = (3, 5]$





b) $A - B = (-2, 1]$



Complemento de un intervalo

Sea A un intervalo, el complemento de A denota por: $A^c = \bar{A}$, son todos los elementos que están en la recta numérica que no pertenece al intervalo A .

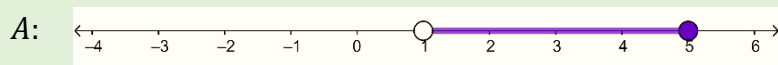
Se denota por:

$$\bar{A} = \{x \in R / x \notin A\}$$

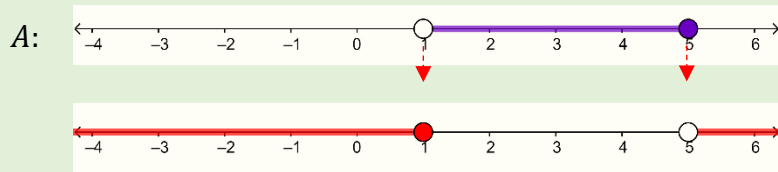
Ejemplo 1.7

Dado el intervalo $A = (1, 5]$, calcular: \bar{A}

Solución



$$\bar{A} = (-\infty, 1] \cup (5, +\infty)$$



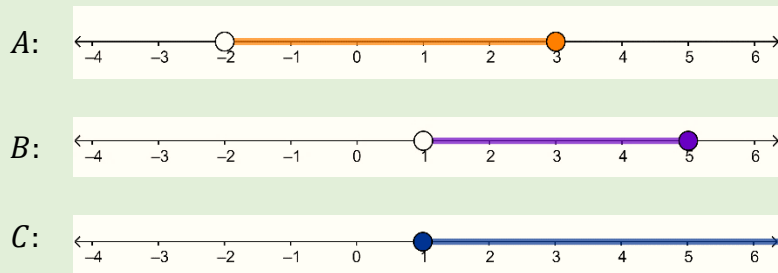
Ejemplo 1.8

Dados los intervalos $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 3\}$, $B = (1, 5]$, $C = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x\}$ calcular.

a) $B - (A \cap C)$

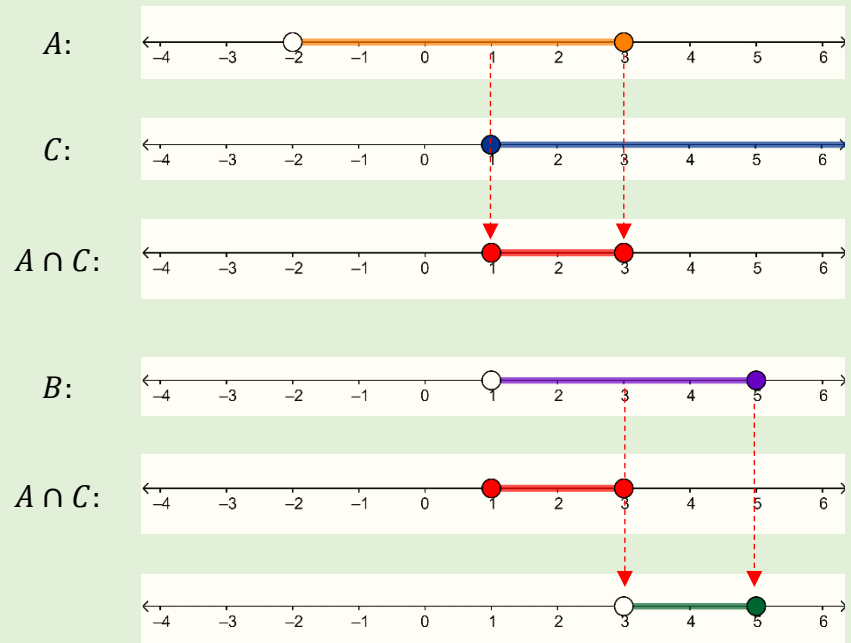
b) $A - (B \cup C)$

Solución



Primero se realiza la intersección

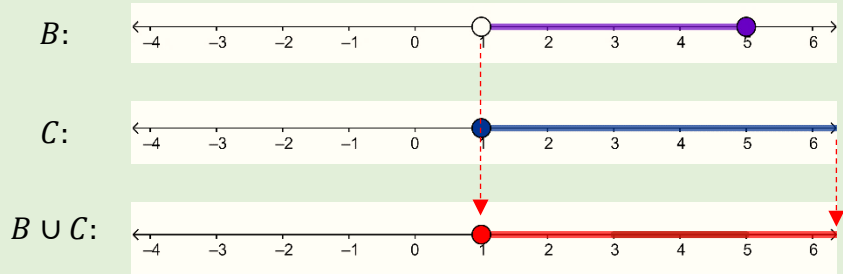
a) $B - (A \cap C) = (3, 5]$



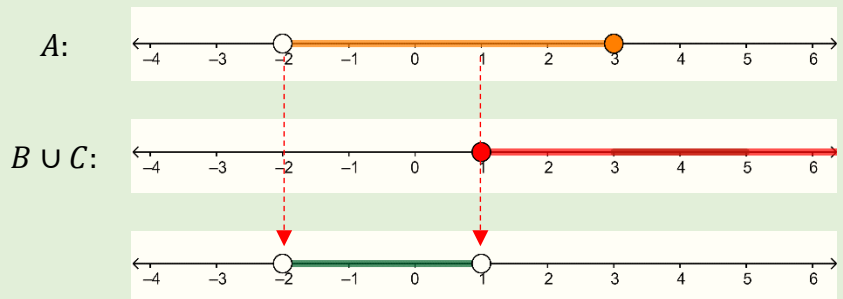
Se realiza la resta

Primero se realiza la unión

b) $A - (B \cup C) = (-2, 1)$



Se realiza la resta

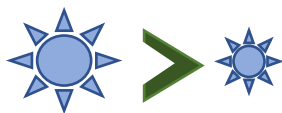


1.3 Desigualdades o Inecuaciones.

En general se puede decir que una desigualdad es una relación que cumple con cualquiera de las siguientes características:

menor < Mayor

Mayor > menor



- a) $A < B$
- b) $A > B$
- c) $A \leq B$
- d) $A \geq B$

Donde A y B son expresiones algebraicas llamados miembros de la desigualdad, estas expresiones pueden estar formadas por infinidad de variables, sin embargo, en este texto, se limitará a trabajar con desigualdades en una sola variable real.

Ejemplos de inecuaciones en una variable.

a) $3 - 2x \geq 2x - 4$

b) $4 - 2x + x^2 < 5x + 3$

c) $4x^3 - 2x + 7 \leq 4x^2 - 2$

d) $\frac{2x - 1}{x + 1} > x$

e) $\frac{3x - 1}{x + 3} \leq \frac{2x + 3}{x - 1}$

Resolver una desigualdad es determinar todos los valores que cumplen con ella (conjunto solución), es decir, que, al sustituir un valor de estos en la desigualdad esta, se cumple.

Para dar solución a una desigualdad es necesario conocer las propiedades de orden de los números reales.

Propiedades de orden

Sean $a, b, c \in R$

a) Si $a \leq b$ se cumple que $a + c \leq b + c$, es decir, si a ambos lados de una desigualdad se suma un mismo número, ya sea este positivo o negativo, esta no cambia.

$$\begin{aligned} 3 \leq 4 &\Rightarrow 3 + 5 \leq 4 + 5 \\ &8 \leq 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \leq 4 &\Rightarrow 3 - 5 \leq 4 - 5 \\ &-2 \leq -1 \end{aligned}$$

b) Si $a \leq b$ y $c > 0$ se cumple que $a * c \leq b * c$, es decir, si a ambos lados de una desigualdad se multiplica un mismo número positivo, esta no cambia.

$$\text{Si } a \leq b \text{ y } c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

$$4 \leq 7 \Rightarrow \frac{4}{2} \leq \frac{7}{2}$$

$$2 \leq \frac{7}{2}$$

$$\text{Si } a \leq b \text{ y } c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$

$$6 \leq 15 \Rightarrow \frac{6}{-4} \geq \frac{15}{-4}$$

$$-\frac{3}{2} \geq -\frac{15}{4}$$

Nota: Las propiedades son válidas para cualquier tipo de desigualdad.

$$2 \leq 5 \Rightarrow 2 * 3 \leq 5 * 3$$

$$6 \leq 15$$

$$-1 \leq 3 \Rightarrow -1 * 2 \leq 3 * 2$$

$$-2 \leq 6$$

c) Si $a \leq b$ y $c < 0$ se cumple que $a * c \geq b * c$, es decir, si a ambos lados de una desigualdad se multiplica un mismo número negativo, esta se invierte.

$$2 \leq 5 \Rightarrow 2(-2) \geq 5 * (-2)$$

$$-4 \geq -10$$

$$-1 \leq 3 \Rightarrow -1(-4) \geq 3(-4)$$

$$4 \geq -12$$

En este texto se abordarán las desigualdades: lineales, cuadráticas y racionales, haciendo referencia a una sola variable.

1.3.1 Desigualdades lineales.

Se denomina desigualdades lineales en una sola variable a aquellas desigualdades en las que solo aparece una variable y cuyo exponente mayor es uno.

Ejemplos de inecuaciones lineales en una variable:

a) $3 - 2x \geq 2x - 4$

b) $4 - 2x < 5x + 3$

c) $-2x + 7 \leq 4x - 2 < 2x + 1$

d) $7 \leq 3x - 6 < 9$

Para resolver este tipo de desigualdad se procede de manera similar al resolver una ecuación lineal en una variable, es decir,

se trasladan los términos que contienen a la variable hacia un lado (extremo) de la desigualdad y los que no la contienen al otro, sin dejar de lado las propiedades de orden.

Ejemplo 1.9

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad lineal

$$-2x + 7 \leq 4x - 2.$$

Solución

Se trasladan los términos con la variable x , a la derecha, y los que no contienen la variable a la izquierda.

$$-2x + 7 \leq 4x - 2$$

$$7 + 2 \leq 4x + 2x$$

$$9 \leq 6x$$

$$\frac{9}{6} \leq x$$

$$\frac{3}{2} \leq x$$

El conjunto solución es $x \in [3/2, +\infty)$.

Ejemplo 1.10

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad lineal

$$3x - 1 < 6x + 4 \leq 4x + 13.$$

Solución

Para resolver este tipo de desigualdad, se separa en dos desigualdades, la primera quedaría el miembro 1 y 2, para la

Al dividir por un número positivo la desigualdad no cambia.

Es importante tener claro que la variable puede despejarse en el lado izquierdo o derecho.

segunda el miembro 2 y 3, posteriormente se resuelven por separado dichas desigualdades y la solución será la intersección de los conjuntos soluciones de las desiguales resueltas.

1) $3x - 1 < 6x + 4$

Se trasladan los términos con la variable x , a la derecha, y los que no contienen la variable a la izquierda.

$$3x - 1 < 6x + 4$$

$$-1 - 4 < 6x - 3x$$

$$-5 < 3x$$

$$-\frac{5}{3} < x$$

El conjunto solución es $x \in (-5/3, +\infty)$.

2) $6x + 4 \leq 4x + 13$

Se trasladan los términos con la variable x , a la izquierda, y los que no contienen la variable a la derecha.

$$6x + 4 \leq 4x + 13$$

$$6x - 4x \leq 13 - 4$$

$$2x \leq 9$$

$$x \leq \frac{9}{2}$$

El conjunto solución es $x \in (-\infty, 9/2]$.

La solución será la intersección.

$$(-5/3, +\infty) \cap (-\infty, 9/2]$$

Es decir: $x \in (-5/3, 9/2]$.

El ejemplo 1.11 puede resolverse como el ejemplo 1.10, con la desventaja que el proceso es más extenso.

Cuando se requiera resolver desigualdades con tres miembros, pero los extremos no contengan la variable, solo de se tiene que despejar la variable en el centro, como se desarrolla en el ejemplo 1.11

Ejemplo 1.11

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad lineal

$$-1 < 2x - 7 \leq 13.$$

Solución

Para resolver este tipo de ejercicio, la idea será que la variable quede despejada en el centro.

$$-1 < 2x - 7 \leq 13$$

$$-1 + 7 < 2x \leq 13 + 7$$

$$6 < 2x \leq 20$$

$$\frac{6}{2} < x \leq \frac{20}{2}$$

$$3 < x \leq 10$$

El conjunto solución es $x \in (3,10]$.

Ejemplo 1.12

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad lineal

$$-1 < -3x + 8 \leq 17.$$

Solución

Para resolver este tipo de ejercicio, la idea será que la variable quede despejada en el centro.

$$-1 < -3x + 8 \leq 17$$

$$-1 - 8 < -3x \leq 17 - 8$$

$$-9 < -3x \leq 9$$

$$\begin{aligned} \frac{-9}{-3} > x &\geq \frac{9}{-3} \\ 3 > x &\geq -3 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $x \in [-3,3)$.

1.3.2 Desigualdades cuadráticas.

Se denomina desigualdades cuadráticas en una variable a aquellas desigualdades en las que solo aparece una variable y cuya mayor potencia es dos.

Recordar que si:

$$x^2 + bx + c = 0$$

Entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Factores

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Cuando aparezcan términos semejantes, estos se deben reducir.

Ejemplos de inecuaciones cuadráticas en una variable:

a) $3 - 2x^2 + 2x \geq x^2 + 2x - 4$

b) $4 - 2x < 5x^2 + 3$

c) $-2x + 7 \leq x^2 - 4x - 2$

Para encontrar el conjunto solución de este tipo de desigualdades se procede de la siguiente manera:

- 1) Se trasladan todos los términos de la desigualdad aún solo lado de la desigualdad.
- 2) Se factoriza el polinomio de grado dos y se encuentran las raíces (depende del problema, en ocasiones es más sencillo realizar este proceso de forma inversa, es decir, primero se encuentran las raíces y luego los factores).
- 3) Se analizan utilizando un cuadro de variación los signos de los factores con el objetivo de conocer el signo del polinomio de grado dos.

- Factorizar:

$$x^2 - 9x + 20$$

- Se escriben dos factores (paréntesis): () ()
- Se extrae la raíz cuadrada del primer término $\sqrt{x^2} = x$ y se anota en ambos factores: (x -)(x -)
- Se definen los signos: el signo del primer factor es el signo del segundo término; el signo del segundo factor se obtiene al multiplicar los signos del segundo y tercer término. (x -)(x -)
- Se buscan dos cantidades que multiplicadas den +20 y que sumados den -9. Los números que cumplen esa condición son 5 y 4. Entonces, se anotan esos números en los espacios en blanco y queda lista la factorización:

$$x^2 - 9x + 20 = (x - 5)(x - 4)$$

Los valores que hacen cero un polinomio son llamados ceros del polinomio o raíces del polinomio.

Ejemplo 1.13

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad cuadrática $3x^2 - 13x + 15 \leq 2x^2 - 4x - 5$.

Solución

Primero

Se trasladan todos los términos a un solo miembro de la desigualdad.

$$3x^2 - 13x + 15 \leq 2x^2 - 4x - 5$$

$$3x^2 - 2x^2 - 13x + 4x + 15 + 5 \leq 0$$

$$x^2 - 9x + 20 \leq 0$$

Luego se factoriza el polinomio de grado 2.

$$x^2 - 9x + 20 = (x - 5)(x - 4)$$

Es decir:

$$(x - 5)(x - 4) \leq 0$$

Se encuentran los valores que hacen cero los factores.

$$(x - 5) = 0$$

$$x = 5$$

$$(x - 4) = 0$$

$$x = 4$$

Se construye la tabla de variación basándose en las raíces.

	$-\infty$	4	5	$+\infty$
$(x - 5)$	-	-	•	+
$(x - 4)$	-	•	+	+
$(x - 5)(x - 4)$	+	-	-	+

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$a = 4, \quad b = -4, \quad c = -3$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{8}$$

$$x_1 = \frac{4 + 8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{4 - 8}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Factores

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 3 &= \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Como se requiere que $x^2 - 9x + 20 \leq 0$ (los valores menores o iguales que cero, es decir, los negativos), de donde el conjunto solución es $x \in [4, 5]$.

Ejemplo 1.14

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad cuadrática $3x^2 - 8x + 5 > -4x - x^2 + 8$.

Solución

Primero

Se trasladan todos los términos a un solo miembro de la desigualdad.

$$3x^2 - 8x + 5 > -4x - x^2 + 8$$

$$3x^2 + x^2 - 8x + 4x + 5 - 8 > 0$$

$$4x^2 - 4x - 3 > 0$$

Luego se factoriza el polinomio de grado 2 utilizando la formula general.

$$4x^2 - 4x - 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Es decir:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$$

Los valores que hacen cero los factores encontrados son:

$$x = 3/2$$

$$x = -1/2$$

Se construye la tabla de variación basándose en las raíces.

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$(x - \frac{3}{2})$	-	-	○	+
$(x + \frac{1}{2})$	-	○	+	+
$(x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})$	+	-	+	+

Como se requiere que $4x^2 - 4x - 3 > 0$ (los valores estrictamente mayores que cero, es decir, los positivos), de donde el conjunto solución es $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

1.3.3 Desigualdades racionales.

Una expresión algebraica se dice racional si, por medio de procesos algebraicos, puede escribirse como el cociente de dos polinomios, es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en una misma variable.

Entonces se puede decir que una desigualdad racional es una relación que cumple con cualquiera de las siguientes características:

- a) $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$
- b) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$
- c) $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$
- d) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$

Ejemplos de inecuaciones cuadráticas en una variable:

$$\text{a) } \frac{3 - 2x^2 + 2x}{x^2 + 2x - 4} \geq 0$$

$$\text{b) } 0 < \frac{5x^2 + 3}{4 - 2x}$$

$$\text{c) } \frac{-2x + 7}{4x - 2} \leq 0$$

Para encontrar el conjunto solución de este tipo de desigualdades se procede de manera similar a la de las desigualdades polinómicas.

Ejemplo 1.15

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad

$$\text{racional } \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{3-x}.$$

Solución

Primero

Se trasladan todos los términos a un solo miembro de la desigualdad.

$$\frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{3-x}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{3-x} \leq 0$$

$$\frac{1(3-x) - 1(x+2)}{(x+2)(3-x)} \leq 0$$

$$\frac{3-x-x-2}{(x+2)(3-x)} \leq 0$$

$$\frac{1-2x}{(x+2)(3-x)} \leq 0$$

Recordar que la suma y resta de fracciones se realiza de la siguiente forma.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Se encuentran los valores que hacen cero los factores.

$$\begin{array}{l|l|l}
 1 - 2x = 0 & x + 2 = 0 & 3 - x = 0 \\
 1 = 2x & x = -2 & 3 = x \\
 \frac{1}{2} = x & &
 \end{array}$$

Se construye la tabla de variación basándose en las raíces.

	$-\infty$	-2	$1/2$	3	$+\infty$
$1 - 2x$	+	+	●	-	-
$x + 2$	-	○	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	○	-
$\frac{1 - 2x}{(x + 2)(3 - x)}$	-	+	-	+	

Como se requiere que $\frac{1-2x}{(x+2)(3-x)} \leq 0$ (los valores menores o iguales que cero, es decir, los negativos), de donde el conjunto solución es $x \in (-\infty, -2) \cup \left[\frac{1}{2}, 3\right)$.

Ejemplo 1.16

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad

racional $\frac{1-x}{x^2+x-20} > 0$.

Solución

Primero

Como todos los términos ya están en un solo miembro de la desigualdad, se procederá a factorizar el polinomio del denominador así:

$$x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$$

Es decir:

$$\frac{1 - x}{(x + 5)(x - 4)} > 0$$

Se encuentran los valores que hacen cero los factores.

$$\begin{array}{l|l|l} 1 - x = 0 & x + 5 = 0 & x - 4 = 0 \\ 1 = x & x = -5 & x = 4 \end{array}$$

Se construye la tabla de variación basándose en las raíces.

	$-\infty$	-5	1	4	$+\infty$
$1 - x$	+	+	○	-	-
$x + 5$	-	○	+	+	+
$x - 4$	-	-	-	○	+
$\frac{1 - 2x}{(x + 2)(3 - x)}$	+	-	+	-	-

Como se requiere que $\frac{1-x}{(x+5)(x-4)} > 0$ (los valores estrictamente mayores que cero, es decir, los positivos), de donde el conjunto solución es $x \in (-\infty, -5) \cup (1, 4)$.

Ejemplo 1.17

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad

racional $\frac{(4-x)(x+3)}{(x+6)(x-1)} \leq 0$.

Solución

Primero

Como todos los términos ya están en un solo miembro de la desigualdad, se procederá encontrar los valores que hacen cero los factores así:

$$\begin{array}{c|c|c|c} 4 - x = 0 & x + 3 = 0 & x + 6 = 0 & x - 1 = 0 \\ \hline 4 = x & x = -3 & x = -6 & x = 1 \end{array}$$

Se construye la tabla de variación basándose en a las raíces.

	$-\infty$	-6	-3	1	4	$+\infty$
$4 - x$	+	+	+	+	●	-
$x + 3$	-	-	●	+	+	+
$x + 6$	-	○	+	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	○	+	+
$\frac{(4-x)(x+3)}{(x+6)(x-1)}$	-	+	-	+	-	-

Como se requiere que $\frac{(4-x)(x+3)}{(x+6)(x-1)} \leq 0$ (los valores menores o iguales que cero, es decir, los negativos), de donde el conjunto solución es $x \in (-\infty, -6) \cup [-3, 1) \cup [4, +\infty)$.

Ejemplo 1.18

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad

racional $\frac{(4x-3)^2(2x+3)}{(x+2)(x-4)} \leq 0$.

Solución

Como todos los términos ya están en un solo miembro de la desigualdad, se procederá encontrar los valores que hacen cero los factores así:

$$\begin{array}{l|l|l|l} 4x - 3 = 0 & 2x + 3 = 0 & x + 2 = 0 & x - 4 = 0 \\ x = 3/4 & x = -3/2 & x = -2 & x = 4 \end{array}$$

Se construye la tabla de variación basándose en las raíces.

	$-\infty$	-2	$-3/2$	$3/4$	4	$+\infty$
$(4x - 3)^2$	+	+	+	●	+	+
$2x + 3$	-	-	●	+	+	+
$x + 2$	-	○	+	+	+	+
$x - 4$	-	-	-	-	○	+
$\frac{(4x - 3)^2(2x + 3)}{(x + 2)(x - 4)}$	-	+	-	-	+	+

Como se requiere que $\frac{(4x-3)^2(2x+3)}{(x+2)(x-4)} \leq 0$ (los valores menores o iguales que cero, es decir, los negativos), de donde el conjunto solución es $x \in (-\infty, -2) \cup [-3/2, 4)$.

Ejemplo 1.19

Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad

racional $\frac{(x+2)(2x-3)}{(x-3)^2(x+3)} \geq 0$.

Solución

Como todos los términos ya están en un solo miembro de la desigualdad, se procederá encontrar los valores que hacen cero los factores así:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x + 2 = 0 & 2x - 3 = 0 & x - 3 = 0 & x + 3 = 0 \\ x = -2 & x = 3/2 & x = 3 & x = -3 \end{array}$$

Se construye la tabla de variación basándose en las raíces.

	$-\infty$	-3	-2	$3/2$	3	$+\infty$		
$x + 2$	←	-	-	•	+	+	+	→
$2x - 3$	-	-	-	-	•	+	+	
$(x - 3)^2$	+	+	+	+	+	○	+	
$x + 3$	-	○	+	+	+	+	+	
$\frac{(x + 2)(2x - 3)}{(x - 3)^2(x + 3)}$	-	+	-	+	+	+		

Como se requiere que $\frac{(x+2)(2x-3)}{(x-3)^2(x+3)} \geq 0$ (los valores mayores o iguales que cero, es decir, los positivos), de donde el conjunto solución es $x \in (-3, -2] \cup [3/2, 3) \cup (3, +\infty)$.

1.3.4 aplicaciones económicas de las inecuaciones

Las **aplicaciones** de **inecuaciones** lineales, al igual que cuadráticas, son muy útiles para calcular el costo, ingreso y utilidad (beneficio) de una empresa o negocio, para poder conocer la cantidad de artículos para una utilidad dada, además de poder comparar los beneficio de adquirir artículos de diferentes proveedores, entre otras.

Ejemplo 1.20

Un fabricante puede vender todas las unidades de un producto a \$25 cada una. El costo C (en dólares) de producir x unidades cada semana está dado por $C = 3000 + 20x - 0.1x^2$. ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana para obtener alguna utilidad?

Solución

Primero se deben extraer los datos del problema.

$$x = \# \text{ unidades}$$

$$U = I - C$$

$$I = 25x$$

$$C = 3000 + 20x - 0.1x^2$$

Sea desea vender x unidades para obtener alguna utilidad.

La utilidad (U) queda dada por la ecuación.

$$U = 25x - (3000 + 20x - 0.1x^2)$$

$$= 25x - 3000 - 20x + 0.1x^2$$

$$= -3000 + 5x + 0.1x^2$$

Luego, como se quiere obtener utilidad $U > 0$.

$$0.1x^2 + 5x - 3000 > 0$$

$$x^2 + 50x - 30000 > 0$$

$$(x + 200)(x - 150) > 0$$

$$(x + 200) = 0$$

$$x = -200$$

$$(x - 150) = 0$$

$$x = 150$$

U: Utilidad

I: Ingreso

C: Costos

$$U = I - C$$

p: precio

x: unidades vendidas

$$I = px$$

Multiplicando la desigualdad por 10.

Factorizando.

Encontrando las raíces.

Analizando signos en el cuadro de variación.

	$-\infty$	-200	150	$+\infty$
$(x + 200)$	-	○	+	+
$(x - 150)$	-	-	○	+
$(x + 200)(x - 150)$	+	-	+	

La solución de la inecuación cuadrática es

$$x \in (-\infty, -200) \cup (150, +\infty).$$

Ahora, tomando en cuenta el contexto del problema para definir la solución, lógicamente no se pueden vender cantidades negativas de artículos, por lo tanto, solo se toma en consideración la parte positiva de la solución $x \in (150, +\infty)$.

De donde se deben producir y vender 151 unidades como mínimo para obtener utilidad.

Ejemplo 1.21

Se tiene un presupuesto de \$150 para comprar dos tipos de queso. El queso A cuesta \$3.5 la libra, el queso B cuesta \$2.0. ¿Cuántas libras como máximo hay que comprar de tipo A para no exceder el presupuesto, si se impone la condición que la cantidad a comprar de tipo B sea el doble que la cantidad a comprar de tipo A?

Solución

Primero se deben extraer los datos del problema y plantear las variables.

se x # de libras a comprar del tipo A.

entonces $2x$ será # de libras a comprar del tipo B.

El doble de una cantidad es igual a multiplicarla por dos.

$$3.5(x) + 2(2x) \leq 150$$

$$3.5x + 4x \leq 150$$

$$7.5x \leq 150$$

$$x \leq \frac{150}{7.5}$$

$$x \leq 20$$

El máximo de libras de tipo A que se pueden comprar es 20.

Ejemplo 1.22

Una fábrica está pensando si elaborar los empaques de las mangueras o seguirlos comprando. El aparato usa un juego de empaques que ha estado adquiriendo a un costo de \$5 cada juego. La fábrica estima que, si los elabora, los costos fijos mensuales de la empresa aumentarán en \$2000 y el costo debido a los materiales y la mano de obra de cada juego de empaques será de \$3. ¿Cuál es el mínimo número de aparatos a fabricar al mes para que la elaboración de los empaques por la propia empresa signifique un ahorro de \$6000 al mes?

Solución

Primero se deben extraer los datos del problema y plantear las variables.

Se x # de juegos de empaques.

$$\text{Inversión} - \text{Elaboración} \geq 6000$$

$$5x - (3x + 2000) \geq 6000$$

$$5x - 3x - 2000 \geq 6000$$

$$2x \geq 6000 + 2000$$

$$x \geq \frac{8000}{2}$$

$$x \geq 4000$$

Para obtener un ahorro de al menos \$6000 se tienen que fabricar mínimo 4000 aparatos.

1.4 Relaciones de R en R.

Entender los conceptos de **relación** y de **función** es de suma importancia en Matemática, ya que son muy útiles para modelar e interpretar el mundo real. Para lograr esta comprensión es necesario adentrarse en la noción de **correspondencia**, pues esta tiene un papel fundamental en las relaciones y funciones.

Lo primero es entender que **correspondencia es equivalente a relación**. En lenguaje común, decir “en relación a”, es equivalente a decir “corresponde a”.

Por ejemplo, en una tienda comercial, cada artículo **está relacionado** con su precio; o sea, a cada artículo **le corresponde** un precio.

En la guía telefónica, cada cliente **está relacionado** con un número; o sea, a cada nombre de la guía **le corresponde** un número.

Si se medita acerca del mundo, se puede observar muchos ejemplos de cosas completamente ordinarias como: la anotación de un gol en el minuto uno, que se puede representar por (1,1); el número de estudiantes que ingreso a al UES en el

2023 es 10000, se puede representar (2023, 10000); las dimensiones de un terreno de lardo 20 mts y de ancho 30 mts, se representa (20, 30), entre otras cosas. Se puede observar que el orden en el que los números se presentan es significativo (importante), es por esto que estas representaciones se les llama “pares ordenados”.

Definición 1.3: par ordenado

Es una pareja de dos elementos x y y que se denota (x, y) , donde a x se le llama primer componente del par y y se le llama segunda componente.

1.4.1 Producto cartesiano

Dado dos conjuntos cualesquiera A y B se llama producto cartesiano de A por B (en ese orden), que se representa $A \times B$, al conjunto de todos los pares ordenados (x, y) , tales que su primera componente x pertenece a A y la segunda componente y pertenece a B .

La representación del producto $A \times B$ en notación de conjuntos es: $A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$

Ejemplo 1.23

Encontrar el producto cartesiano A con B y el producto cartesiano B con A , para los conjuntos siguientes:

a) $A = \{3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

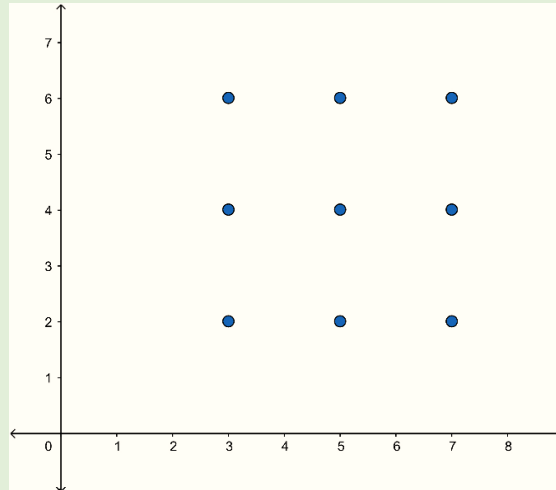
b) $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{k, l, m, n\}$

Solución

Extensión.

$$a) A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (3, 2), (3, 4), (3, 6), \\ (5, 2), (5, 4), (5, 6), \\ (7, 2), (7, 4), (7, 6) \end{array} \right\}$$

Gráfica del producto cartesiano $A \times B$.

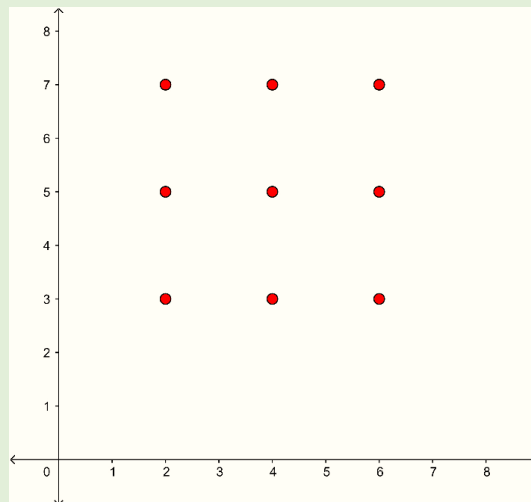


Un par ordenado es una colección de dos objetos ordenados como primero y segundo.

Extensión.

$$B \times A = \left\{ \begin{array}{l} (2, 3), (2, 5), (2, 7), \\ (4, 3), (4, 5), (4, 7), \\ (6, 3), (6, 5), (6, 7) \end{array} \right\}$$

Gráfica del producto cartesiano $B \times A$.



Extensión

$$b) A \times B = \left\{ \begin{array}{cccc} (a, k), & (a, l), & (a, m), & (a, n), \\ (b, k), & (b, l), & (b, m), & (b, n), \\ (c, k), & (c, l), & (c, m), & (c, n) \end{array} \right\}$$

$$B \times A = \left\{ \begin{array}{ccc} (k, a), & (k, b), & (k, c), \\ (l, a), & (l, b), & (l, c), \\ (m, a), & (m, b), & (m, c), \\ (n, a), & (n, b), & (n, c) \end{array} \right\}$$

Ejemplo 1.24

Encontrar el producto cartesiano A con B y el producto cartesiano B con A, para los conjuntos siguientes:

a) $A = (3, 7]$ y $B = \{2, 4, 6\}$

b) $A = [2, 6)$ y $B = [1, 7]$

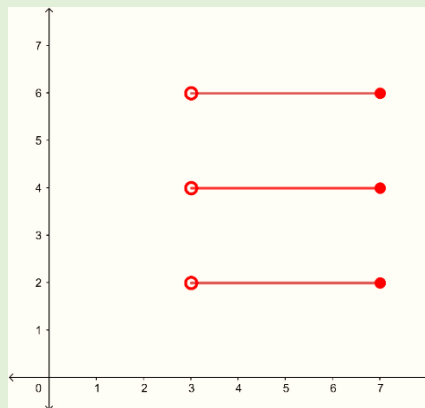
Solución

a) $A = (3, 7]$ y $B = \{2, 4, 6\}$

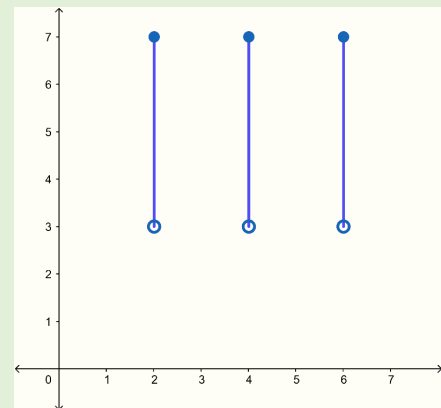
En el literal a) del ejemplo 1.24 se encuentra el producto X de un conjunto de números enteros y un intervalo.

Es importante aclarar que este tipo de producto no es posible calcular por extensión como los ejemplos anteriores, ya que los reales son infinitos, por tanto, se representara de forma gráfica.

$A \times B$

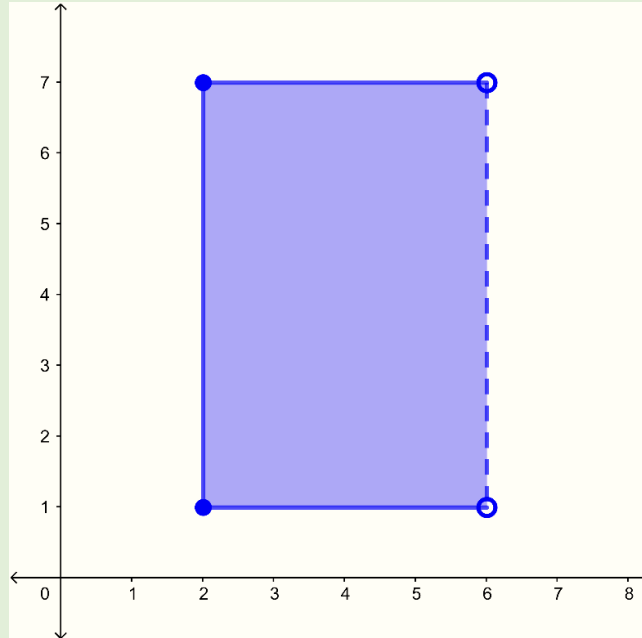


$B \times A$

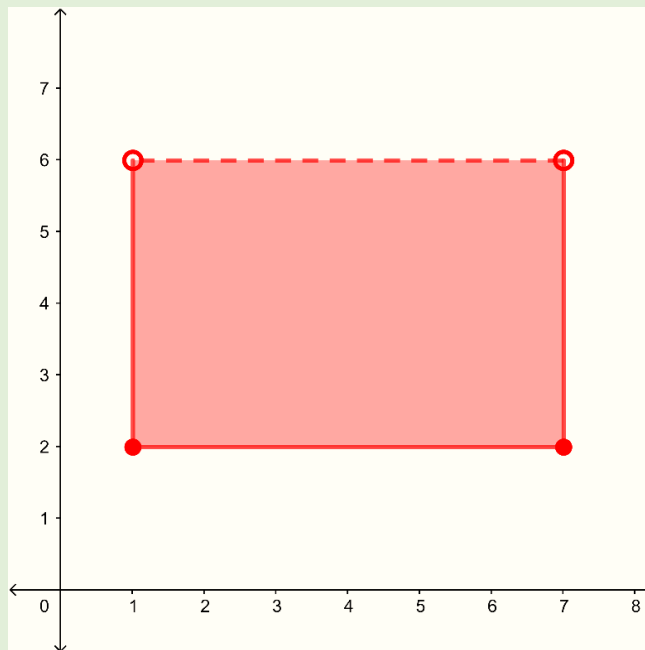


b) $A = [2, 6)$ y $B = [1, 7]$

$A \times B$



$B \times A$



En el ejemplo 1.24 tanto el literal a) como el literal b) no se puede representar por extensión, de donde se tiene que representar de forma gráfica.

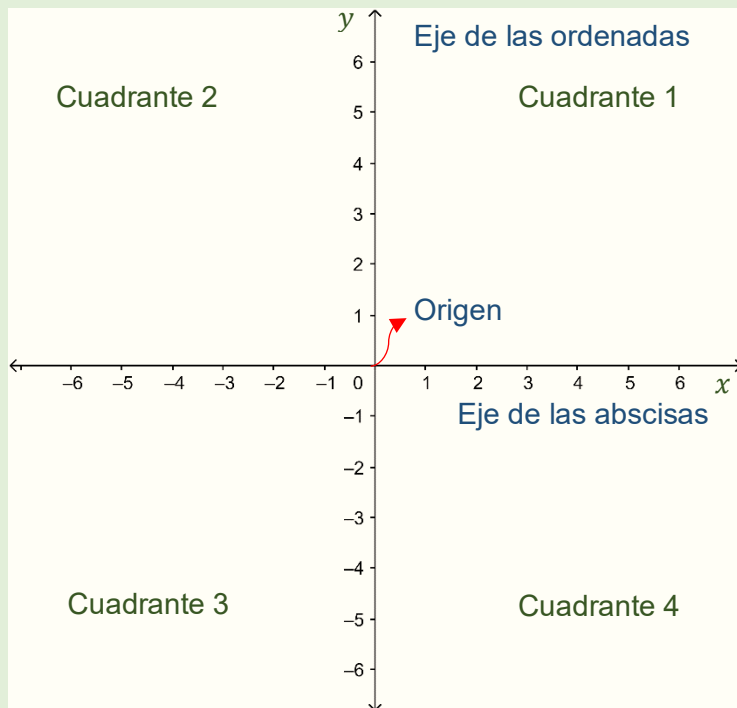
1.4.2 Plano cartesiano

El **plano cartesiano** está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada **eje de las abscisas** o de las equis (x), y la vertical, **eje de las ordenadas** o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de **origen**.

Para localizar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento:

1. Para localizar la abscisa o valor de x , se cuentan las unidades correspondientes hacia la derecha si son positivas o hacia la izquierda si son negativas, a partir del punto de origen, en este caso el cero.

2. Desde donde se localiza el valor de x , se cuentan las unidades correspondientes (en el eje de las ordenadas) hacia arriba, si son positivas o hacia abajo, si son negativas y de esta forma se localiza cualquier punto dadas ambas coordenadas.



El **plano cartesiano** tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus **coordenadas o pares ordenados**.

Las coordenadas se forman asociando un valor del eje de las equis a uno de las yes, respectivamente, esto indica que un **punto (P)** se puede ubicar en el plano cartesiano tomando como base sus coordenadas, el cual se representa como $P(x, y)$

1.4.3 Concepto de Relación: Dominio y Rango

La vida está llena de relaciones: como por ejemplo cuando se desea comprar (adquirir) una camisa existe una relación entre el vendedor y el cliente, en el proceso de enseñanza los alumnos se relacionan con el docente.

En matemática, **relación** es la correspondencia de un primer conjunto, llamado **dominio**, con un segundo conjunto, llamado **recorrido o rango**, de manera que a cada elemento del dominio le corresponde uno o más elementos del recorrido o rango.

Por su parte, una **función** es una relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del dominio le corresponde **uno y solo un valor** del recorrido.

De las definiciones anteriores se puede deducir que todas las **funciones** son **relaciones**, pero **no todas** las **relaciones** son **funciones**.

Dados dos conjuntos A y B una relación definida de A en B es un conjunto de parejas ordenadas (**par ordenado**) que hacen verdadera una proposición (regla específica); dicho de otro modo, una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

En palabras más sencillas, una relación R de A en B es un conjunto de pares ordenados (x,y) cuyas componentes cumplen una regla específica de comportamiento, en donde x es un elemento de A y y es un elemento de B .

A : conjunto de partida

B : conjunto de llegada

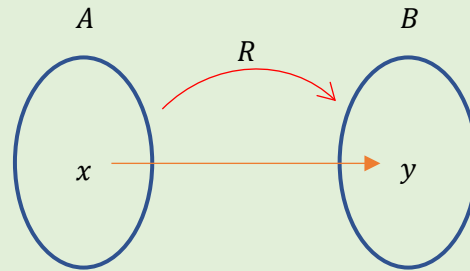
R : regla de correspondencia

$$R = \{(x, y) \in A \times B / xRy\}$$

Se representa:

$$R: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow xRy$$



Dominio de una relación:

El **dominio** de una relación es el conjunto de **pre-imágenes**; es decir, el conjunto formado por los elementos del conjunto de partida que están relacionados.

Rango de una relación:

Se le denomina **recorrido o rango** al conjunto de **imágenes**, es decir, el conjunto formado por los elementos del conjunto de llegada que están relacionados.

Ejemplo 1.25

Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 6\}$; Determine las siguientes relaciones:

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B / x + y \text{ es un número par}\}$

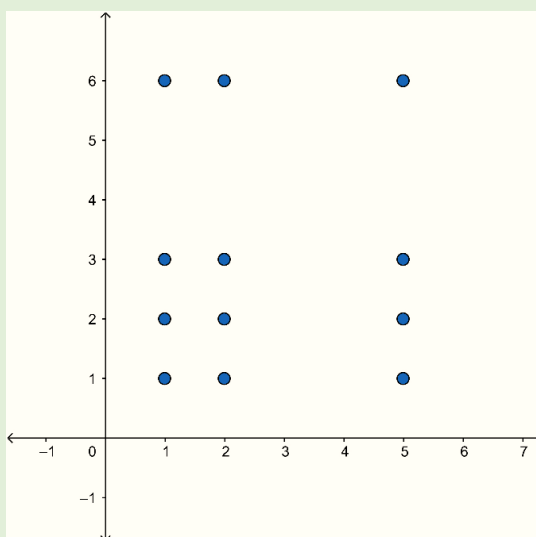
b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B / x^2 + y^2 > 6\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B / x > y\}$

d) $R_4 = \left\{ (x, y) \in A \times B / \sqrt{\frac{2x+y}{3}} - 1 = 0 \right\}$

Solución

$$A \times B = \left\{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 6) \right\}$$

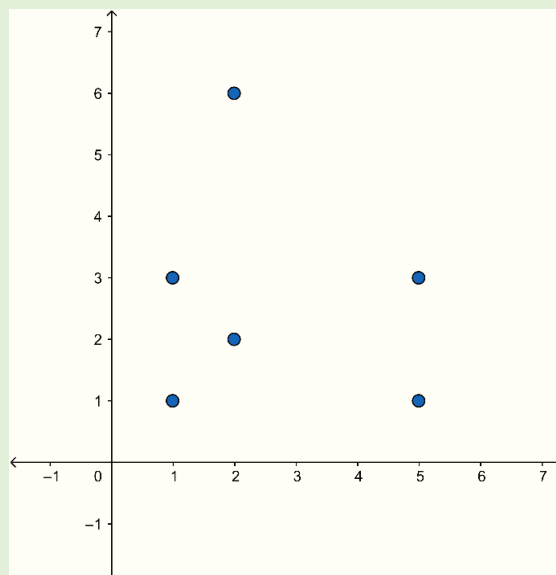
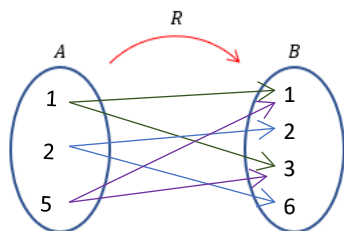


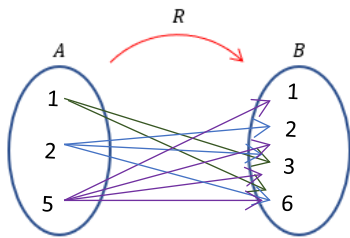
a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B / x + y \text{ es un número par}\}$

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 6), (5, 1), (5, 3)\}$$

$$D_{R_1} = \{1, 2, 5\}$$

$$R_{R_1} = \{1, 2, 3, 6\}$$



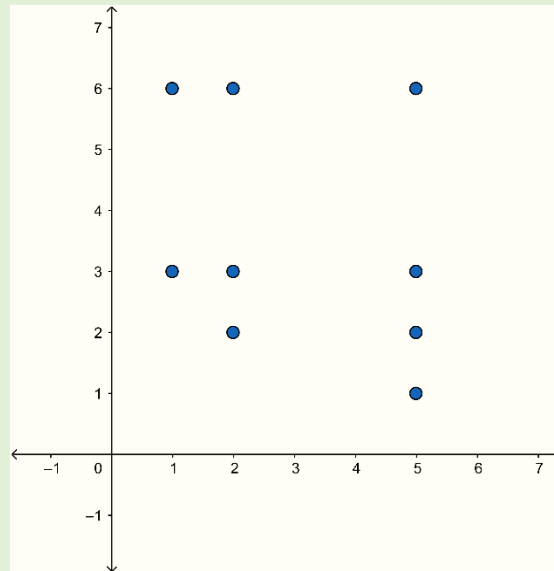


b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B / x^2 + y^2 > 6\}$

$R_2 = \{(1,3), (1,6), (2,2), (2,3), (2,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,6)\}$

$D_{R_2} = \{1, 2, 5\}$

$R_{R_2} = \{1, 2, 3, 6\}$

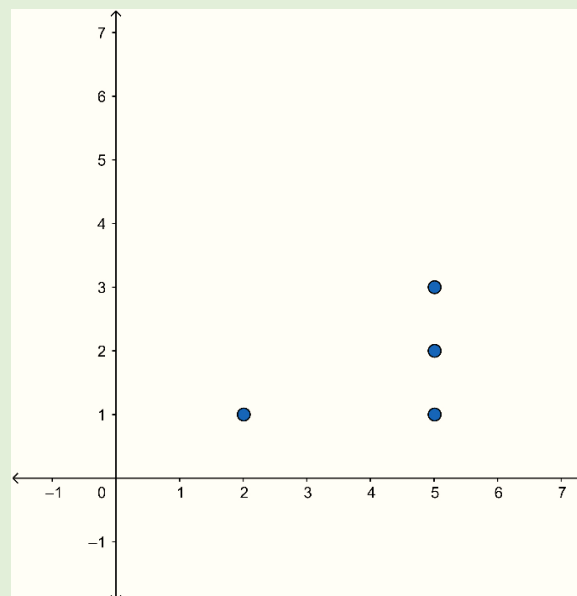
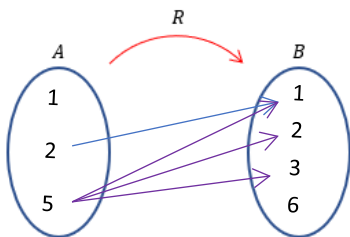


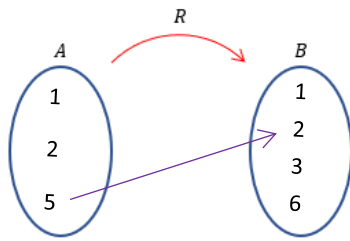
c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B / x > y\}$

$R_3 = \{(2,1), (5,1), (5,2), (5,3)\}$

$D_{R_3} = \{2, 5\}$

$R_{R_3} = \{1, 2, 3\}$



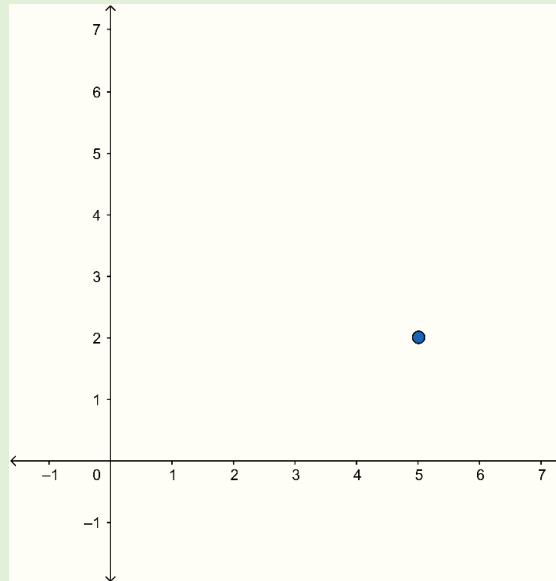


$$\mathbf{d)} \quad R_4 = \left\{ (x, y) \in A \times B / \sqrt{\frac{2x+y}{3}} - 1 = 0 \right\}$$

$$R_4 = \{(5, 2)\}$$

$$D_{R_4} = \{5\}$$

$$R_{R_4} = \{2\}$$



Ahora bien, cuando una relación toma tanto como conjunto de partida y llegada a R , se dice que es una relación de R en R es decir:

$$R: R \rightarrow R$$

$$x \rightarrow xRy$$

$$R = \{(x, y) \in R^2 / xRy\}$$

Estas son llamadas relaciones de variable real, ya que se relaciona un número real del conjunto de partida con un número real del conjunto de llegada.

Todas las **relaciones** pueden ser graficadas en el plano cartesiano.

1.4.4 Representación gráfica de relaciones

En este texto se abordarán dos tipos de relaciones cuando es una igualdad y cuando es una o más inecuaciones.

La primera es muy sencilla, ya que solo es necesario conocer unos puntos que cumplan la regla de correspondencia asignada (relación), sustituyendo valores de x para encontrar los valores de y , luego se grafican y se unen por medio de una curva la cual representara la relación.

Ejemplo 1.26

Considere la relación R de variable real, tal que, $y = 2 - 3x$, graficar, además encontrar su dominio y rango.

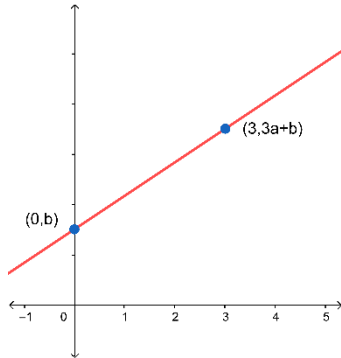
Solución

Para resolver este tipo de desigualdad, se puede realizar una tabla de valores, así:

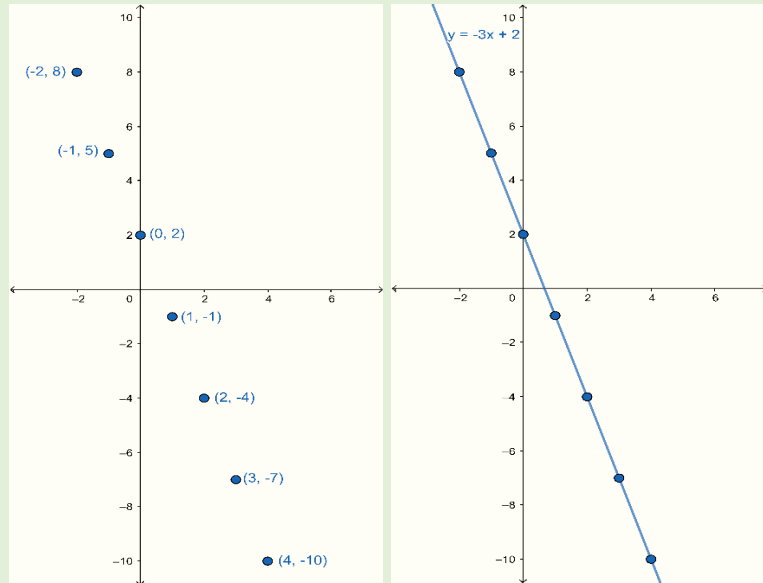
x	$y = 2 - 3x$	(x, y)
-2	$y = 2 - 3(-2) = 2 + 6 = 8$	$(-2, 8)$
-1	$y = 2 - 3(-1) = 2 + 3 = 5$	$(-1, 5)$
0	$y = 2 - 3(0) = 2 - 0 = 2$	$(0, 2)$
1	$y = 2 - 3(1) = 2 - 3 = -1$	$(1, -1)$
2	$y = 2 - 3(2) = 2 - 6 = -4$	$(2, -4)$
3	$y = 2 - 3(3) = 2 - 9 = -7$	$(3, -7)$
4	$y = 2 - 3(4) = 2 - 12 = -10$	$(4, -10)$

Importante tomar en cuenta que, para graficar una relación lineal, solo es necesario conocer dos puntos.

$$y = ax + b$$



Luego se representan estos puntos en el plano y se unen por medio de una curva.



$$D_R = R$$

$$R_R = R$$

Ejemplo 1.27

Considere la relación R de variable real, tal que, $y = 2x^2 + 1$, graficar, además encontrar su dominio y rango.

Solución

Para resolver este tipo de desigualdad, se puede realizar una tabla de valores, así:

x	$y = 2x^2 + 1$	(x, y)
-2	$y = 2(-2)^2 + 1 = 8 + 1 = 9$	$(-2, 9)$
-1	$y = 2(-1)^2 + 1 = 2 + 1 = 3$	$(-1, 3)$
0	$y = 2(0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 2(1)^2 + 1 = 2 + 1 = 3$	$(1, 3)$
2	$y = 2(2)^2 + 1 = 8 + 1 = 9$	$(2, 9)$

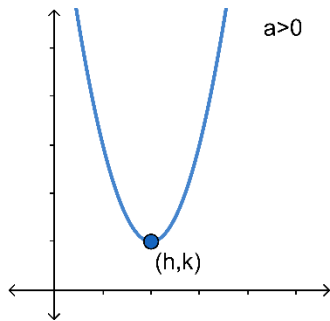
Importante recordar que, para graficar una relación cuadrática, solo es necesario conocer el vértice y saber hacia dónde se abre.

Parábola vertical

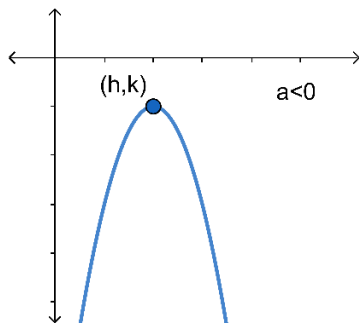
$$y = a(x - h)^2 + k$$

Vértice (h, k)

Si $a > 0$ se abre hacia arriba



Si $a < 0$ se abre hacia abajo



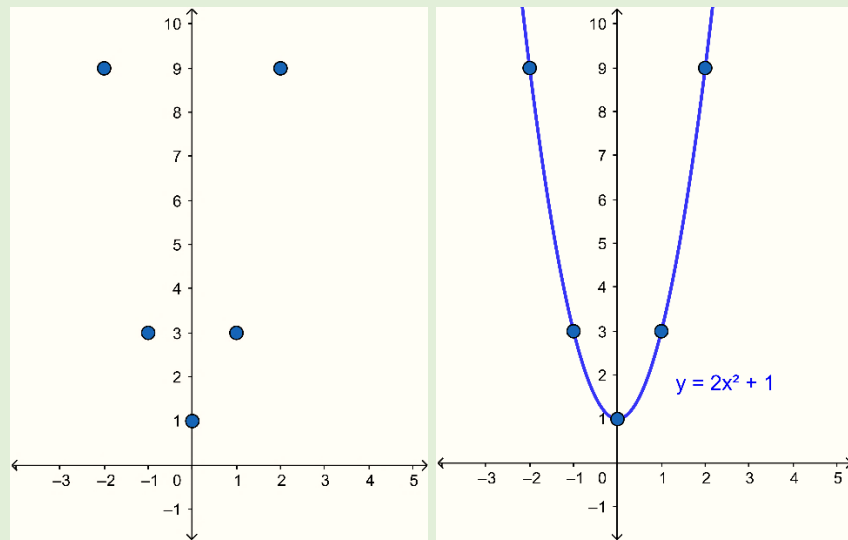
Para $y = ax^2 + k$

Vértice $(0, k)$

Si $a > 0$ se abre hacia arriba

Si $a < 0$ se abre hacia abajo

Luego se representan estos puntos en el plano y se unen por medio de una curva.



$$D_R = R$$

$$R_R = [1, +\infty)$$

Ahora, cuando se trabaja con una o más desigualdades, se grafica de la forma siguiente:

Primero se escribe la frontera de la desigualdad, esta se obtiene escribiendo el signo de igualdad sin importar el signo de la desigualdad, la cual divide el plano en dos partes.

Luego se grafica la frontera la cual se dibuja puntada si la desigualdad es estricta, es decir $<$ y $>$, de caso contrario se dibuja continua cuando aparecen \leq y \geq .

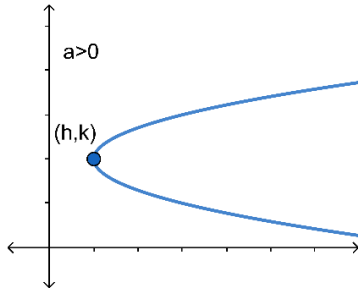
Para finalizar se analiza cuál región es la solución, para la cual se toma un punto en cualquiera de las dos regiones, se evalúa en la desigualdad original, si esta se cumple, la región a donde pertenece el punto de caso contrario será a la cual no pertenece.

Parábola horizontal

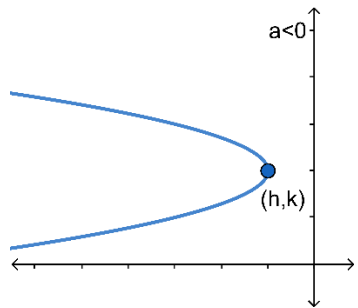
$$x = a(y - k)^2 + h$$

Vértice (h, k)

Si $a > 0$ se abre hacia la derecha.



Si $a < 0$ se abre hacia la izquierda.



Para $x = ay^2 + k$

Vértice $(0, k)$

Si $a > 0$ se abre hacia la derecha.

Si $a < 0$ se abre hacia la izquierda.

$$y > 2x^2 + 1$$

$$0 > 2(0)^2 + 1$$

$$0 > 1, \text{ falso}$$

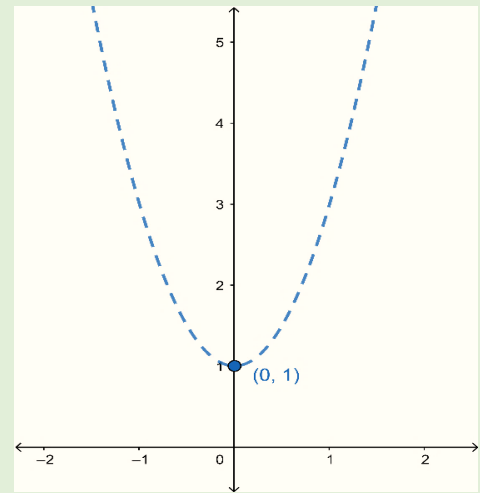
Ejemplo 1.28

Considere la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 2x^2 + 1\}$, graficar, además encontrar su dominio y rango.

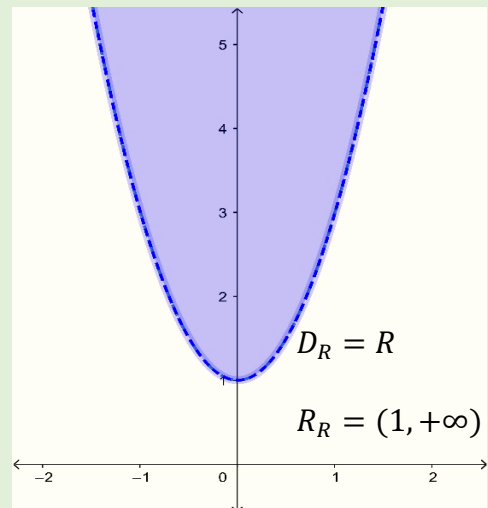
Solución

Primero se escribe la frontera, como $y > 2x^2 + 1$, la frontera será $y = 2x^2 + 1$.

Luego se grafica la frontera recordando que por ser una desigualdad estricta la frontera será punteada, como es cuadrática, necesitamos el vértice el cual resulta ser $(0, 1)$ y se abre hacia arriba, ya que el coeficiente de la x^2 es positivo.



Se toma un punto en cualquiera de las dos regiones, por ejemplo $(0, 0)$ que se encuentra en la parte inferior. Lo cual resulta ser falso, por tanto, la solución será la parte superior.



Ejemplo 1.29

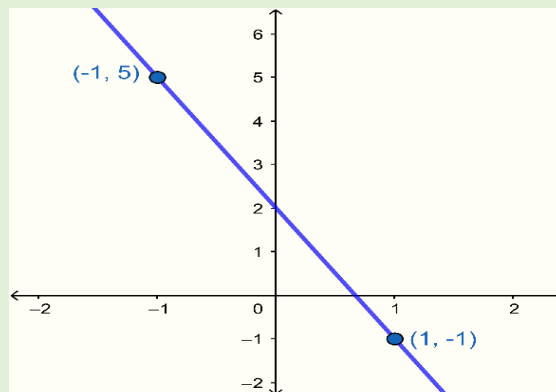
Considere la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 2 - 3x\}$, graficar, además encontrar su dominio y rango.

Solución

Primero se escribe la frontera, como $y \leq 2 - 3x$, la frontera será $y = 2 - 3x$. Luego se grafica la frontera, la cual será continua, ya que la desigualdad no es estricta.

Como es lineal solo se necesitan dos puntos así:

x	$y = 2 - 3x$	(x, y)
-1	$y = 2 - 3(-1) = 2 + 3 = 5$	$(-1, 5)$
1	$y = 2 - 3(1) = 2 - 3 = -1$	$(1, -1)$

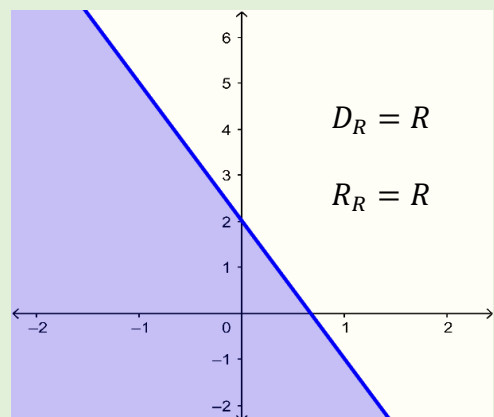


$$y \leq 2 - 3x$$

$$0 \leq 2 - 3(0)$$

$$0 \leq 2, \text{ verdadero}$$

Se toma un punto en cualquiera de las dos regiones, por ejemplo $(0, 0)$ que se encuentra en la parte inferior, lo cual resulta ser verdadera, por tanto, la solución será la parte inferior.



Ahora se abordará el caso donde la relación está compuesta por dos o más desigualdades, para el cual la región solución será la intersección de todas las regiones.

Ejemplo 1.30

Graficar e identificar el dominio y rango de la relación siguiente:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 2x^2 + 4; y > -4\}$$

Solución

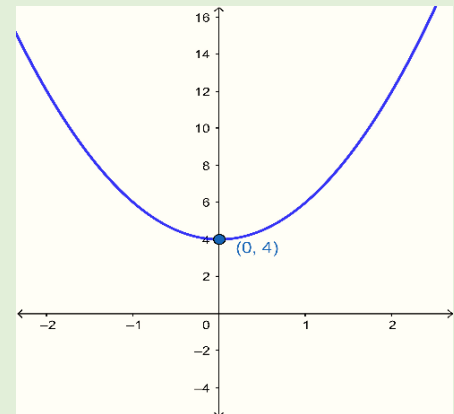
Primero tiene que trabajarse por separado ambas desigualdades así:

Se escribe la frontera de $y \geq 2x^2 + 4$ que resulta $y = 2x^2 + 4$

En los problemas con dos o más desigualdades se sombrearán las regiones que no son solución para mejor visualización.

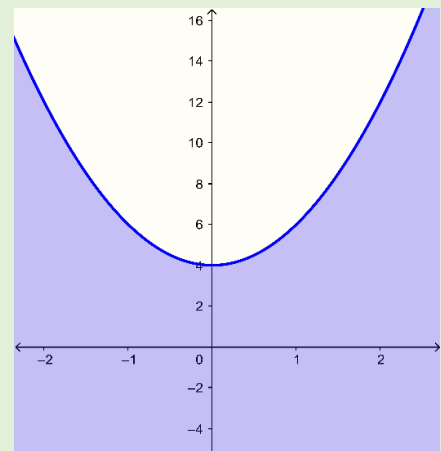
Luego se grafica la frontera, la cual será continua.

Como es cuadrática necesitamos el vértice el cual resulta ser $(0,4)$ y se abrirá hacia arriba, ya que el coeficiente de la x^2 es positivo.



Se toma un punto en cualquiera de las dos regiones, por ejemplo $(0,0)$ que se encuentra en la parte inferior.

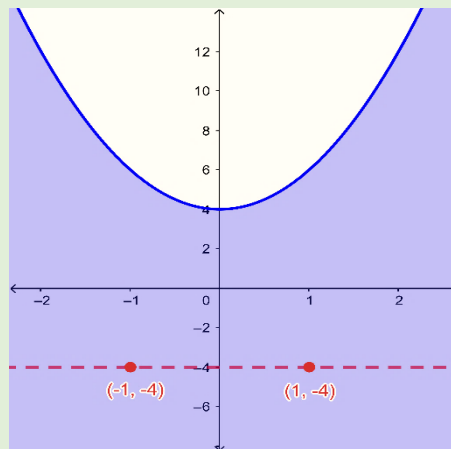
Lo cual resulta ser falso, por tanto, la solución será la parte superior. (se sombreará la región que no es solución).



$$y \geq 2x^2 + 4$$
$$0 \geq 2(0)^2 + 4$$
$$0 \geq 4, \text{ falso}$$

Ahora se repite el proceso para la segunda desigualdad

Se escribe la frontera de $y > -4$ que resulta $y = -4$.



Luego se grafica la frontera la cual será punteada.

Como es lineal solo se necesitan dos puntos.

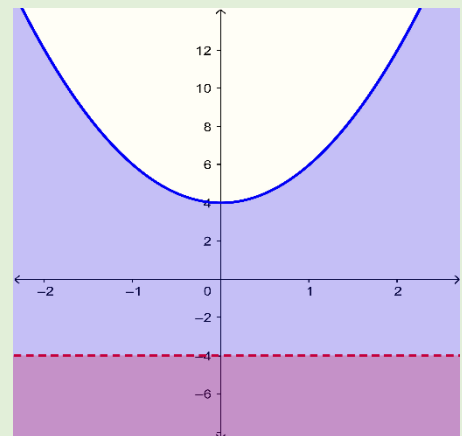
x	$y = -4$	(x, y)
-1	$y = -4$	$(-1, -4)$
1	$y = -4$	$(1, -4)$

$$y > -4$$

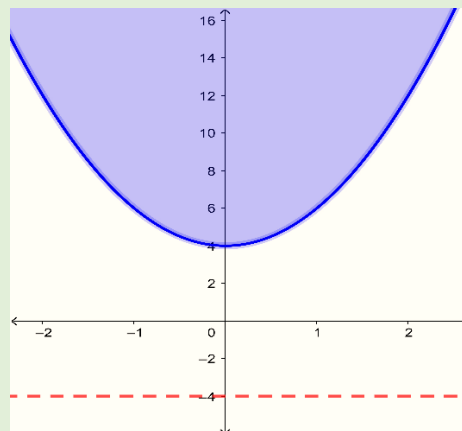
$$0 > -4, \text{ verdadero}$$

Se toma un punto en cualquiera de las dos regiones, por ejemplo $(0, 0)$ que se encuentra en la parte superior.

Lo cual resulta ser verdadera, por tanto, la solución será la parte superior. (se sombreadrá la región que no es solución).



La solución es la parte que queda sin marcar así:



$$D_R = R$$

$$R_R = [4, +\infty)$$

Ejemplo 1.31

Graficar e identificar el dominio y rango de la relación siguiente:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y < 2; -x - 2 \leq y; 2x - y \geq -3; -3x + 2 \geq y\}$$

Solución

Recordar que se tienen que trabajar por separado las desigualdades.

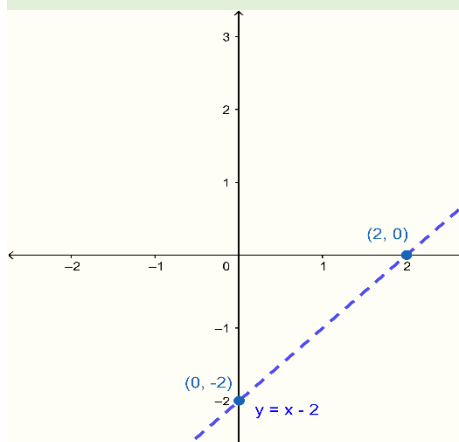
Para la **primera desigualdad**

Se escribe la frontera de $x - y < 2$, para lo cual es conveniente despejar la variable y , $y > x - 2$ que resulta $y = x - 2$.

$$x - y < 2$$

$$(-y < 2 - x)(-1)$$

$$y > x - 2$$



Se grafica la frontera la cual será punteada.

Como es lineal solo se necesitan dos puntos.

$$y = x - 2$$

x	y	(x, y)
0	-2	(0, -2)
2	0	(2, 0)

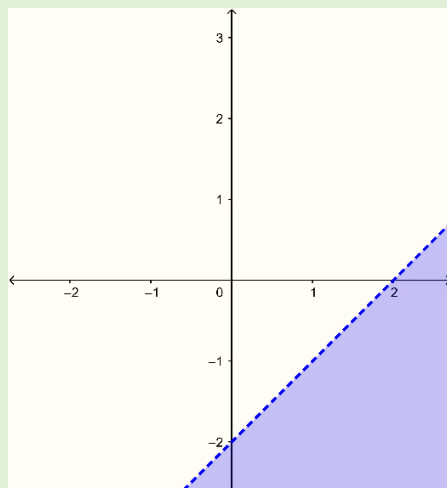
$$x - y < 2$$

$$0 - 0 < 2$$

$$0 < 2, \text{ verdadero}$$

Se toma un punto en cualquiera de las dos regiones, por ejemplo (0, 0) que se encuentra en la parte superior.

Lo cual resulta ser verdadera, por tanto. la solución será la parte superior. (se sombreadá la región que no es solución).



$$-x - 2 \leq y$$

$$(-y \leq x + 2)(-1)$$

$$y \geq -x - 2$$

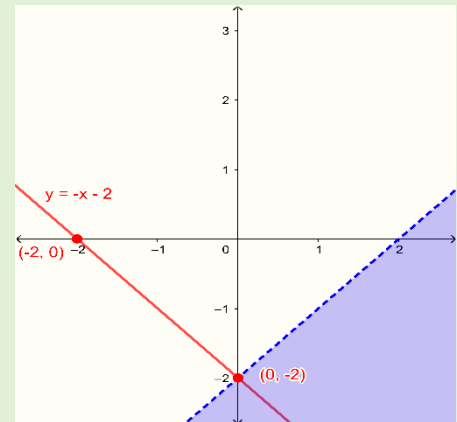
Segunda desigualdad

Se escribe la frontera de $-x - 2 \leq y$, que resulta $y = -x - 2$

Se grafica la frontera la cual será continua, como es lineal solo se necesitan dos puntos.

$$y = -x - 2$$

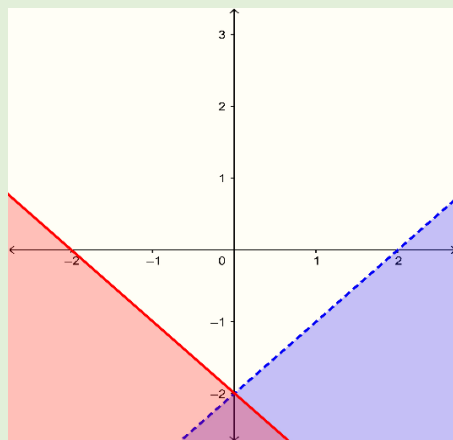
x	y	(x, y)
-2	0	(-2, 0)
0	-2	(0, -2)



$$-x - 2 \leq y$$

$$-0 - 2 \leq 0$$

$$-2 \leq 0, \text{ verdadero}$$



Se toma un punto en cualquiera de las dos regiones, por ejemplo (0, 0) que se encuentra en la parte superior. Lo cual resulta ser verdadera, por tanto, la solución será la parte superior. (se sombreadá la región que no es solución).

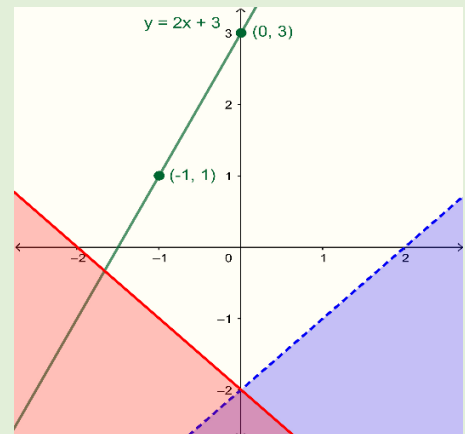
Tercera desigualdad

Se escribe la frontera de $2x - y \geq -3$, despejando la variable y , $y \leq 3 + 2x$ que resulta $y = 3 + 2x$.

Se grafica la frontera la cual será continua, como es lineal solo se necesitan dos puntos.

$$y = 3 + 2x$$

x	y	(x, y)
-1	1	(-1, 1)
0	3	(0, 3)

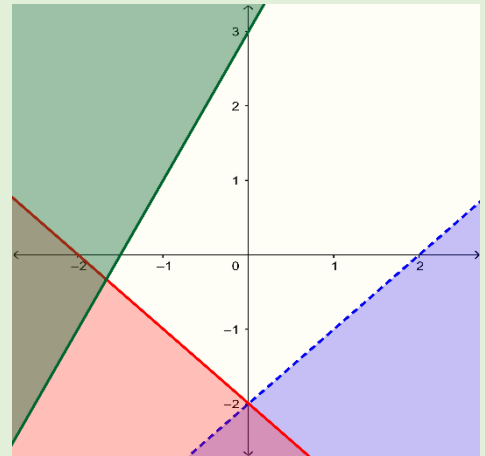


$$2x - y \geq -3$$

$$2(0) - 0 \geq -3$$

$$0 \geq -3, \text{ verdadero}$$

Se toma un punto en cualquiera de las dos regiones, por ejemplo (0,0) que se encuentra en la parte inferior. Lo cual resulta ser verdadera, por tanto, la solución será la parte inferior. (se sombreadá la región que no es solución).



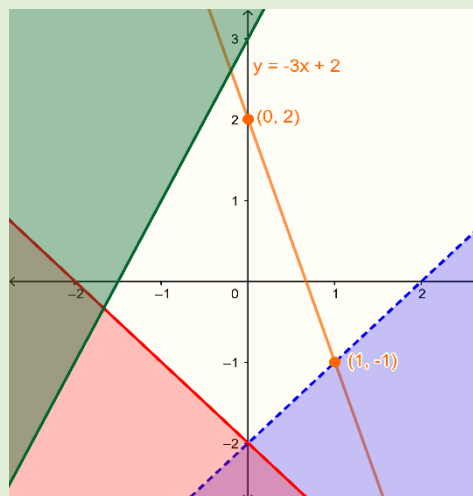
Cuarta desigualdad

Se escribe la frontera de $-3x + 2 \geq y$ que resulta $y = -3x + 2$

$$-3x + 2 \geq y$$

$$(-y \geq 3x - 2)(-1)$$

$$y \leq -3x + 2$$



Se grafica la frontera la cual será continua.

Como es lineal solo se necesitan dos puntos.

$$y = -3x + 2$$

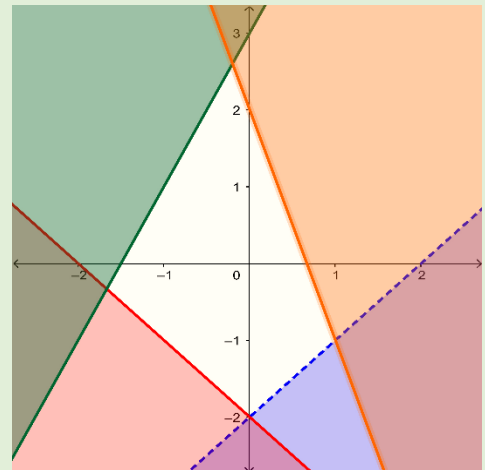
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
1	-1	(1, -1)

$$-3x + 2 \geq y$$

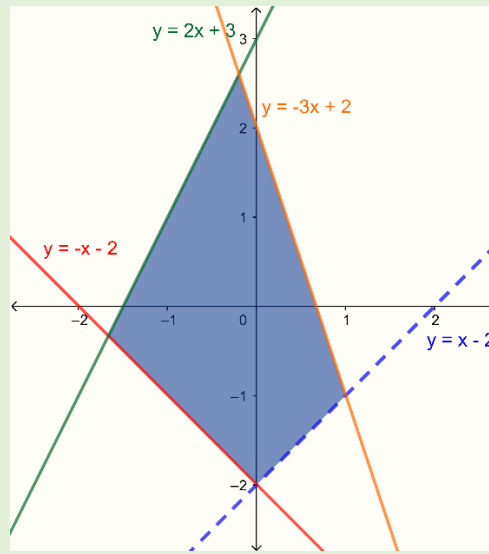
$$-3(0) + 2 \geq 0$$

$$2 \geq 0$$

Se toma un punto en cualquiera de las dos regiones, por ejemplo (0,0) que se encuentra en la parte inferior. Lo cual resulta ser verdadera, por tanto, la solución será la parte inferior. (se sombreadá la región que no es solución).



De donde la región solución es:



El dominio comienza donde se intercepta la recta roja y la verde, ($y = -x - 2 \wedge y = 2x + 3$) y finaliza donde se corta la azul con la naranja ($y = x - 2 \wedge y = -3x + 2$).

Como es el dominio, el valor que se busca es el de las x .

$y = -x - 2 \wedge y = 2x + 3$ Utilizando el método de igualación.

$$-x - 2 = 2x + 3$$

$$-2 - 3 = 2x + x$$

$$-5 = 3x$$

$$-\frac{5}{3} = x$$

$y = x - 2 \wedge y = -3x + 2$ Utilizando el método de igualación.

$$x - 2 = -3x + 2$$

$$x + 3x = 2 + 2$$

$$4x = 4$$

$$x = \frac{4}{4}$$

$$x = 1$$

$$D_R = \left[-\frac{5}{3}, 1 \right)$$

El rango comienza donde se intercepta la recta roja y la azul, ($y = -x - 2 \wedge y = x - 2$) y finaliza donde se corta la verde con la naranja ($y = 2x + 3 \wedge y = -3x + 2$).

Como es el rango, el valor que se busca es el de las y .

$y = -x - 2 \wedge y = x - 2$ Utilizando el método de igualación.

$$-x - 2 = x - 2$$

$$-2 + 2 = x + x$$

$$0 = 2x$$

$$\frac{0}{2} = x$$

$$0 = x$$

Sustituyendo $x = 0$ en $y = x - 2$

$$y = 0 - 2$$

$$y = -2$$

$y = 2x + 3 \wedge y = -3x + 2$

$$2x + 3 = -3x + 2$$

$$2x + 3x = 2 - 3$$

$$5x = -1$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

Sustituyendo $x = 0$ en $y = -3x + 2$

$$y = -3\left(-\frac{1}{5}\right) + 2$$

$$y = \frac{3}{5} + 2$$

$$y = \frac{13}{5}$$

$$R_R = \left(-2, \frac{13}{5}\right]$$

Recordar que para las sumas y restas de fracciones se pueden realizar utilizando el método de la carita feliz.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} + 2 &= \frac{3}{5} + \frac{2}{1} \\ &= \frac{3(1) + 2(5)}{5(1)} \\ &= \frac{3 + 10}{5} \\ &= \frac{13}{5} \end{aligned}$$



UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA
GUÍA DE EJERCICIOS SOBRE RELACIONES
MATEMÁTICA I



I. Represente en notación de conjunto y en forma gráfica los intervalos siguientes:

a) $A = [2,7]$

b) $B = (-2,3]$

c) $C = [3,7)$

d) $D = (-5, -1)$

e) $E = (-\infty, 3)$

f) $F = [-3, +\infty)$

II. Represente en notación de intervalo y en forma gráfica los intervalos siguientes:

a) $A = \{x \in R / 1 < x \leq 7\}$

b) $B = \{x \in R / -3 \leq x \leq 2\}$

c) $C = \{x \in R / 2 \leq x < 5\}$

d) $D = \{x \in R / x \leq 7\}$

e) $E = \{x \in R / 1 < x\}$

f) $F = \{x \in R / -1 < x < 4\}$

III. Para los intervalos $A = [2,7]$, $B = (-\infty, 3)$ y $C = [3,7)$ determinar:

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $B \cup C$

d) $A \cap B$

e) $A \cap C$

f) $B \cap C$

g) $A - B$

h) $B - A$

i) $B - C$

j) $C - B$

k) $A - C$

l) $C - A$

m) $A \cup B \cup C$

n) $A \cap B \cap C$

o) $A \cup (B \cap C)$

p) $A \cap (B \cup C)$

q) $A - (B \cup C)$

r) $B \cup (A \cap C)$

s) $B - (A \cap C)$

t) $B - (A \cup C)$

u) $(A - B) \cup (A - C)$

IV. Determine el conjunto solución de las siguientes desigualdades lineales, expresando su respuesta en notación de intervalo.

a) $5x + 2 \leq 12$

b) $3x - 2 > 2x - 5$

c) $2 \leq 2x - 3 < 7$

d) $\frac{5}{2} < \frac{2 - 3x}{6} \leq \frac{10}{3}$

e) $-6 < 4x + 1 < 4$

f) $-1 < \frac{5 - x}{3} \leq 7$

g) $(x - 2)^2 \geq x^2 - 1$

h) $x^2 + \frac{3x}{2} < x(x - 2) - 3$

i) $(x - 1)(x + 4) > x^2 + x + 3$

j) $9x + 2 \geq 2x - 1$

k) $x + 2 \geq x - 1$

l) $\frac{2}{3} > \frac{5 - 2x}{2} > 4$

m) $2x - 1 < 3x - 3 \leq 2x + 1$

n) $\frac{x + 1}{2} > x - 1 > \frac{x}{2} + 2$

o) $\frac{3x - 5}{4} - \frac{x - 6}{12} \leq 1$

p) $\frac{5 - x}{2} < \frac{x - 17}{4} - \frac{x}{3} \leq \frac{7x - 3}{12}$

V. Determine el conjunto solución de las siguientes desigualdades cuadráticas, expresando su respuesta en notación de intervalo.

a) $x^2 > 4$

b) $2x^2 + 5x \leq -3$

c) $3x^2 - 7x \geq 2$

d) $\frac{x^2 - 3}{7} > 4$

e) $(x - 1)(x + 2) > 2x^2 - 3x - 5$

f) $x^2 < \frac{5x + 3}{2}$

g) $(x - 1)^2 > 29 - 23x - 6x^2$

h) $\frac{x - x^2}{5} > -4$

i) $64x^2 - 12x^3 \geq x^4$

j) $x^4 + 144 > 25x^2$

VI. Determine el conjunto solución de las siguientes desigualdades racionales, expresando su respuesta en notación de intervalo.

a) $\frac{2}{x - 4} > \frac{4}{2x - 1}$

b) $\frac{x - 8}{x + 1} + \frac{1}{2} \geq 2$

c) $\frac{x^2 - 2x}{x + 2} - 2 \geq 5$

d) $-\frac{x + 1}{3} + \frac{2}{3} > \frac{x + 2}{4}$

e) $\frac{2}{x - 4} \geq 3$

f) $2 \leq \frac{-x}{x + 1}$

g) $\frac{2}{1 - x} < \frac{-x}{x + 1}$

h) $\frac{2}{3} > \frac{5 - 2x}{2 + x}$

i) $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{1}{2} > x - 3$

j) $\frac{x^2 - 1}{-x^2 + 2x - 1} > 0$

VII. Determine la solución de los siguientes problemas de aplicación utilizando desigualdades.

1. La empresa la casita feliz puede vender todas las unidades de un producto a \$75 la unidad. El costo en dólares de producir x unidades mensuales viene dado por la función $C(x) = 20000 + 25x - x^2$, la gerencia de dicha empresa está interesada en obtener una ganancia de por lo menos \$10000, cuantas unidades como mínimo deben de producirse y venderse para lograr dicho objetivo?
2. La fábrica xyz produce un artículo con un precio de venta de \$60, producir cada artículo tiene un costo de \$40. Si los costos fijos mensuales de la fábrica son ascienden a \$3000, cuantos artículos deben de producirse y venderse para que la fábrica tenga ganancias.
3. La fábrica xyz produce un artículo con un precio de venta de \$60, producir cada artículo tiene un costo de \$40. Si los costos fijos mensuales de la fábrica son ascienden a \$3000, cuantos artículos deben de producirse y venderse para que la fábrica tenga ganancias de por lo menos \$1000.
4. Un camión de carga pesa 875 kg. La diferencia entre el peso del camión vacío y la carga que lleve, no debe de ser inferior a 415 kg. Si se tienen que cargar 4 cajas iguales que pesen lo mismo, ¿Cuánto pueden pesar como máximo, cada una de ellas para poderlas transportar en el camión?
5. Una comercial paga a sus vendedores \$10 por artículo vendido más una cantidad fija de \$500. Otra comercial de la competencia paga \$15 por artículo y \$300 fijos. ¿Cuántos artículos debe vender el vendedor de la competencia para ganar más dinero que el primero?
6. El administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a

\$1.10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementa los costos generales de la empresa en \$800, al mes y el costo de material y de mano de obra será de \$0.60 por cada empaque. ¿Cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

7. La compañía Chavarría fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de \$20 y un costo unitario de \$15. Si los costos fijos son de \$600000, determine el número mínimo de unidades que deben ser vendidos para que la compañía tenga utilidades
8. Para producir una unidad de producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de \$250 y el de mano de obra de \$4. El gasto general, sin importar el volumen de ventas, es de \$5000. Si el precio para un mayorista es de \$740 por unidad, determine el número mínimo de unidades que debe ser vendido para que la compañía obtenga utilidades.
9. Para una empresa que fabrica camas, el costo entre mano de obra y material es de \$130 por unidad producida y sus costos fijos son \$20,000. Si el precio de cada cama es de \$190 ¿Cuántas unidades debe vender como mínimo para obtener utilidades?
10. Un fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce a \$45 cada artículo. En la fabricación de cada unidad gasta \$38 y tiene costos fijos adicionales de \$4900 mensuales en la operación de la planta. Encuentre:
 - a. El número mínimo de unidades que debe producir y vender para obtener utilidad
 - b. El número de unidades que debe producir y vender para obtener utilidades de al menos \$700

VIII. Encuentre los valores de las variables, tales que los pares ordenados sean iguales.

a) $(2, y + 2) = (x - 1, 2)$ **b)** $(2 + x, 3y + 2) = (2x + 1, 8)$

c) $(2 + x, y + 2) = (x + 1, 8)$ **d)** $(2 + x, y + 2) = (x + 2, 5)$

e) $(x + y, 3y + 2x) = (2, 5)$ **f)** $(4 + x, 3y + 2) = (2x + y, 5)$

IX. Dados $A = \{2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, encontrar el conjunto de pares ordenados que cumplen la relación R , además encontrar su dominio y rango.

a) $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y \geq x\}$

b) $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = x - 1\}$

c) $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y < x - 5\}$

X. Represente mediante una gráfica la región limitada por las desigualdades siguientes, además encontrar su dominio y rango.

a) $x - 3y \leq 5$

b) $2x^2 - y \geq 2$

c) $\begin{cases} y \geq 5 \\ x < 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y \leq 2x + 1 \\ x > -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y \geq 2x^2 - 3 \\ y < 3x + 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y - 3x \geq 3 \\ y + 2x > 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y \geq x^2 + 2 \\ x + 8 > y \\ 8 - x \geq y \end{cases}$

h) $\begin{cases} y < x^2 + 1 \\ 2x + 1 \leq y \\ 1 - 2x \leq y \end{cases}$

i) $\begin{cases} y \geq 1 - 2x \\ x + 4 < y \\ y \leq 6 \end{cases}$

j) $\begin{cases} y \geq 2x - 1 \\ x + 4 > y \\ 1 - 2x \leq y \\ y < 5 - 2x \end{cases}$

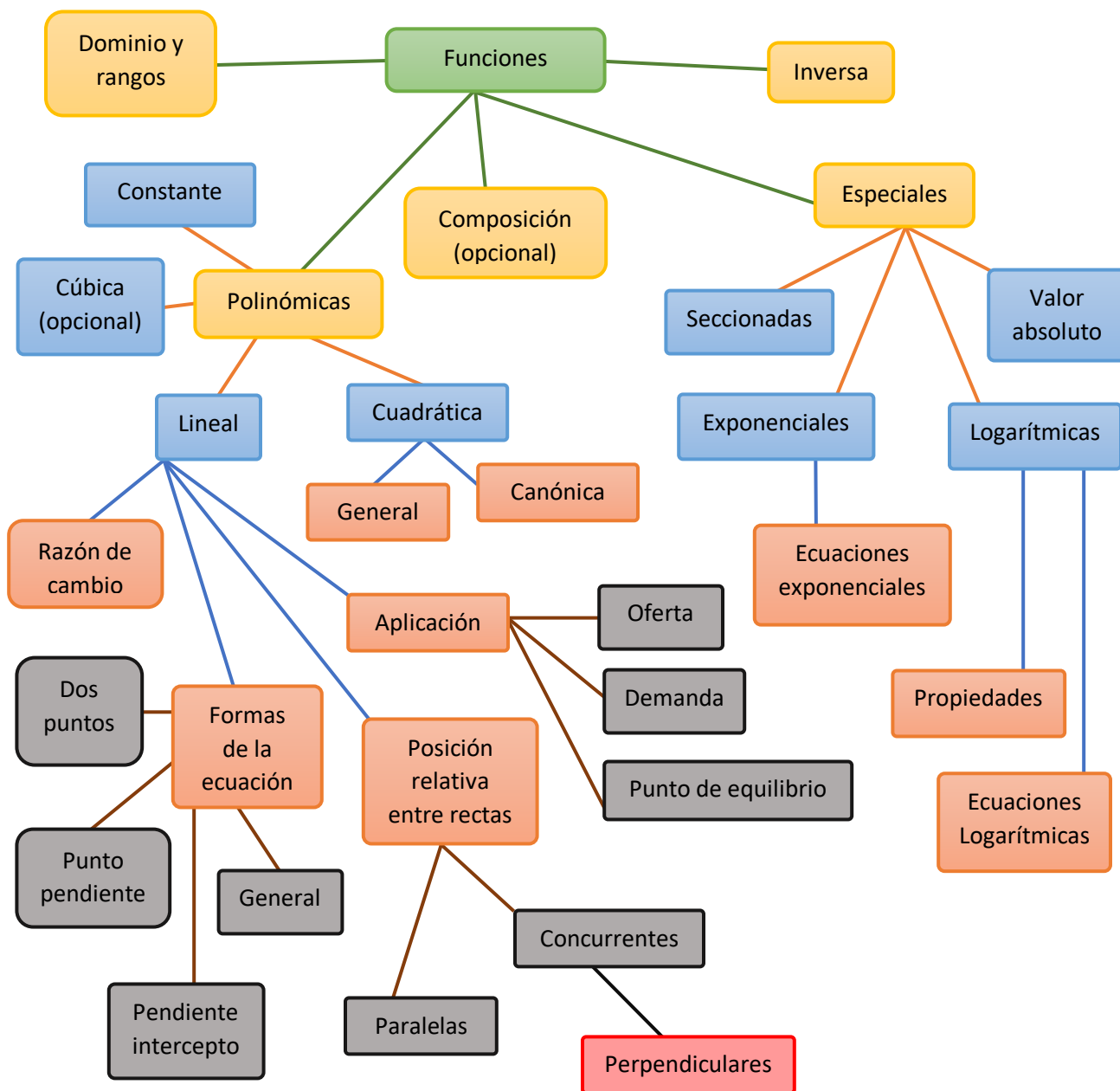
Capítulo II

Funciones

"La diferencia entre el poeta y el matemático es que el poeta intenta meter su cabeza en los cielos, mientras que el matemático intenta meter los cielos en su cabeza" G.K. Chesterton

Figura 3

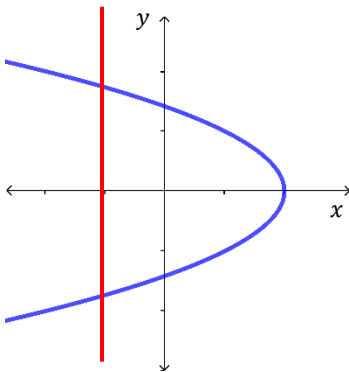
Contenido capítulo II funciones



Capítulo 2: Funciones

$\exists!$ Existe exactamente uno.

Observación si en una gráfica de una curva, no se puede trazar una recta vertical que la toque más de una vez a dicha curva, entonces esta curva representa a una función.



Esta gráfica no pertenece a una función.

$y = f(x)$ se lee y en función de x.

2.1 Funciones

2.1.1 Concepto de función. Dominio y Rango

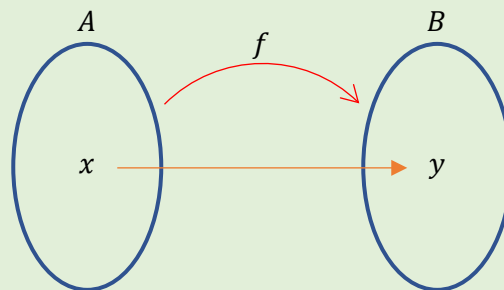
Como se ha mencionado en el capítulo anterior, una función no es más que una relación que cumple con la característica, que a cada elemento del dominio corresponde uno y solo uno de los valores del recorrido.

En el lenguaje matemático se dice que f es una función si y solo si, f es una relación y $\forall x \in D_f \exists! y \in R_f$.

En palabras más sencillas, una *función* f de A en B es un conjunto de pares ordenados (x, y) cuyas componentes cumplen una regla específica de comportamiento, en donde x es un elemento de A al cual corresponde un único valor y el cual es un elemento de B .

Se representa:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow xfy$$

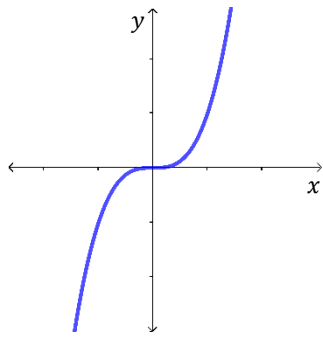


Se denota como $y = f(x)$

$$f = \{(x, y) / y = f(x)\}$$

Donde: x es la variable independiente.

y es la variable dependiente.



Esta gráfica pertenece a una función.

$y = f(x)$ es llamada ley de asignación, la letra f designa la función, se pueden utilizar otras letras, así: $y = g(x)$, $y = h(x)$, $y = p(x)$ entre otras.

En este texto solo se abordarán las funciones las cuales posean una sola variable independiente, además las variables de trabajo serán tomadas del conjunto de los números reales.

Dominio de una función:

Es el conjunto de **pre-imágenes**; es decir, los valores que puede tomar la variable independiente x .

Rango de una relación:

Es el conjunto de **imágenes**, es decir, los valores que puede tomar la variable dependiente y .

Como los valores de las variables serán tomados de R , se tienen que tomar en cuenta para el cálculo del dominio que:

- a) Raíces pares de números negativos no existen. (Es decir, siempre que la variable x sea parte de radicando, este tiene que ser mayor o igual que cero).
- b) La división entre el número cero no está permitida. (Es decir, siempre que la variable x sea parte de el denominador en un cociente, este tiene que ser diferente de cero).
- c) Logaritmo de números menores o iguales que cero no existe. (Es decir, siempre que la variable x sea parte del argumento de un logaritmo, este tiene que ser mayor que cero).

$$\sqrt{-4} = ?$$

$$\frac{2}{0} = ?$$

$$\ln(-2) = ?$$

Si no aparece ninguna de las restricciones mencionadas se tomará como dominio de la función a R .

Ejemplo 2.1

Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt[5]{7x^4 + 2x - 1}$.

Solución:

Como la raíz es impar, no hay un cociente donde x esté en el denominador y tampoco hay un logaritmo, el dominio de la función es: $D_f = R$.

Ejemplo 2.2

Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 9}$.

Solución

Como la raíz es par y la variable independiente x está en el radicando, este tiene que ser mayor o igual a cero, es decir.

$$x^2 - 9 \geq 0$$

La cual resulta ser una inecuación cuadrática la cual hay que resolver, donde la solución de dicha desigualdad sera el dominio de la función.

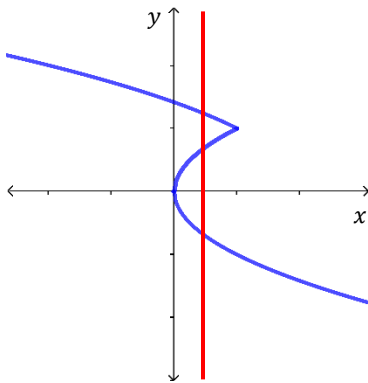
$$x^2 - 9 \geq 0$$

$$(x - 3)(x + 3) \geq 0$$

Con $x = 3$ y $x = -3$

	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$(x - 3)$		-	-	+
$(x + 3)$		-	+	+
$(x - 3)(x + 3)$		+	-	+

Es decir que el dominio de f es: $D_f = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.



Esta gráfica no pertenece a una función.

Ejemplo 2.3

Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt{2x - 1}$.

Solución

Como la raíz es par y la variable independiente x está en el radicando, este tiene que ser mayor o igual a cero, es decir.

$$2x - 1 \geq 0$$

La cual resulta una inecuación lineal, la cual hay que resolver, donde la solución de dicha desigualdad crea el dominio de la función.

$$2x - 1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

Es decir que el dominio de f es: $D_f = [1/2, +\infty)$.

Ejemplo 2.4

Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$.

Solución

Como hay un cociente y la variable independiente x aparece en el denominador este tiene que ser diferente de cero, es decir.

$$3x - 1 \neq 0$$

De donde lo que se tiene que hacer es, calcular el número que hace cero el denominador y excluirlo así.

$$3x - 1 = 0$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Es decir que el dominio de f es: $D_f = R - \{1/3\}$.

Ejemplo 2.5

Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x}{x^2-25}$.

Solución

Como hay un cociente y la variable independiente x aparece en el denominador este tiene que ser diferente de cero, es decir.

$$x^2 - 25 \neq 0$$

De donde lo que se tiene que hacer es, calcular los números que hacen cero el denominador y excluirlos así.

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

$$x = 5 \wedge x = -5$$

Es decir que el dominio de f es: $D_f = R - \{-5, 5\}$.

Ejemplo 2.6

Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-9}}$.

Solución

Como la raíz es par y la variable independiente x está en el radicando, este tiene que ser mayor o igual a cero, además se

encuentra en el denominador, por tanto, tiene que ser diferente de cero así.

$$x^2 - 9 > 0$$

La cual resulta una inecuación cuadrática, al igual que los ejemplos 2.2 y 2.3 de esta sección.

$$x^2 - 9 > 0$$

$$(x - 3)(x + 3) > 0$$

Entonces $x = 3$ y $x = -3$.

	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$(x - 3)$		-	-	+
$(x + 3)$		-	+	+
$(x - 3)(x + 3)$		+	-	+

Es decir que el dominio de f es: $D_f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

Ejemplo 2.7

Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+4}}$.

Solución

Como la raíz es par y la variable independiente x está en el radicando, este tiene que ser mayor o igual a cero, es decir.

$$\frac{2x - 1}{x + 4} \geq 0$$

La cual resulta una inecuación racional con $x = 1/2$ y $x = -4$.

	$-\infty$	-4	$1/2$	$+\infty$
$(2x - 1)$		-	-	+
$(x + 4)$		-	+	+
$(2x - 1)(x - 4)$		+	-	+

Es decir que el dominio de f es: $D_f = (-\infty, -4) \cup [1/2, +\infty)$.

Ejemplo 2.8

Calcular el dominio de $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$.

Solución

Como es un logaritmo y la variable independiente x está en el argumento, este tiene que ser mayor a cero, es decir.

$$\frac{2x-1}{x+1} > 0$$

La cual resulta una inecuación racional con $x = 1/2$ y $x = -1$.

	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$
$(2x-1)$		-	-	+
$(x+1)$		-	+	+
$(2x-1)(x+1)$		+	-	+

Note: A red double-headed arrow is drawn above the table, spanning from $-\infty$ to $+\infty$, indicating the domain where the product is positive.

Es decir que el dominio de f es: $D_f = (-\infty, -1) \cup (1/2, +\infty)$.

2.1.2 Función polinómica: Definición, dominio y rango

Un polinomio es una expresión algebraica que posee la forma siguiente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dónde $a_n \neq 0$ y $a_n \in R$ con $n \in N$.

Definición 2.1: función polinómica

Es una función cuya expresión es un polinomio así.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

El grado de una función polinómica lo define la mayor potencia n , el dominio de todas las funciones polinómicas es R , el rango depende según grado y de los coeficientes.

2.1.2.1 Grado cero (función constante)

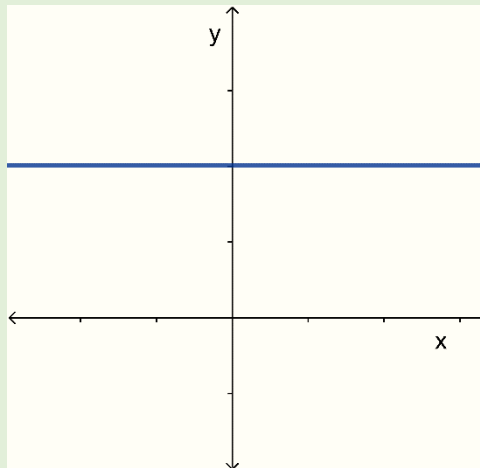
Son funciones polinómicas de grado cero o funciones constantes, cuando la función no depende de la variable independiente x .

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

De dónde.

$$f(x) = a_0 \text{ con } a_0 \in R.$$

Gráficamente $f(x) = c$, se representa.



Con dominio $D_f = R$ y rango $R_f = \{c\}$.

Ejemplo 2.9

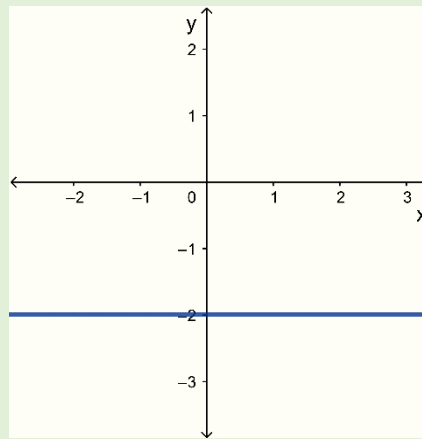
Graficar, calcular el dominio y rango de las funciones constantes siguientes:

a) $f(x) = -2$

b) $g(x) = 3$

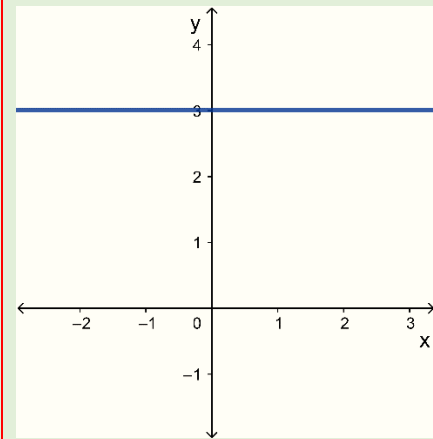
Solución

a) $f(x) = -2$



Con dominio $D_f = R$ y rango $R_f = \{-2\}$.

b) $g(x) = 3$



Con dominio $D_g = R$ y rango $R_g = \{3\}$.

2.1.2.2 Grado uno la línea recta (función lineal)

Son funciones polinómicas de grado 1 o funciones lineales, en las cuales la variable independiente x tiene como máxima potencia la unidad así.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

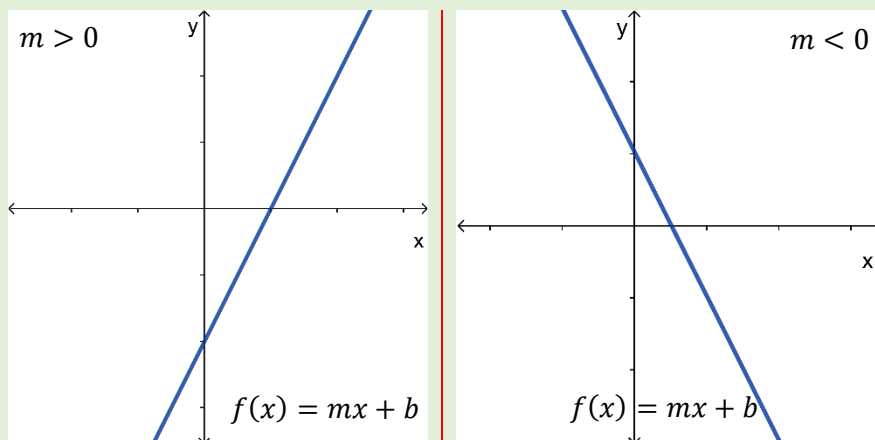
Recordar que, para graficar una recta, solo son necesarios dos puntos.

Donde

$$f(x) = a_1x + a_0 \text{ con } a_0, a_1 \in R$$

Normalmente, a_1 se le nombra m y a_0 es b .

Gráficamente $f(x) = mx + b$, se representa.



Con dominio $D_f = R$ y rango $R_f = R$.

Ejemplo 2.10

Graficar, calcular el dominio y rango de las funciones lineales siguientes.

a) $f(x) = -2x + 1$

b) $g(x) = 3x - 2$

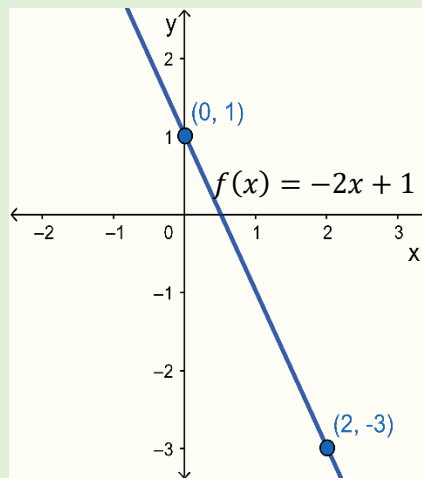
Solución

a) $f(x) = -2x + 1$

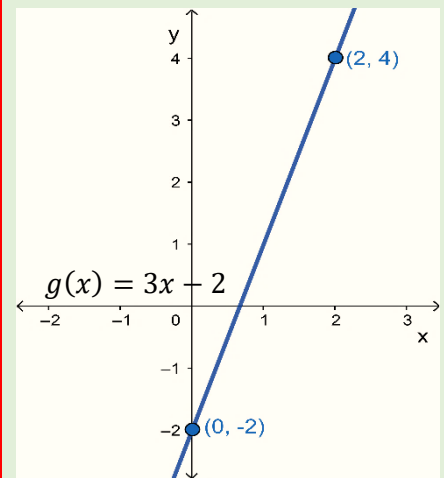
x	y
0	1
2	-3

b) $g(x) = 3x - 2$

x	y
0	-2
2	4



Con dominio $D_f = R$ y rango $R_f = R$.



Con dominio $D_g = R$ y rango $R_g = R$.

2.1.2.2.1 Pendiente de una recta: Razón de cambio

Supóngase que usted es vendedor de un modelo de celular, el cual vende a un precio de \$350, si vende un celular su ingreso será de \$350, si vende 2 su ingreso asciende a \$700, cuando la cantidad vendida aumenta de 1 a 2, el ingreso aumenta de \$350 a \$700.

Ahora bien, si se representa con la variable x la cantidad de unidades vendidas y con y la variable ingreso que se obtiene de las ventas de dichos celulares, tomando $x_1 = 1$ venta inicial y $x_2 = 2$ venta final, se tiene que la variación de las unidades vendidas es:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

De la misma forma para la variación del ingreso.

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$= 700 - 350$$

$$= 350$$

Es de tener claro que el ingreso solo varía, si la cantidad vendida varía, con esto se puede plantear como varía el ingreso con respecto a la variación de la cantidad vendida, así

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{350}{1} = 350$$

Supóngase ahora que la cantidad vendida varía de 1 a 4 el ingreso variara de \$350 a \$1400 así.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 1 = 3$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 1400 - 350 = 1050$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1050}{3} = 350$$

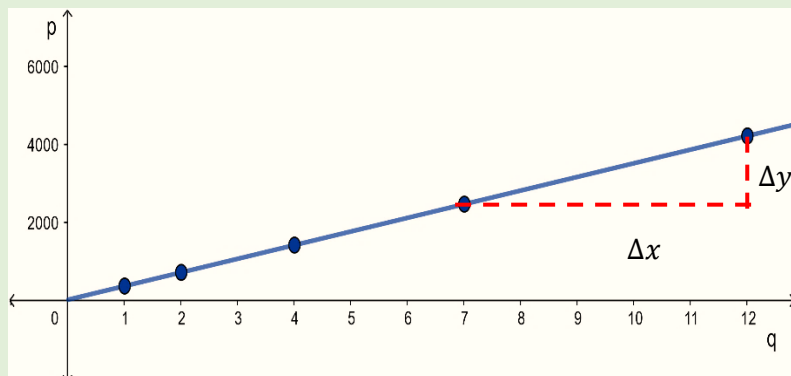
Si se considera que se varía de 7 a 12 las unidades vendidas, el ingreso variará de \$2450 a \$4200 así.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 12 - 7 = 5$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 4200 - 2450 = 1750$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1750}{5} = 350$$

Obsérvese que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se mantiene fijo, a este valor suele llamársele **tasa de cambio** y para este caso en particular sería, tasa de cambio del ingreso con respecto a la cantidad vendida.



Al observar la gráfica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es el grado de inclinación de la recta, en palabras más sencillas $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la pendiente de la recta, en la cual la cantidad vendida es la variable independiente y el ingreso sería la variable dependiente.

Con esto, se puede encontrar la pendiente m de la recta L , dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, m será igual a:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 2.11

Determinar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (3,2) y (1,1).

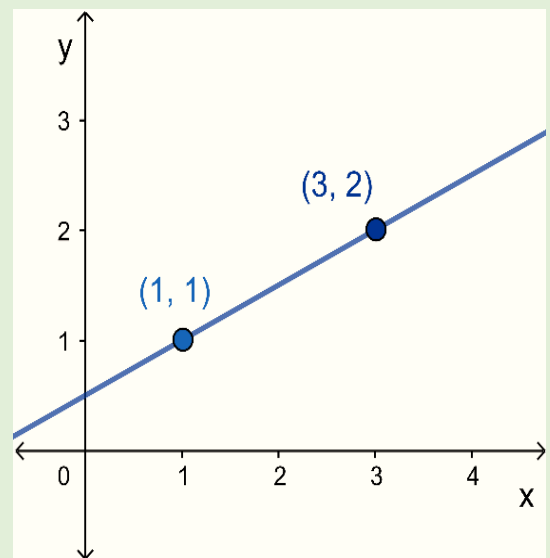
Solución

$$P_1 = (x_1, y_1) = (1, 1)$$

$$P_2 = (x_2, y_2) = (3, 2)$$

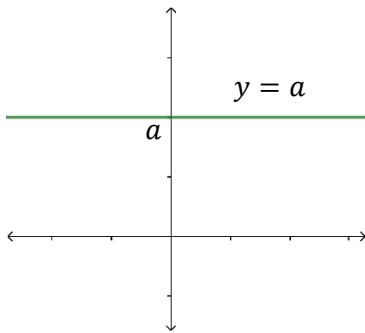
Entonces

$$m = \frac{2 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

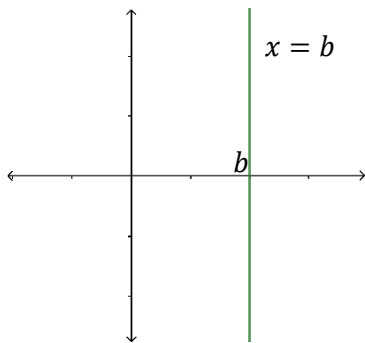


Es decir, la pendiente de la recta es $m = \frac{1}{2}$.

Recta horizontal (inclinación cero).
Pendiente $m = 0$.



Recta vertical (inclinación infinita).
Pendiente $m = \infty$.



2.1.2.2.2 Formas de la ecuación de la recta

La función lineal (la línea recta), puede escribirse de diversas formas, dependiendo de sus características las cuales son:

- **Forma dos puntos:** en esta forma, se conocen dos de los puntos donde pasa la recta.
- **Forma punto pendiente:** en esta forma, se conoce un punto y la pendiente de la recta.
- **Forma pendiente intercepto:** en esta forma, se conoce la pendiente y el intercepto de la recta con el eje y .
- **Forma general:** esta forma, no, es más, que representar cualquiera de las anteriores en forma ordenada como un polinomio.

2.1.2.2.2.1 Dos puntos

La forma de la recta conociendo dos de sus puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Ejemplo 2.12

Determinar la ecuación de la recta, que pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(1, 1)$.

Ecuación Simétrica o Canónica

La ecuación simétrica, también conocida como ecuación canónica de la línea recta, tiene la forma: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Dónde: **a** es la intersección de la recta con el eje x , **b** es la intersección con el eje y .

Recordar

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Solución

Tomando $P_1 = (x_1, y_1) = (1, 1)$ y $P_2 = (x_2, y_2) = (3, 2)$.

Es importante aclarar que no es indispensable esta selección para los puntos P_1 y P_2 .

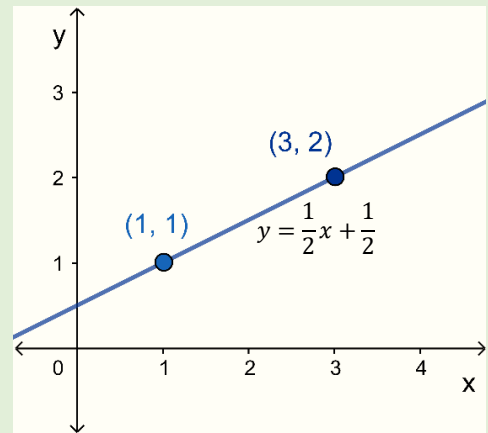
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{2 - 1}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



2.1.2.2.2 Punto pendiente

La forma de la recta dado un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ y la pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo 2.13

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y pendiente $m = \frac{1}{2}$.

Solución

Para este caso un punto y la pendiente siguientes:

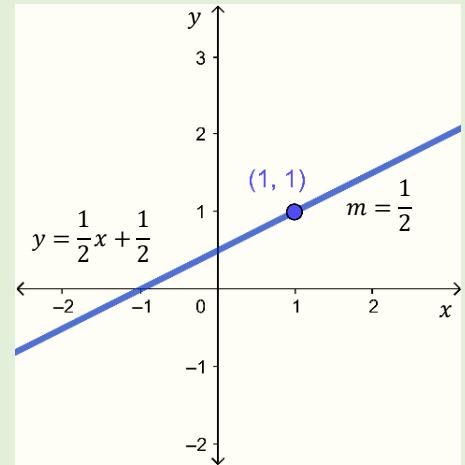
$$P_1 = (x_1, y_1) = (1, 1) \text{ y } m = \frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



2.1.2.2.3 Pendiente-intercepto

La forma de la recta dada la pendiente m y el intercepto b con el eje y es:

$$y = mx + b$$

Intercepto con el eje y es el punto donde la recta corta al eje y , es decir donde la coordenada en x es cero.

$(0, b)$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b$$

Ejemplo 2.14

Determinar la ecuación de la recta de pendiente $m = \frac{1}{2}$, y intercepto con el eje y igual a $\frac{1}{2}$.

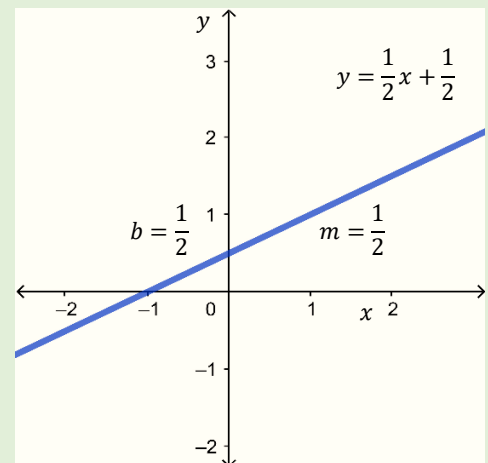
Solución

Para este caso se tiene:

$$m = \frac{1}{2} \text{ y } b = \frac{1}{2}$$

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



2.1.2.2.4 General

La forma general de la recta es la que se representa como un polinomio así:

$$Ax + By + C = 0 \text{ con } A, B, C \in \mathbf{R}$$

Ejemplo 2.15

Para la ecuación de la recta del ejemplo 1.14 determinar la ecuación en la forma general.

Solución

La ecuación de la recta mencionada es: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Se tiene que escribir en la forma $Ax + By + C = 0$.

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Primero se multiplica la igualdad por 2, con el objetivo de quitar las fracciones, de forma más general se multiplica la igualdad por el mcm de los denominadores de las fracciones que aparezcan en la igualdad.

$$2y = 2\left(\frac{1}{2}x\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2y = x + 1$$

Se trasladan todos los elementos a un solo lado de la igualdad $-x + 2y - 1 = 0$.

Ejemplo 2.16

Determinar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos (3,2) y (1,5).

Solución

Para este caso, dada la información, primero se utiliza la ecuación dos puntos y luego se lleva a la forma general.

$$P_1 = (x_1, y_1) = (3, 2) \text{ y } P_2 = (x_2, y_2) = (1, 5)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{5 - 2}{1 - 3}(x - 3)$$

$$y - 2 = \frac{3}{-2}(x - 3)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} + 2$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$$

$$2y = -3x + 13$$

$$3x + 2y - 13 = 0$$

Multiplicando la igualdad por 2.

Trasladando todos los elementos a un miembro de la igualdad.

2.1.2.2.3 Posición relativa entre rectas: Paralelas, concurrentes y perpendiculares

Cuando se trabaja con rectas no se puede dejar de lado, las características entre ellas (dos o más rectas), las cuales se realizan por medio de sus pendientes.

Supóngase que se tienen dos rectas L_1 y L_2 , en ese caso, pueden suceder dos de las siguientes cosas:

- Se crucen en un punto (rectas concurrentes).
- No se crucen en un punto (rectas paralelas).

$$L_1 = m_1x + b_1$$

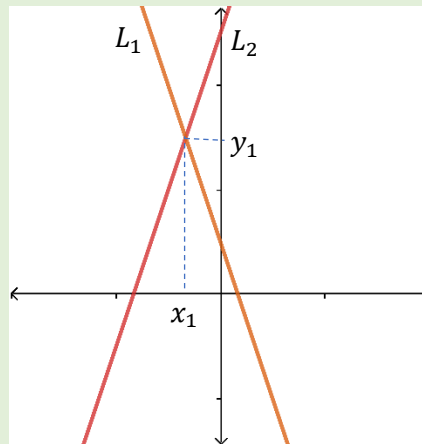
$$L_2 = m_2x + b_2$$

$$m_1 \times m_2 = -1 \text{ es equivalente a}$$
$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

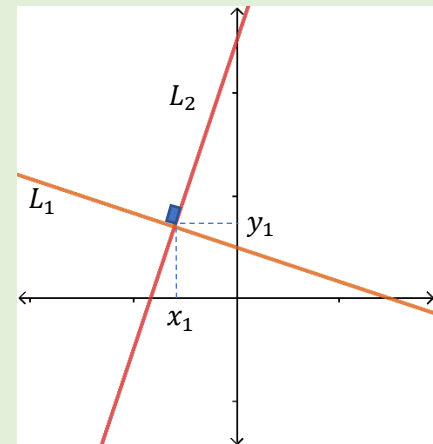
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Para el caso donde se cruzan en un punto, sucede que las pendientes de dichas rectas son diferentes, es decir $m_1 \neq m_2$. Un caso especial de estas rectas es cuando el ángulo formado entre ellas es recto, es decir 90° , las cuales son llamadas rectas perpendiculares ($L_1 \perp L_2$).

$L_1 \wedge L_2$ concurrentes



$L_1 \wedge L_2$ perpendiculares



Dos rectas L_1 y L_2 , son perpendiculares si $m_1 \times m_2 = -1$, es decir si el producto de sus pendientes es igual a -1 .

Ejemplo 2.17

Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -2)$ y es perpendicular a la recta $y = \frac{2}{3}x - 2$.

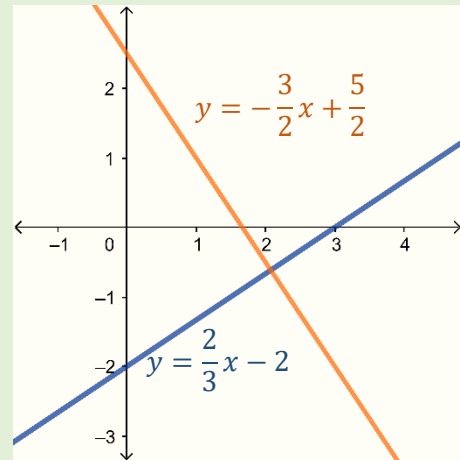
Solución

Para este caso se conoce un punto y además se sabe que la recta es perpendicular a $y = \frac{2}{3}x - 2$, de donde $m_1 = \frac{2}{3}$, entonces $m_2 = -\frac{1}{2/3} = -\frac{3}{2}$, ahora utilizando la ecuación punto pendiente se tiene:

$$y + 2 = -\frac{3}{2}(x - 3)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} - 2$$

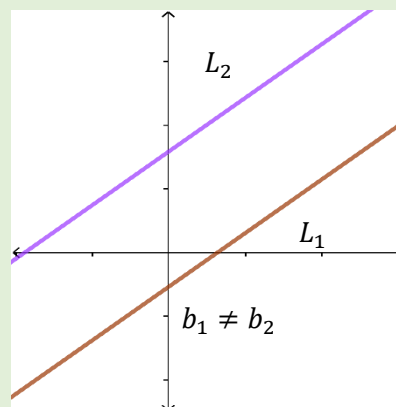
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$



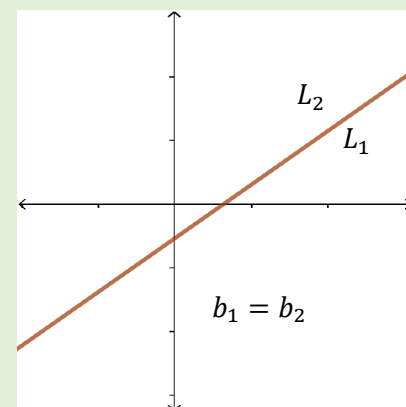
Para el caso en el que las rectas no se cortan en un punto, la característica principal es que sus pendientes son iguales, es decir $m_1 = m_2$, para este caso pueden suceder dos situaciones:

- La primera es cuando el intercepto con el eje y no coincide, es decir $b_1 \neq b_2$, entonces $L_1 \wedge L_2$, son las llamadas propiamente paralelas y no tienen ningún punto en común y la forma de representarse es $L_1 \parallel L_2$.
- la segunda es cuando el intercepto con el eje y coincide, es decir $b_1 = b_2$, entonces $L_1 \wedge L_2$, se denominan rectas coincidentes y tienen infinitos puntos en común y se expresan como $L_1 = L_2$.

$L_1 \wedge L_2$ paralelas



$L_1 \wedge L_2$ coincidentes



Dos rectas L_1 y L_2 , son paralelas si $m_1 = m_2$, es decir si sus pendientes son iguales.

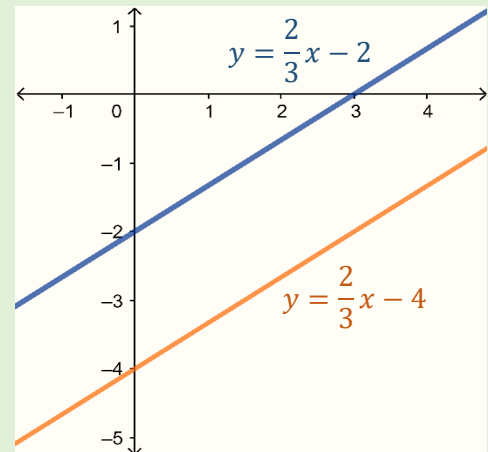
Ejemplo 2.18

Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -2)$ y es paralela a la recta $y = \frac{2}{3}x - 2$.

Solución

Para este caso se conoce un punto y además se sabe que la recta es paralela a $y = \frac{2}{3}x - 2$, de donde $m_1 = \frac{2}{3}$, entonces $m_2 = \frac{2}{3}$, ahora utilizando la ecuación punto pendiente se tiene:

$$\begin{aligned}y + 2 &= \frac{2}{3}(x - 3) \\y &= \frac{2}{3}x - 2 - 2 \\y &= \frac{2}{3}x - 4\end{aligned}$$



2.1.2.2.4 Aplicaciones de la línea recta (oferta, demanda y punto de equilibrio)

Las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico, ya que se utilizan para hacer modelos de situaciones de mercado.

Función de demanda:

Las empresas utilizan esta función para relacionar la cantidad de producto demandada por los consumidores, con relación al precio unitario al que se puede vender dicho producto. En general, si el precio aumenta, se produce una disminución en la cantidad demandada del artículo, ya que no todos los consumidores están dispuestos a pagar un precio mayor por adquirirlo, mientras que si el precio por unidad disminuye (es decir, el artículo se abarata) la demanda se incrementará.

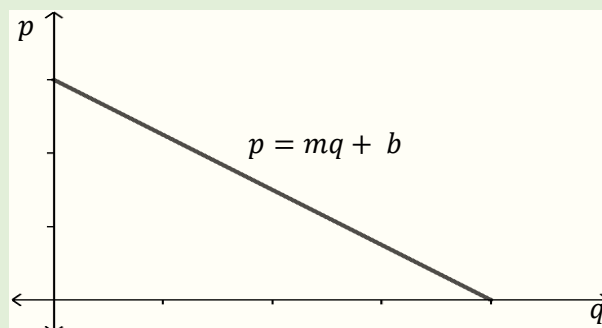
La función de demanda es decreciente, puesto que la cantidad demandada disminuye al aumentar el precio.

Se puede asegurar entonces que para cada precio de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto que los consumidores quieren adquirir (demandan) en determinado período.

Si el precio por unidad de un producto está dado por p y la cantidad demandada, correspondiente en unidades, está dada por q la ley que relaciona estas variables, se denomina función de demanda, y se representa $p = d(q)$.

La relación de demanda más simple es una del tipo lineal así:

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} (q - q_1)$$



En donde p es el precio por unidad del artículo además m y b son constantes. La gráfica de una ley de demanda se le llama curva de demanda.

Se puede observar que el precio (p) se ha expresado en términos de la cantidad demandada (q). Esto permite calcular el nivel de precio en que cierta cantidad q puede venderse. La pendiente m de la relación de demanda es negativa.

Otro aspecto importante a tomar en cuenta es que tanto el precio p por unidad y la cantidad q demandada no son números negativos, la gráfica de la demanda solo tiene sentido en el primer cuadrante (debe dibujarse en el primer cuadrante).

Ejemplo 2.19

En el municipio de Las Vueltas, Chalatenango la demanda de café “el granito de oro” es de 150 libras mensuales, cuando el precio de cada libra es de \$3.5 y aumenta a 300 libras cuando el precio es de \$2.00 por libra, asumiendo que existe una relación lineal, encuentre la ecuación de demanda de dicha relación.

Solución

$$P_1 = (q_1, p_1) = (150, 3.5) \text{ y } P_2 = (q_2, p_2) = (300, 2)$$

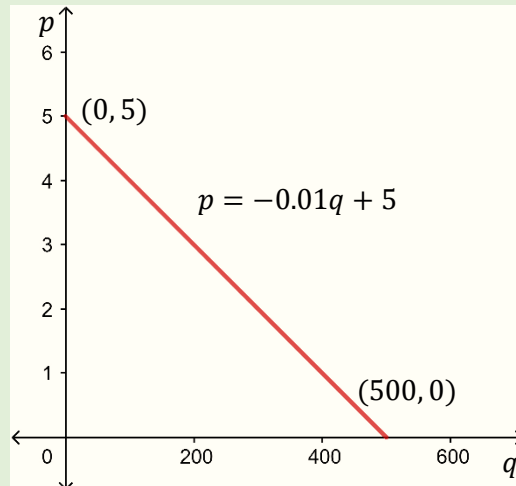
$$p - 3.5 = \frac{2 - 3.5}{300 - 150}(q - 150)$$

$$p - 3.5 = \frac{-1.5}{150}(q - 150)$$

$$p - 3.5 = -0.01(q - 150)$$

$$p = -0.01q + 1.5 + 3.5$$

$$p = -0.01q + 5$$



Al observar el gráfico se puede concluir que si el precio es \$5.00 la demanda será nula (nadie quiere adquirir café) y la demanda será de 500 libras de café, si el precio es cero (si es gratis).

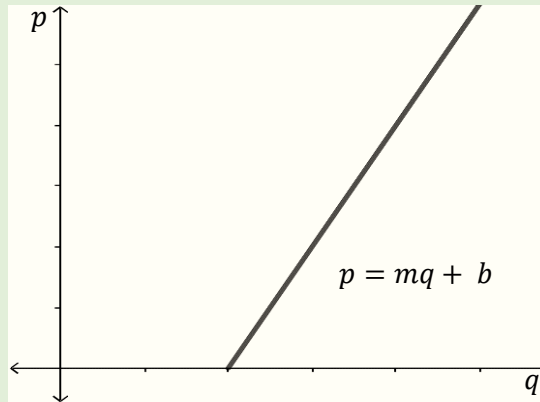
Función de oferta:

Las empresas que fabrican y venden determinados productos utilizan esta función para relacionar la cantidad de productos que está dispuesta a ofrecer en el mercado a un precio unitario establecido. Se puede asumir que, en respuesta a distintos precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer en el mercado en algún período específico, a mayor precio, mayor será la cantidad de productos que la empresa está dispuesta a ofrecer.

La función de oferta es creciente, ya que, al reducirse el precio, se reduce la cantidad ofrecida.

Esto permite asegurar qué. Si p representa el precio por unidad y q la cantidad ofrecida correspondiente, entonces a la ley que relaciona el precio unitario (p) y la cantidad ofertada en el mercado (q), se la denomina función de oferta y a su gráfica se la conoce como gráfica de oferta y se representa $p = o(q)$.

La relación de oferta más simple es una del tipo lineal así:



en donde p es el precio por unidad del artículo además m y b son constantes. La gráfica de una ley de oferta se le llama curva de oferta.

Ejemplo 2.20

Si el precio de un celular es de \$150.00 hay disponibilidad en el mercado de 100 celulares; cuando el precio aumenta a \$250.00 hay disponibles 200. Encuentre la ecuación de la oferta, si se asume que existe relación lineal entre el precio y la cantidad en oferta.

Solución

$$P_1 = (q_1, p_1) = (100, 150) \text{ y}$$

$$P_2 = (q_2, p_2) = (200, 250)$$

$$p - 150 = \frac{250 - 150}{200 - 100}(q - 100)$$

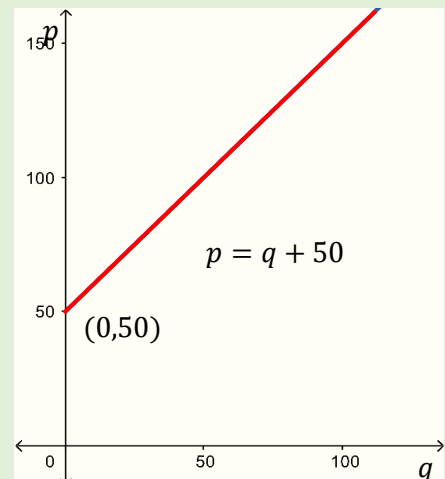
$$p - 150 = \frac{100}{100}(q - 100)$$

$$p - 150 = 1(q - 100)$$

$$p = q - 100 + 150$$

$$p = q + 50$$

Nota: el precio y la cantidad de equilibrio solo tienen sentido cuando no son negativas.

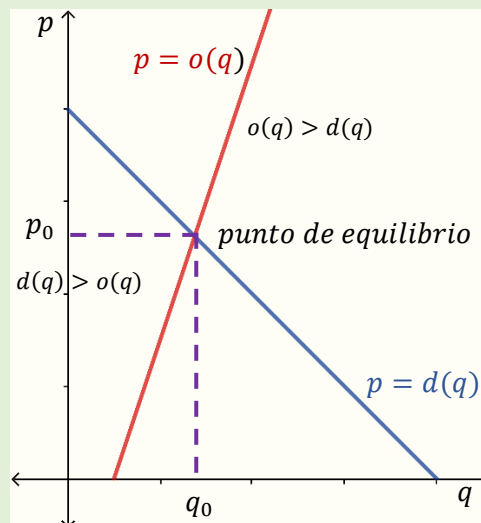


Al observar el gráfico se puede concluir que si el precio es \$50.00 la oferta será nula, es decir, ningún comerciante está dispuesto a vender ningún celular.

Punto de equilibrio:

En el mercado se da un equilibrio en el punto en que la demanda es igual a la oferta, es decir que el punto de equilibrio del mercado es aquel en el que la curva de oferta y la de demanda se interceptan.

En el equilibrio de mercado se le denomina precio de equilibrio a aquel en que la oferta es igual a la demanda, es el precio en el cual se estabiliza la relación entre fabricantes y consumidores.



En el gráfico se observa que, si un artículo es vendido a un precio mayor que el precio de equilibrio, entonces quedará en el mercado un excedente no vendido y si el artículo se vende a menor precio de equilibrio, la demanda excederá a la oferta.

En general, si el precio de cierto artículo es demasiado alto, los consumidores no lo adquirirán, mientras si es demasiado bajo,

los proveedores no lo venderán. En un mercado competitivo, cuando el precio por unidad depende solo de la cantidad demandada y la oferta, siempre existen una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo, de modo que la cantidad demandada por los consumidores iguale la cantidad que los proveedores están dispuestos a ofrecer. Para calcular, el precio de equilibrio del mercado p_0 y la cantidad de equilibrio q_0 se resuelven las ecuaciones de oferta y demanda simultáneamente para p y q .

Ejemplo 2.21

Cuando el precio de mercado de cierto artículo es \$20.00 se dispone de 75 artículos y la demanda es 120 artículos, si el precio se aumente en \$10.00 la oferta asiente a 125 artículos y la demanda desciende a 80. Encontrar el punto de equilibrio asumiendo que las funciones de oferta y demanda son lineales.

Solución

Demanda

$$P_1 = (q_1, p_1) = (120, 20) \text{ y}$$

$$P_2 = (q_2, p_2) = (80, 30)$$

$$p - 20 = \frac{30 - 20}{80 - 120}(q - 120)$$

$$p - 20 = \frac{10}{-40}(q - 120)$$

$$p = -\frac{1}{4}q + 30 + 20$$

$$p = -\frac{1}{4}q + 50$$

Oferta

$$P_1 = (q_1, p_1) = (75, 20) \text{ y}$$

$$P_2 = (q_2, p_2) = (125, 30)$$

$$p - 20 = \frac{30 - 20}{125 - 75}(q - 75)$$

$$p - 20 = \frac{10}{50}(q - 75)$$

$$p = \frac{1}{5}q - 15 + 20$$

$$p = \frac{1}{5}q + 5$$

El punto de equilibrio es donde la demanda es igual a la oferta
 $d(q) = o(q)$.

Cantidad de equilibrio.

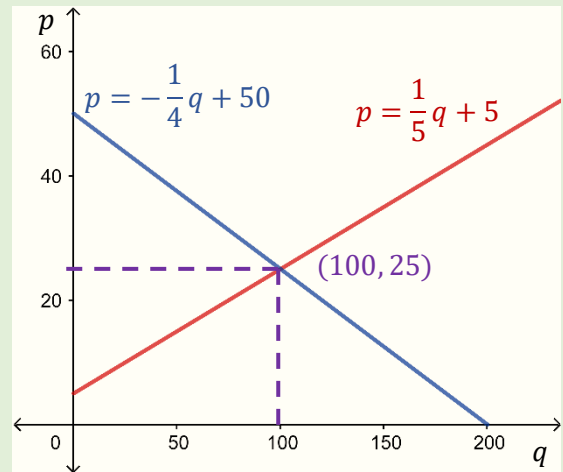
$$-\frac{1}{4}q + 50 = \frac{1}{5}q + 5$$

$$-\frac{1}{4}q - \frac{1}{5}q = 5 - 50$$

$$-\frac{9}{20}q = -45$$

$$q = \frac{-45}{-9/20}$$

$$q = 100$$



Precio de equilibrio.

$$p = -\frac{1}{4}(100) + 50$$

$$p = -25 + 50$$

$$p = 25$$

Al interpretar el gráfico se puede observar que cuando el precio es de \$5.00 nadie quiere vender y cuando el precio es de \$50.00 nadie quiere comprar.

Ejemplo 2.22

Un vendedor ofrece 275 pares de zapatos deportivos a \$100.00 el par, para lo cual solamente 35 personas están interesadas en dichos zapatos. Si el precio fuera de \$50.00, habría 160 personas interesadas en comprarlos. Pero el vendedor guarda sus zapatos y no está dispuesto a vender. Encuentre el punto de equilibrio.

Solución

Demanda

$$P_1 = (q_1, p_1) = (35, 100) \text{ y}$$

$$P_2 = (q_2, p_2) = (160, 50)$$

$$p - 100 = \frac{50 - 100}{160 - 35}(q - 35)$$

$$p - 100 = \frac{-50}{125}(q - 35)$$

$$p = -\frac{2}{5}q + 14 + 100$$

$$p = -\frac{2}{5}q + 114$$

Oferta

$$P_1 = (q_1, p_1) = (275, 100) \text{ y}$$

$$P_2 = (q_2, p_2) = (0, 50)$$

$$p - 100 = \frac{50 - 100}{0 - 275}(q - 275)$$

$$p - 100 = \frac{-50}{-275}(q - 275)$$

$$p = \frac{2}{11}q - 50 + 100$$

$$p = \frac{2}{11}q + 50$$

El punto de equilibrio es donde la demanda es igual a la oferta
 $d(q) = o(q)$.

Cantidad de equilibrio.

$$-\frac{2}{5}q + 114 = \frac{2}{11}q + 50$$

$$-\frac{2}{5}q - \frac{2}{11}q = 50 - 114$$

$$-\frac{32}{55}q = -64$$

$$q = \frac{-64}{-32/55}$$

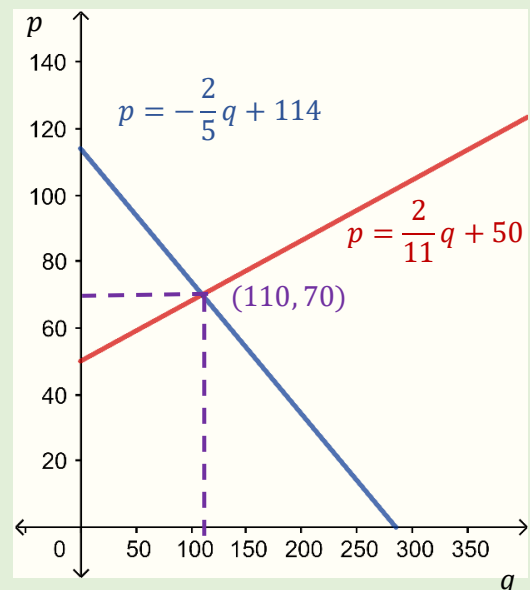
$$q = 110$$

Precio de equilibrio.

$$p = -\frac{2}{5}(110) + 114$$

$$p = -44 + 114$$

$$p = 70$$



Al interpretar el gráfico se observa que cuando el precio es de \$50.00 nadie quiere vender y cuando el precio es de \$114.00 nadie quiere comprar.

2.1.2.3 Grado dos (Función cuadrática)

Las funciones polinómicas de grado 2 o funciones cuadráticas, son aquellas en las cuales la variable independiente x tiene como mayor exponente al 2.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ con } a_0, a_1, a_2 \in R \text{ y } a_2 \neq 0$$

El dominio de las funciones cuadráticas es R , el rango depende de la forma de la función.

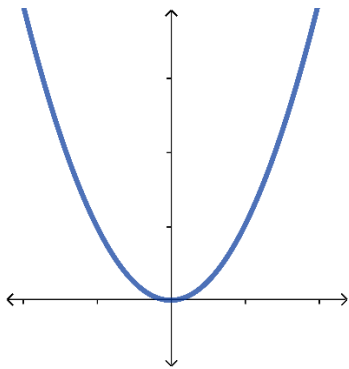
2.1.2.3.1 Ecuación de la parábola y representación Gráfica.

Las ecuaciones que más se utilizan para representar a la función cuadrática por lo general son dos.

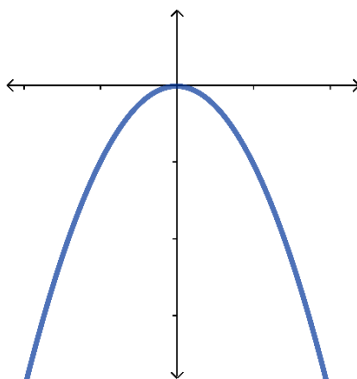
- Forma general $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$.
- Ecuación ordinaria o canónica $(x - h)^2 = -4p(y - k)$ con vértice (h, k) y se abre hacia abajo o hacia arriba.

Para la ecuación ordinaria se tomará una variante y se generalizará de la forma, $y - k = a(x - h)^2$ donde (h, k) siempre será el vértice, se abre hacia abajo si $a < 0$ y hacia arriba en el caso que $a > 0$.

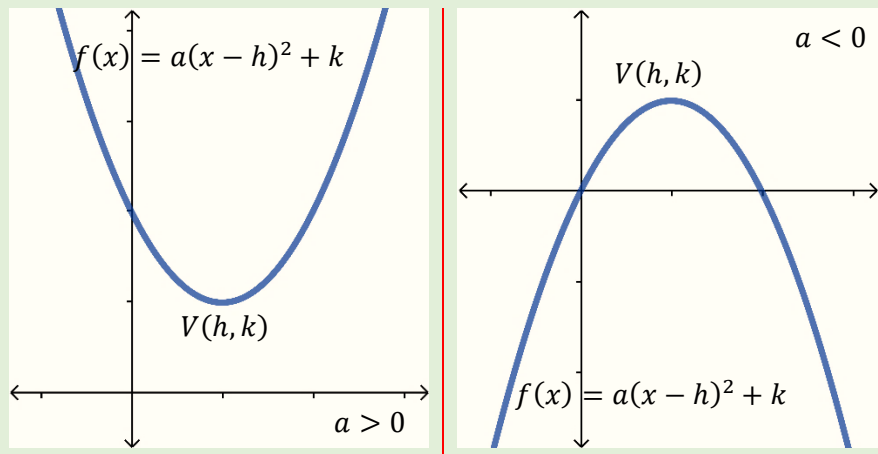
La forma más básica de la parábola es $f(x) = x^2$, con vértice en el origen.



$$f(x) = -x^2$$



Gráficamente $f(x) - k = a(x - h)^2$ o $f(x) = a(x - h)^2 + k$, se representa.



El rango de la función cuadrática depende del signo de a , si es positivo (el gráfico se abre hacia arriba) en ese caso el rango será desde la coordenada en y del vértice hacia más infinito, es decir $R_f = [k, +\infty)$, caso contrario, si es negativo (el gráfico se abre hacia abajo) en ese caso el rango será desde menos infinito hasta la coordenada en y del vértice es decir $R_f = (-\infty, k]$.

Algoritmo para transformar una ecuación en forma general a ordinaria:

1. Los elementos que contienen a la variable x se dejan en un solo lado de la igualdad, por lo general en el lado izquierdo y los que no la contienen al otro.

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$$

$$Ax^2 + Bx = -Cy - D$$

2. Se divide la igualdad entre el coeficiente de x^2 , es decir A .

$$x^2 + \frac{B}{A}x = -\frac{C}{A}y - \frac{D}{A}$$

$$\left(\frac{B/A}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2}$$

3. Se completa el cuadrado, sumando en ambos lados de la igualdad la mitad del coeficiente de la variable x elevado al cuadrado.

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} = -\frac{C}{A}y - \frac{D}{A} + \frac{B^2}{4A^2}$$

4. El lado izquierdo se escribe como un cuadrado perfecto y el lado derecho se extrae factor común.

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = -\frac{C}{A}\left(y + \frac{D}{C} - \frac{B^2}{4AC}\right)$$

5. Se despeja la variable y .

$$\frac{C}{A}\left(y + \frac{D}{C} - \frac{B^2}{4AC}\right) = -\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2$$

$$\left(y + \frac{D}{C} - \frac{B^2}{4AC}\right) = -\frac{A}{C}\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2$$

$$y = -\frac{A}{C}\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{B^2}{4AC} - \frac{D}{C}$$

$$y = -\frac{A}{C}\left(x - \left(-\frac{B}{2A}\right)\right)^2 + \frac{B^2}{4AC} - \frac{D}{C}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Es decir $a = -\frac{A}{C}$, $h = -\frac{B}{2A}$ y $k = \frac{B^2}{4AC} - \frac{D}{C}$.

Tener presente que $a = -\frac{A}{C}$, no significa que dicho resultado será negativo depende de los valores de A y C .

Ejemplo 2.23

Para la ecuación general de la parábola $2x^2 + 12x - 5y + 23 = 0$, encontrar la ecuación ordinaria, vértice, dominio, rango y graficar.

Solución

para este caso $A = 2$, $B = 12$, $C = -5$ y $D = 23$.

Entonces

$$a = -\frac{A}{C} = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$$

$$h = -\frac{B}{2A} = -\frac{12}{2(2)} = -\frac{12}{4} = -3$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{B^2}{4AC} - \frac{D}{C} = \frac{(12)^2}{4(2)(-5)} - \frac{23}{-5} \\ &= -\frac{18}{5} + \frac{23}{5} \\ &= \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

La ecuación ordinaria será:

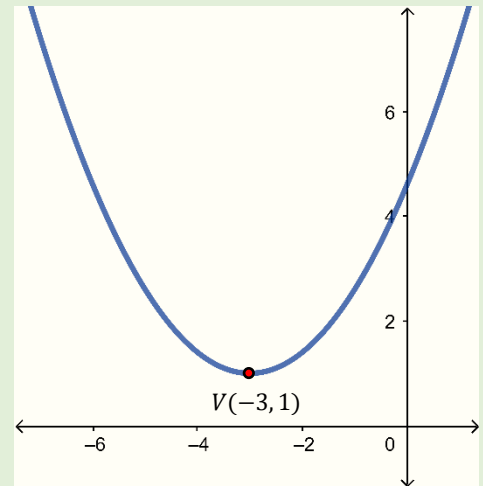
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

$$f(x) = \frac{2}{5}(x + 3)^2 + 1$$

Vértice $(h, k) = (-3, 1)$

$$D_f = R$$

$$R_f = [1, +\infty)$$



Ejemplo 2.24

Dada la ecuación general de una parábola $2x^2 - 7x + 4y = 0$, encontrar la ecuación ordinaria, vértice, dominio, rango y graficar.

Solución

Para este caso $A = 2$, $B = -7$, $C = 4$ y $D = 0$.

Entonces

$$a = -\frac{A}{C} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$h = -\frac{B}{2A} = -\frac{-7}{2(2)} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$k = \frac{B^2}{4AC} - \frac{D}{C} = \frac{(-7)^2}{4(2)(4)} - \frac{0}{4}$$
$$= \frac{49}{32} \approx 1.53$$

La ecuación ordinaria será:

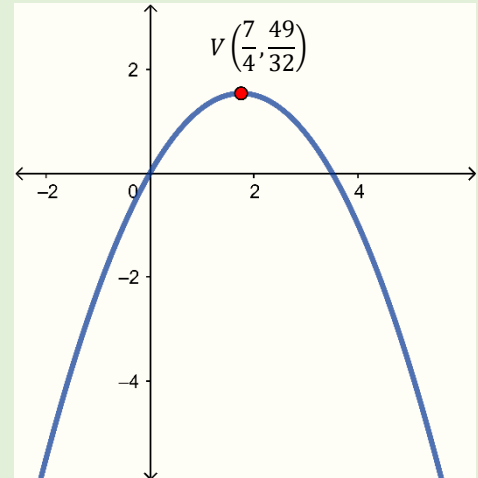
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{49}{32}$$

$$\text{Vértice } (h, k) = \left(\frac{7}{4}, \frac{49}{32}\right)$$

$$D_f = R$$

$$R_f = \left(-\infty, \frac{49}{32}\right]$$



Nota hacer uso del resultado es opcional, se puede desarrollar todo el algoritmo si se desea.

Ejemplo 2.25

Dada la ecuación general de la parábola $4x^2 - 2y + 5 = 0$, encontrar la ecuación ordinaria, vértice, dominio, rango y graficar.

Solución

para este caso $A = 4$, $B = 0$, $C = -2$ y $D = 5$.

Entonces

$$a = -\frac{A}{C} = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$h = -\frac{B}{2A} = -\frac{0}{2(4)} = 0$$

$$k = \frac{B^2}{4AC} - \frac{D}{C} = \frac{(0)^2}{4(4)(-2)} - \frac{5}{-2}$$

$$= 0 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

La ecuación ordinaria será:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

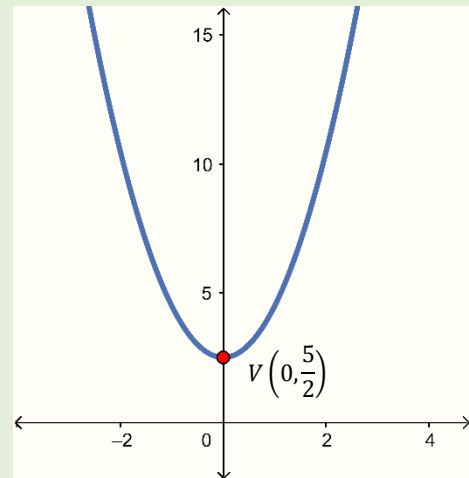
$$f(x) = 2(x - 0)^2 + \frac{5}{2}$$

$$f(x) = 2x^2 + \frac{5}{2}$$

$$\text{Vértice } (h, k) = \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

$$D_f = R$$

$$R_f = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$$



Grado tres (Función cúbica)

Las funciones polinómicas de grado 3 o funciones cúbicas, son aquellas en las cuales la variable independiente x tiene como mayor exponente al tres.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ con } a_0, a_1, a_2, a_3 \in R \text{ y } a_3 \neq 0$$

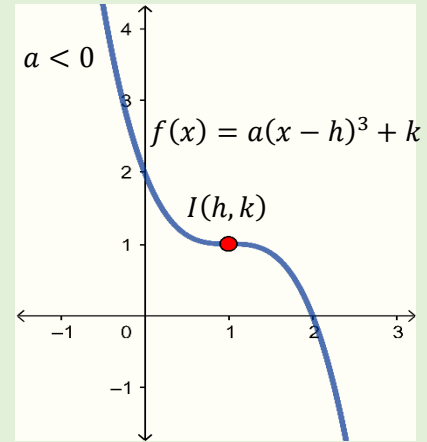
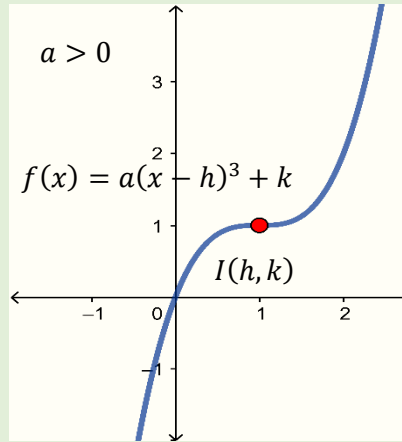
El dominio y rango de las funciones cúbicas es R .

La forma más simple de la función cúbica es:

$$f(x) = a(x - h)^3 + k$$

Donde el punto (h, k) es llamado punto de inflexión, además si $a > 0$ la función es creciente y si $a < 0$ la función es decreciente.

Así:



Ejemplo 2.26

Dadas las funciones cúbicas $f(x) = 2x^3 + 1$ y $g(x) = -x^3 - 3$ graficar indicando dominio y rango.

Para la función $f(x)$ del ejemplo 2.26 el punto de inflexión es $(h, k) = (0, 1)$, además:

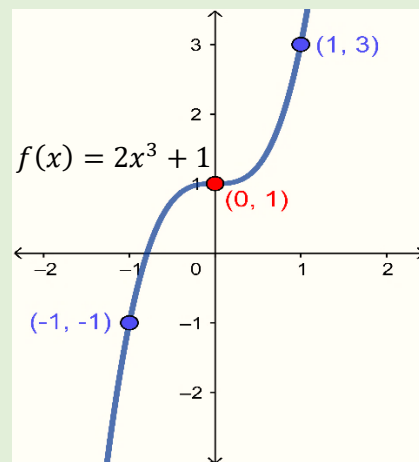
x	y
-1	-1
1	3

Para la función $g(x)$ del ejemplo 2.26 el punto de inflexión es $(h, k) = (0, -3)$, además:

x	y
-1	-2
1	-4

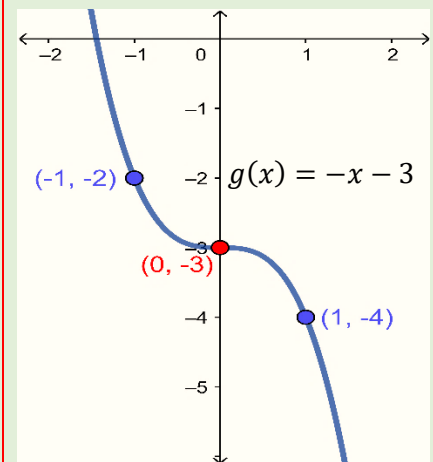
Solución

a) $f(x) = 2x^3 + 1$



Con dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango $R_f = \mathbb{R}$.

b) $g(x) = -x^3 - 3$



Con dominio $D_g = \mathbb{R}$ y rango $R_g = \mathbb{R}$.

Composición Funciones

La composición de funciones es útil, por ejemplo, cuando se necesita saber cómo un ingreso depende de una demanda, a sabiendas de que el ingreso es igual al precio por el número de artículos vendidos, es decir, en palabras sencillas se sustituirá la función precio en la función de ingreso.

La composición es una operación entre funciones que se establece de la siguiente manera, dadas dos funciones g y f , se define como la composición de la función g con la función f , a la función denotada $g \circ f$ (se lee g composición f) y se representa:

La composición de funciones es **asociativa**.

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

La composición de funciones **no es conmutativa**.

$$f \circ g \neq g \circ f$$

El **elemento neutro** en las funciones compuestas es la función identidad ($I(x) = x$).

$$f \circ I = I \circ f = f$$

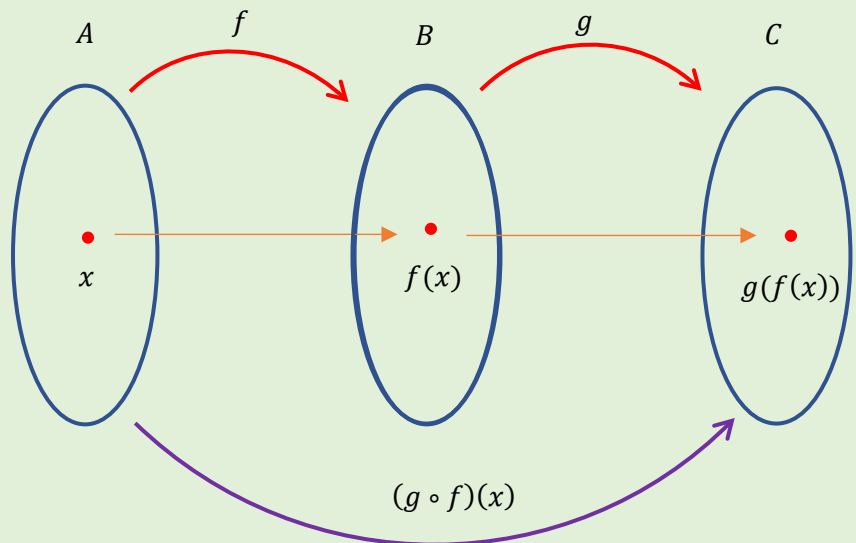
La **función inversa** de la composición de funciones f y g es:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

La composición de una función con su inversa es la identidad.

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B & g: B &\rightarrow C \\ fx &\rightarrow xfy & y &\rightarrow ygz \end{aligned}$$



En el esquema se puede apreciar que para que la composición pueda realizarse $R_f \cap D_g \neq \emptyset$.

$$D_{g \circ f} = \{x / x \in D_f; f(x) \in D_g\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x / x \in D_g; g(x) \in D_f\}$$

Ejemplo 2.27

Si $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 + 1$, obtener la función $f \circ g$ y $g \circ f$, graficar, identificando dominio y rango.

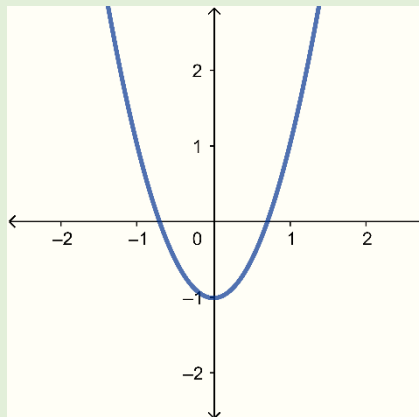
Solución

$$D_f: \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f \circ g &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 + 1) \\ &= 2(x^2 + 1) - 3 \\ &= 2x^2 + 2 - 3 \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \\ x \in \mathbb{R} \quad g(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$D_{f \circ g}: \mathbb{R}$$



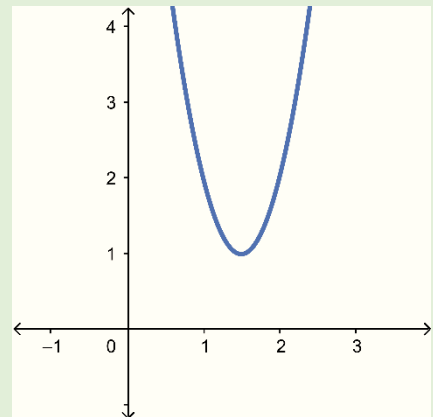
$$R_{f \circ g}: [-1, +\infty)$$

$$D_g: \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g \circ f &= g(f(x)) \\ &= g(2x - 3) \\ &= (2x - 3)^2 + 1 \\ &= 4x^2 - 12x + 9 + 1 \\ &= 4x^2 - 12x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \\ x \in \mathbb{R} \quad f(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$D_{g \circ f}: \mathbb{R}$$



$$R_{g \circ f}: [1, +\infty)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x - 3)^2 + 1 \\ f(x) &= 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.28

Si $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, obtener la función $f \circ g$ y $g \circ f$, graficar, identificando dominio y rango.

Solución

$x \neq 0$

$$D_f: x \geq -1$$

$$D_g: \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f \circ g = f(g(x))$$

$$g \circ f = g(f(x))$$

$$= f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= g(\sqrt{x+1})$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+x}{x}}$$

$$D_{f \circ g}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f$$

$$D_{g \circ f}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \quad g(x) \geq -1$$

$$x \geq -1 \quad f(x)$$

$$\frac{1}{x} \geq -1$$

$$\neq 0$$

$$\sqrt{x+1} \neq 0$$

$$\frac{1}{x} + 1 \geq 0$$

$$x+1 \neq 0$$

$$\frac{1+x}{x} \geq 0$$

$$x \neq -1$$

$$x \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

$$D_{f \circ g}: (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

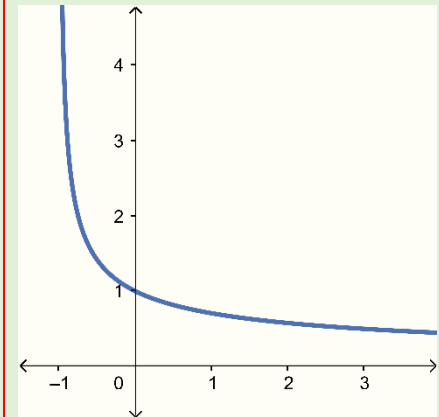
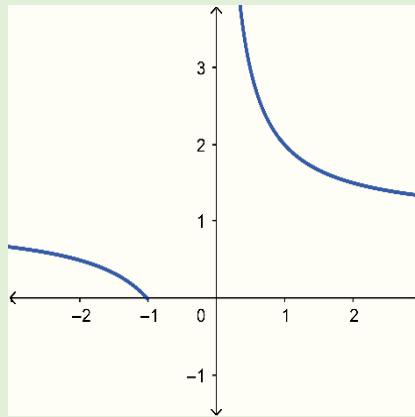
$$D_{g \circ f}: (-1, +\infty)$$

$$R_{f \circ g}: [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$R_{g \circ f}: (0, +\infty)$$

$$\frac{1+x}{x} \geq 0$$

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$(1+x)$	-	•	+	+
x	-	-	○	+
$\frac{1+x}{x}$	+	-	+	+



Ejemplo 2.29

Si $f(x) = -\sqrt{1+x}$ y $g(x) = x^2 - 1$, obtener la función $f \circ g$ y $g \circ f$, graficar, identificando dominio y rango.

Solución

$$\begin{aligned} 1+x &\geq 0 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

$$D_f: x \geq -1$$

$$D_g: \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f \circ g &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= -\sqrt{1 + (x^2 - 1)} \\ &= -\sqrt{1 + x^2 - 1} \\ &= -\sqrt{x^2} \end{aligned}$$

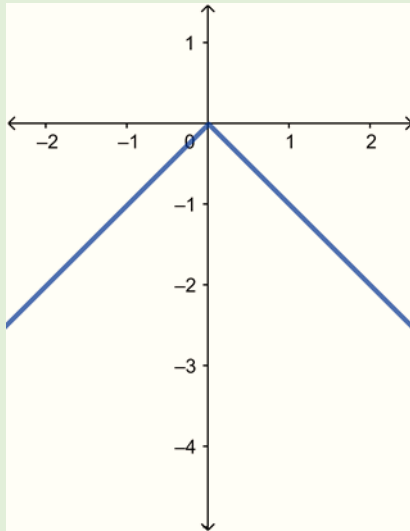
$$\begin{aligned} g \circ f &= g(f(x)) \\ &= g(-\sqrt{1+x}) \\ &= (-\sqrt{1+x})^2 - 1 \\ &= 1 + x - 1 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \\ x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq -1 \\ x^2 - 1 \geq -1 \\ x^2 \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

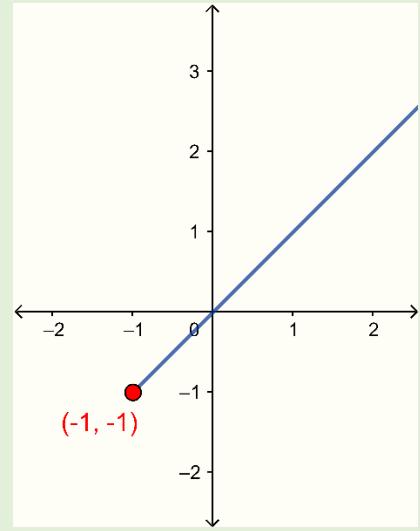
$$\begin{aligned} D_{g \circ f}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \\ x \geq -1 \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$D_{f \circ g}: \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f}: [-1, +\infty)$$



$$R_{f \circ g}: (-\infty, 0]$$



$$R_{g \circ f}: (-1, +\infty)$$

Ejemplo 2.30

Si $f(x) = \sqrt{-x}$ y $g(x) = 1 - x^2$, obtener la función $f \circ g$ y $g \circ f$, graficar, identificando dominio y rango.

Solución

$$1 - x^2 \leq 0$$

$$(1 - x)(1 + x) \leq 0$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(1-x)$	+	+	•	-
$(1+x)$	-	•	+	+
$(1-x)(1+x)$	-	+	-	-

$$D_f: 0 \geq x$$

$$D_g: \mathbb{R}$$

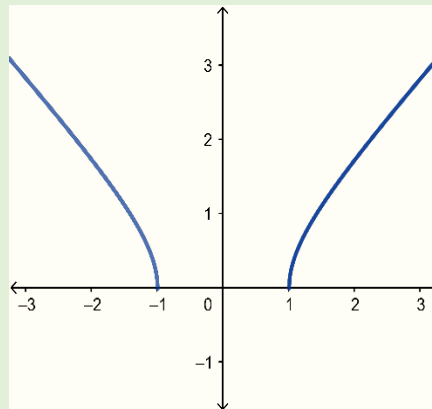
$$\begin{aligned}
 f \circ g &= f(g(x)) \\
 &= f(1 - x^2) \\
 &= \sqrt{-(1 - x^2)} \\
 &= \sqrt{x^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g \circ f &= g(f(x)) \\
 &= g(\sqrt{-x}) \\
 &= 1 - (\sqrt{-x})^2 \\
 &= 1 - (-x) \\
 &= 1 + x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{f \circ g}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \\
 x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq 0 \\
 x \in \mathbb{R} \quad 1 - x^2 \leq 0
 \end{aligned}$$

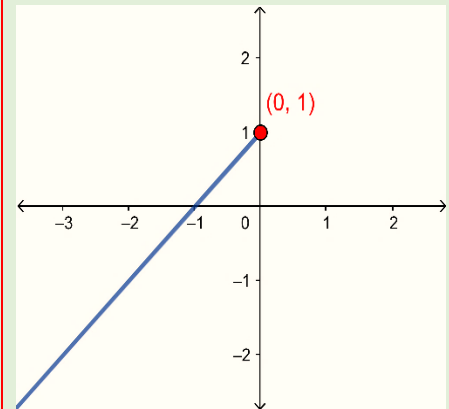
$$\begin{aligned}
 D_{g \circ f}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \\
 x \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$D_{f \circ g}: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



$$R_{f \circ g}: [0, +\infty)$$

$$D_{g \circ f}: (-\infty, 0]$$



$$R_{g \circ f}: (-\infty, 1]$$

Dominio de operaciones entre funciones, dadas f y g funciones con dominio D_f y D_g , para las operaciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g se tiene:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ entonces $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ entonces $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$ entonces $D_{fg} = D_f \cap D_g$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ entonces $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g(x) = 0\}$.

2.1.3 Inversa de una función

Cuando se trabaja con dos o más variables ligadas por una relación, como por ejemplo $y = f(x)$, es conveniente conocer la relación en la variable $x = g(y)$. Supóngase que se tiene una función de demanda en la cual $y = mx + b$ (y es el precio y x la cantidad demandada), si se quiere saber la cantidad demandada

No todas las funciones poseen inversa.

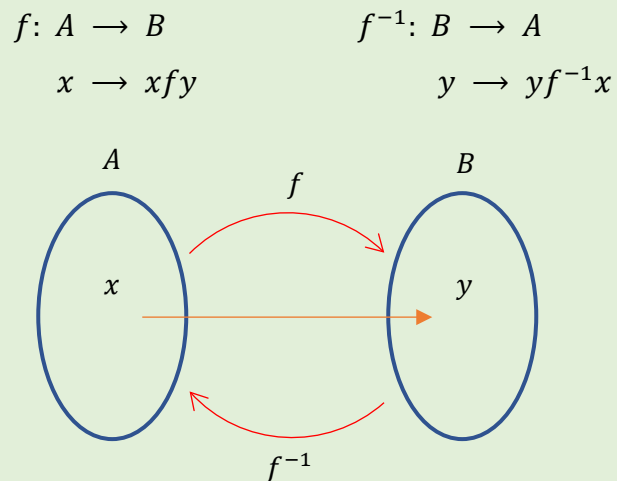
Para ver si una función tiene inversa basta realizar la prueba de la recta horizontal, es decir, si no se logra trazar una recta horizontal que toque dos o más puntos a la función, esta tendrá inversa (función uno a uno).

Las funciones en las cuales no se cumple que dos puntos diferentes lleven a la misma imagen, se llaman inyectivas o uno a uno.

para un precio fijo x_0 , la solución al problema sería sustituir el precio en la función $x = \frac{y-b}{m}$, la cual es la inversa de $f(x)$.

Si se piensa en una función $f: A \rightarrow B$ como una máquina que transforma los elementos de un conjunto A en elementos del conjunto B , ¿qué pasaría si se quieren volver a su forma original?, lo más lógico es imaginar que la máquina en una acción inversa que los devuelva a su forma original. Para que esa acción inversa esté bien definida como una función, $g: B \rightarrow A$, es necesario que no haya dos puntos distintos, x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2) = y$, es decir $g(y) = x_1$ o $g(y) = x_2$, de donde g no sería función, ya que un valor de y lleva a dos de x .

Un esquema que representa esta situación es el siguiente.



Se denota como $g(y) = f^{-1}(x)$.

Dada la función $f: A \rightarrow B$, con ambos conjuntos no vacíos, tener presente que se está trabajando con conjuntos en R . Si $y = f(x)$ entonces $f^{-1}(y) = x; \forall x$ en el dominio de f y $\forall y$ en el dominio de f^{-1} .

Observación.

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

$$R_f = D_{f^{-1}}$$

La recta identidad ($I(x) = x$), funciona como un espejo para el gráfico de $f(x)$ y su inversa.

Si $f(x)$ es creciente, su inversa también lo será.

Si $f(x)$ es decreciente, su inversa también lo será.

Procedimiento para encontrar la inversa de una función.

1. Se despeja la variable independiente (por lo general x).
2. Se sustituye la variable $y = f(x)$ por la variable x .
3. Se sustituye la variable x por $f^{-1}(x)$.

Ejemplo 2.31

Determinar la inversa de la función $f(x) = \frac{x}{3} - 4$.

Solución

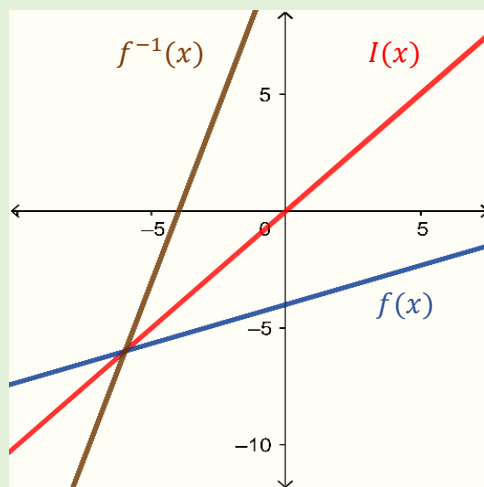
$$f(x) = \frac{x}{3} - 4$$

$$f(x) + 4 = \frac{x}{3}$$

$$3(f(x) + 4) = x$$

$$3f(x) + 12 = x$$

$$3x + 12 = f^{-1}(x)$$



Es decir, la inversa de $f(x)$ es $f^{-1}(x) = 3x + 12$

Dominio y rango de f y su inversa es R .

Ejemplo 2.32

Determinar la inversa de la función $f(x) = 2x - 3$.

Solución

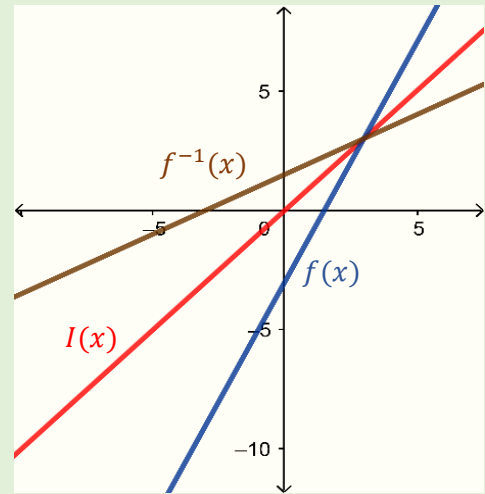
$$f(x) = 2x - 3$$

$$f(x) + 3 = 2x$$

$$\frac{(f(x) + 3)}{2} = x$$

$$\frac{f(x)}{2} + \frac{3}{2} = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{3}{2} = f^{-1}(x)$$



Es decir, la inversa de $f(x)$ es $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.

Dominio y rango de f y su inversa es \mathbb{R} .

Ejemplo 2.33

Determinar la inversa de la función $f(x) = x^2 - 2$.

Solución

En este caso la función f no posee inversa en todo su dominio.

$D_f: \mathbb{R}$.

En este caso se acota(restringe) el dominio para poder obtener su inversa.

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f(x) + 2 = x^2$$

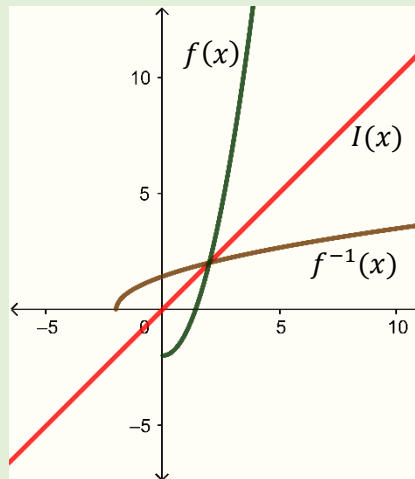
$$\pm\sqrt{f(x) + 2} = x$$

Obsérvese que se tiene 2 opciones.

$$\text{Si } D_f: [0, +\infty)$$

$$\sqrt{f(x) + 2} = x$$

$$\sqrt{x + 2} = f^{-1}(x)$$



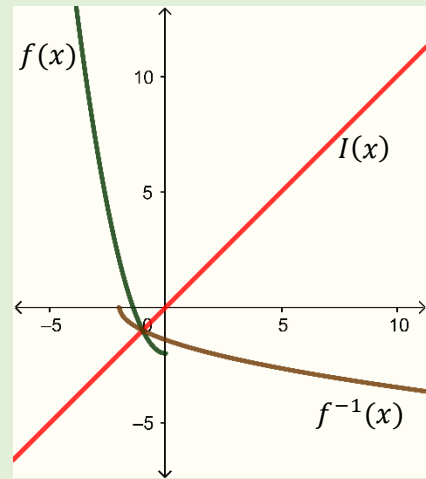
$$R_{f^{-1}}: [0, +\infty)$$

$$R_f = D_{f^{-1}}: [-2, +\infty)$$

$$\text{Si } D_f: (-\infty, 0]$$

$$-\sqrt{f(x) + 2} = x$$

$$-\sqrt{x + 2} = f^{-1}(x)$$



$$R_{f^{-1}}: (-\infty, 0]$$

$$R_f = D_{f^{-1}}: [-2, +\infty)$$

2.1.4 Funciones especiales

Una **función especial** es una función matemática particular, que, por su importancia en los diversos campos, posee nombres y designaciones establecidas.

No existe una definición general de las mismas, las funciones que se abordaran en este texto son: función seccionada, función valor absoluto, función exponencial y función logarítmica, para las cuales se analizaran su respectivo dominio y rango.

2.1.4.1 Función seccionada

El dominio de la función seccionada es la unión de los dominios de f_i .

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup \dots \cup D_{f_n}$$

De igual forma el rango de es la unión de los rangos de f_i .

$$R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup \dots \cup R_{f_n}$$

Algunas formas de definir la función seccionada o función por partes son:

- Se definen por fórmulas diferentes en distintas partes de sus dominios.
- Son aquellas en la que se requiere más de una ecuación para ser definida.
- Su regla de correspondencia está dada por más de una expresión.

Matemáticamente se representa así:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x < b_1 \\ f_2(x), & \text{si } a_1 \leq x < b_2 \\ f_3(x), & \text{si } a_2 \leq x < b_3 \\ \vdots & \\ f_{n-1}(x), & \text{si } a_{n-2} \leq x < b_{n-1} \\ f_n(x), & \text{si } a_{n-1} \leq x \end{cases}$$

Con $b_i \leq a_i$.

Ejemplo 2.34

Sea $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x < 0 \\ 1 - 2x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, graficar indicando su dominio y rango.

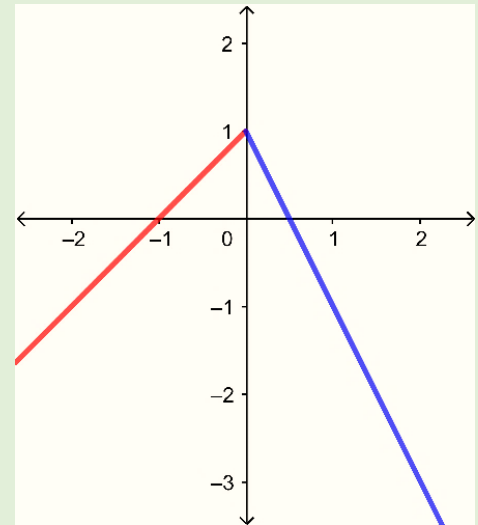
Solución

$$f_1(x) = x + 1$$

$$f_2(x) = 1 - 2x$$

$$\begin{aligned} D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \\ &= (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) \\ &= (-\infty, +\infty) \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_f &= R_{f_1} \cup R_{f_2} \\ &= (-\infty, 1) \cup (-\infty, 1] \\ &= (-\infty, 1] \end{aligned}$$



Ejemplo 2.35

Sea $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x < 0 \\ -x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$, graficar indicando su dominio y rango.

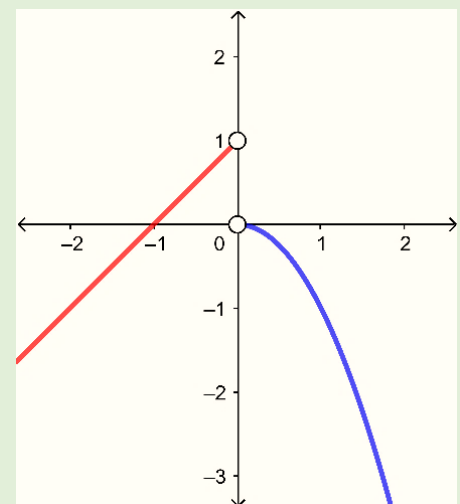
Solución

$$f_1(x) = x + 1$$

$$f_2(x) = -x^2$$

$$\begin{aligned} D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \\ &= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ &= \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_f &= R_{f_1} \cup R_{f_2} \\ &= (-\infty, 1) \cup (-\infty, 0) \\ &= (-\infty, 1) \end{aligned}$$



Ejemplo 2.36

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < -1 \\ -x^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$, graficar indicando su dominio y rango.

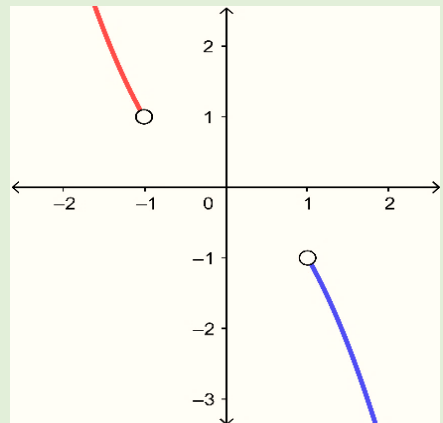
Solución

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = -x^2$$

$$\begin{aligned} D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \\ &= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_f &= R_{f_1} \cup R_{f_2} \\ &= (1, +\infty) \cup (-\infty, -1) \end{aligned}$$



Ejemplo 2.37

Sea $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ 2, & \text{si } x = 0 \\ -x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$, graficar indicando su dominio y rango.

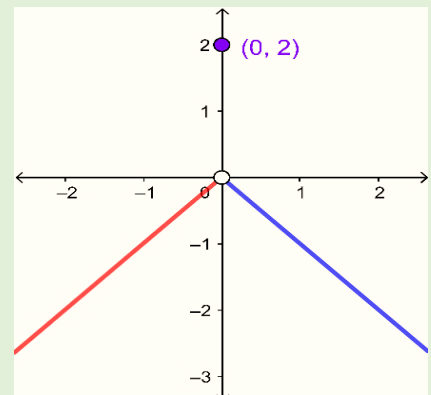
Solución

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = 2$$

$$f_3(x) = -x$$

$$\begin{aligned} D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup D_{f_3} \\ &= (-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, +\infty) \\ &= R \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 R_f &= R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup R_{f_3} \\
 &= (-\infty, 0) \cup \{2\} \cup (-\infty, 0) \\
 &= (-\infty, 0) \cup \{2\}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.38

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < -1 \\ 2x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$, graficar indicando su dominio y rango.

Solución

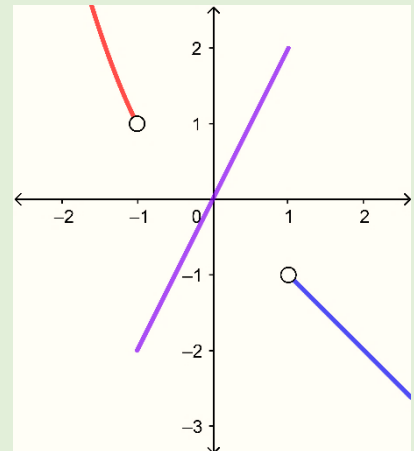
$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = 2x$$

$$f_3(x) = -x$$

$$\begin{aligned}
 D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup D_{f_3} \\
 &= (-\infty, -1) \cup [-1, 1] \cup (1, +\infty) \\
 &= R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_f &= R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup R_{f_3} \\
 &= (1, +\infty) \cup [-2, 2] \cup (-\infty, -1) \\
 &= R
 \end{aligned}$$



2.1.4.2 Función valor absoluto

La función valor absoluto matemáticamente se define como:

Valor absoluto de un número x .

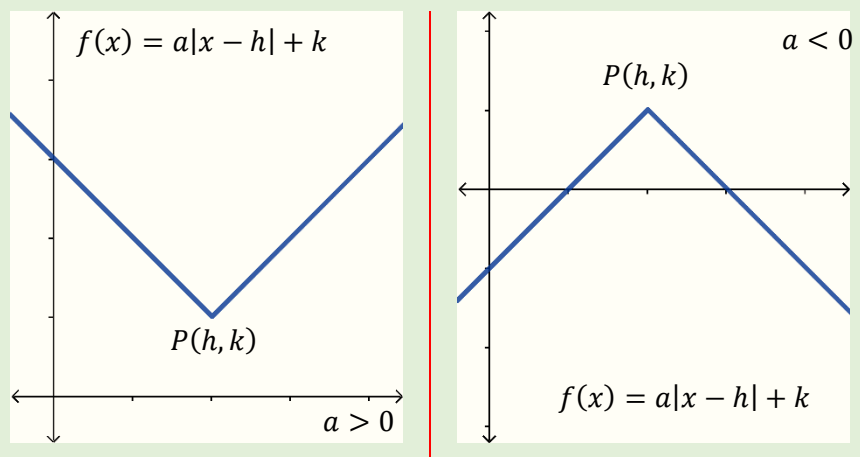
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

El dominio de la función valor absoluto es \mathbb{R} la gráfica de las funciones valor absoluto que se trabajaran, son aquellas en las cuales el argumento del valor absoluto es una función lineal, su gráfica aparenta una letra V y su forma más practica es:

$$f(x) = a|x - h| + k$$

Gráficamente se representa:



Ejemplo 2.39

Sea $f(x) = 2|x - 3| + 1$, graficar indicando dominio y rango.

Solución

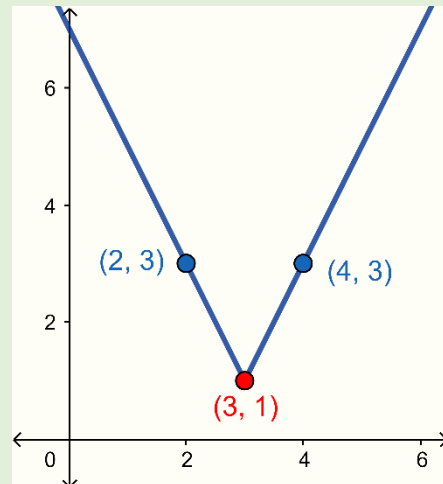
Para graficar la función valor absoluto se puede realizar un proceso similar al que se realiza con la parábola o se puede escribir como una seccionada y luego graficar en cada dominio establecido.

Punto $(h, k) = (3, 1)$

x	y
2	3
4	3

$D_g: \mathbb{R}$

$R_f: [1, +\infty)$



Transformando la función f en una seccionada.

$$f(x) = 2|x - 3| + 1$$

$$= \begin{cases} 2(x - 3) + 1, & \text{si } x - 3 \geq 0 \\ -2(x - 3) + 1, & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x - 6 + 1, & \text{si } x \geq 3 \\ -2x + 6 + 1, & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

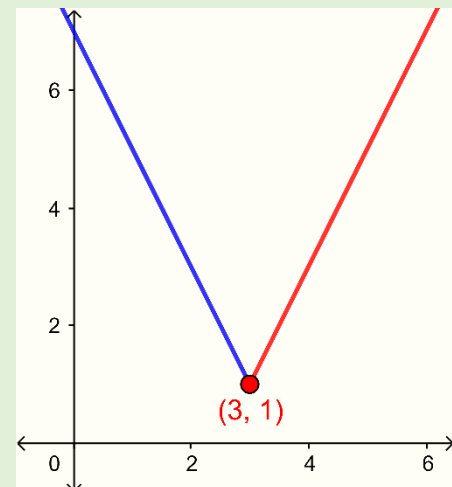
$$= \begin{cases} 2x - 5, & \text{si } x \geq 3 \\ -2x + 7, & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$f_1(x) = 2x - 5$$

$$f_2(x) = -2x + 7$$

$$\begin{aligned} D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \\ &= [3, +\infty) \cup (-\infty, 3) \\ &= (-\infty, +\infty) \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_f &= R_{f_1} \cup R_{f_2} \\ &= [1, +\infty) \cup (1, +\infty) \\ &= [1, +\infty) \end{aligned}$$



Ejemplo 2.40

Sea $f(x) = -3|x + 2| - 1$, graficar indicando dominio y rango.

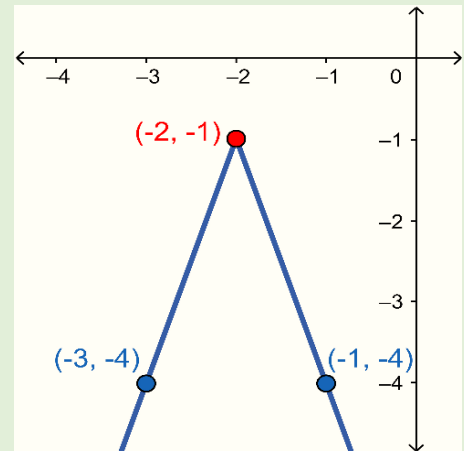
Solución

Punto $(h, k) = (-2, -1)$

x	y
-3	-4
-1	-4

$D_f: \mathbb{R}$

$R_f: (-\infty, 1]$



Transformando la función f en una seccionada.

$$f(x) = -3|x + 2| - 1$$

$$= \begin{cases} -3(x + 2) - 1, & \text{si } x + 2 \geq 0 \\ 3(x + 2) - 1, & \text{si } x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -3x - 6 - 1, & \text{si } x \geq -2 \\ 3x + 6 - 1, & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -3x - 7, & \text{si } x \geq -2 \\ 3x + 5, & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

$$f_1(x) = -3x - 7$$

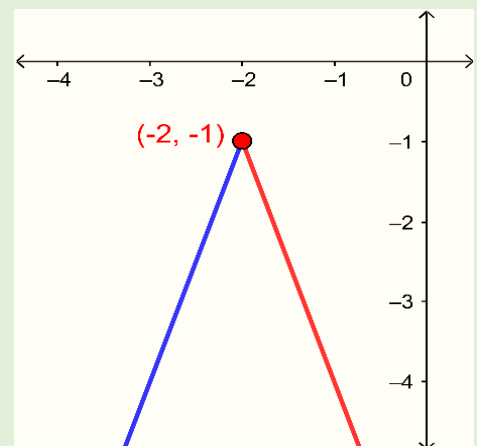
$$f_2(x) = 3x + 5$$

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$$

$$= [-2, +\infty) \cup (-\infty, -2)$$

$$= (-\infty, +\infty)$$

$$= \mathbb{R}$$



$$\begin{aligned}
 R_f &= R_{f_1} \cup R_{f_2} \\
 &= (-\infty, -1] \cup (-\infty, -1) \\
 &= (-\infty, -1]
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.41

Sea $f(x) = 3|x + 3| - 2$, graficar indicando dominio y rango.

Solución

Transformando la función f en una seccionada.

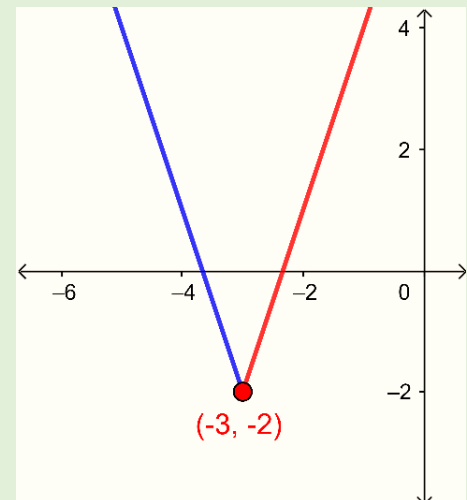
$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3|x + 3| - 2 \\
 &= \begin{cases} 3(x + 3) - 2, & \text{si } x + 3 \geq 0 \\ -3(x + 3) - 2, & \text{si } x + 3 < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 3x + 9 - 2, & \text{si } x \geq -3 \\ -3x - 9 - 2, & \text{si } x < -3 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 3x + 7, & \text{si } x \geq -3 \\ -3x - 11, & \text{si } x < -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$f_1(x) = 3x + 7$$

$$f_2(x) = -3x - 11$$

$$\begin{aligned}
 D_f &= D_{f_1} \cup D_{f_2} \\
 &= [-3, +\infty) \cup (-\infty, -3) \\
 &= (-\infty, +\infty) \\
 &= R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_f &= R_{f_1} \cup R_{f_2} \\
 &= [-2, +\infty) \cup (-2, +\infty) \\
 &= [-2, +\infty)
 \end{aligned}$$



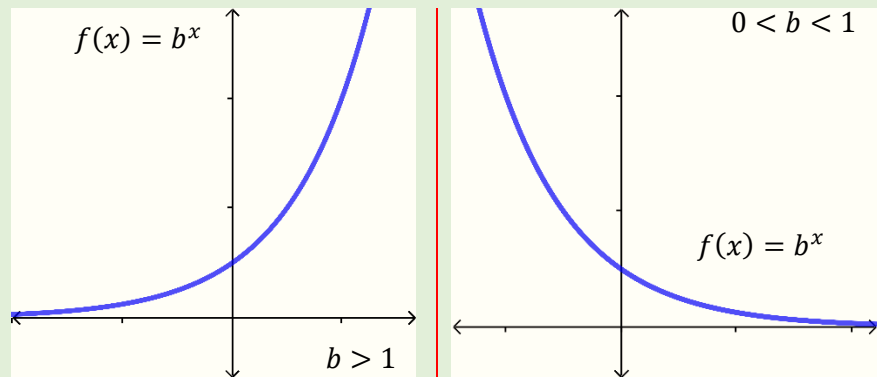
2.1.4.3 Función exponencial y Ecuaciones exponenciales

En la naturaleza y en la vida social existen numerosos fenómenos que se rigen por leyes de crecimiento exponencial. Tal sucede, por ejemplo, en el aumento de un capital invertido a interés continuo o en el crecimiento de las poblaciones.

Se llama **función exponencial** de **base b** a aquella cuya forma genérica es $f(x) = b^x$, siendo b un número positivo distinto de 1, las funciones exponenciales tienen por dominio a los reales \mathbb{R} .

$$f(0) = 1$$
$$f(1) = b$$

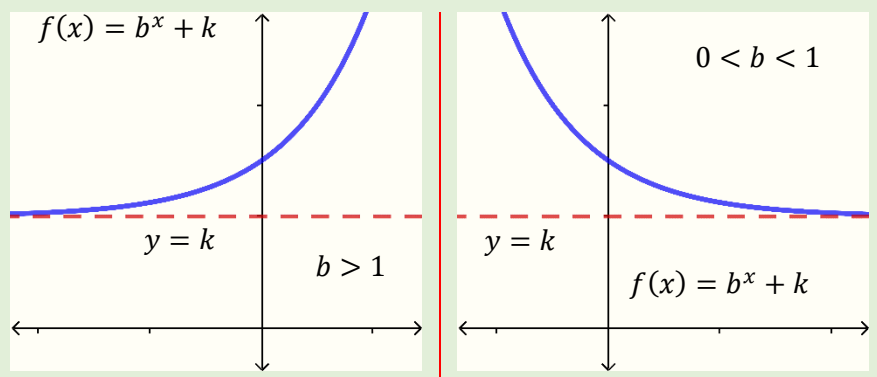
Gráficamente se representa:



Con rango $(0, +\infty)$, además $y = 0$ es una asíntota horizontal y corta al eje y en el punto $(0, 1)$.

Más general $f(x) = b^x + k$, $y = k$ es una asíntota horizontal, corta al eje y en $(0, k + 1)$ y el rango será $(k, +\infty)$.

Gráficamente se representa:



Rango: $(k, +\infty)$.

Ejemplo 2.42

Graficar indicando dominio y rango las funciones siguientes.

a) $f(x) = (1/4)^x$

b) $g(x) = e^x$

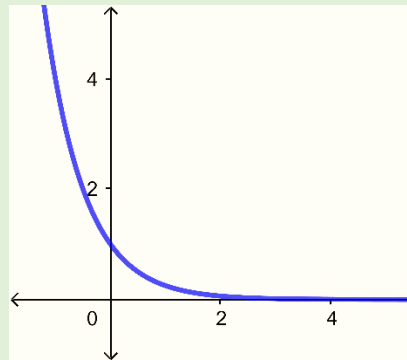
c) $h(x) = (1/3)^x + 2$

d) $m(x) = 2^x - 3$

Solución

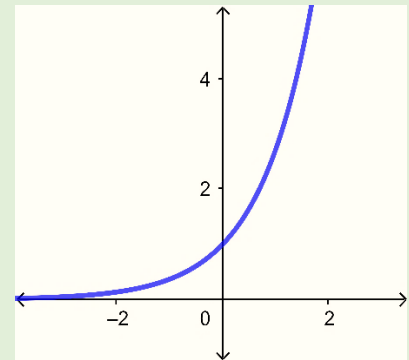
El dominio de todas las funciones es: \mathbb{R} .

a) $f(x) = (1/4)^x$



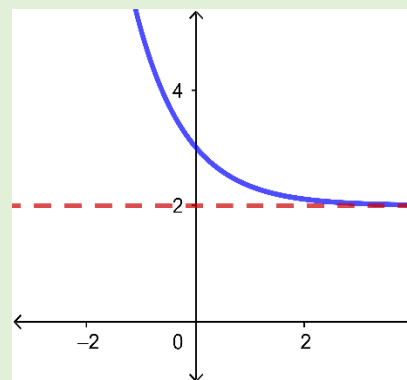
Rango: $(0, +\infty)$.

b) $g(x) = e^x$



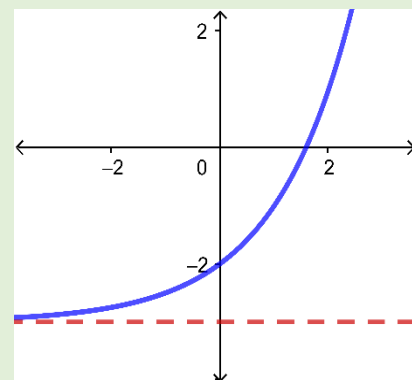
Rango: $(0, +\infty)$.

c) $h(x) = (1/3)^x + 2$



Rango: $(2, +\infty)$.

d) $m(x) = 2^x - 3$



Rango: $(-3, +\infty)$.

Ecuaciones exponenciales

Se llaman **ecuaciones exponenciales** a aquellas en las que la incógnita aparece como **exponente**. Un ejemplo de ecuación exponencial sería $a^x = b$.

Para resolver estas ecuaciones se suelen utilizar dos métodos alternativos:

- **Igualación de la base:** consiste en aplicar las propiedades de las potencias para lograr que en los dos miembros de la ecuación aparezca una misma base elevada a distintos exponentes: $A^x = A^y$. En tales condiciones, la resolución de la ecuación proseguiría a partir de la igualdad $x = y$.
- **Cambio de variable:** consiste en sustituir todas las potencias que aparecen en la ecuación por potencias de una nueva variable, convirtiendo la ecuación original en otra más fácil de resolver.

$$2^{2x} - 5 \times 2^x - 6 = 0$$

Asiendo $u = 2^x$, se tiene $u^2 - 5u - 6 = 0$, luego se deshace el cambio de variable.

$$(b^n)^m = b^{n \times m}$$

$$2^{2x} = (2^x)^2$$

Ejemplo 2.43

Encuentre el valor de x según sea el caso de las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $3^{x-2} = 9$

b) $5^{2x} + 5^{x+2} = 26$

c) $5(2^{2x+2}) - 64 = 16^x$

Solución

a) $3^{x-2} = 9$

Igualando bases.

$$3^{x-2} = 9$$

$$3^{x-2} = 3^2$$

De donde como son bases iguales.

$$x - 2 = 2$$

$$x = 4$$

b) $5^{2x} + 5^{x+2} = 26$

Primero.

$$5^{2x} + 25 \times 5^x - 26 = 0$$

Asiendo $u = 5^x$.

$$u^2 + 25u - 26 = 0$$

$$(u + 26)(u - 1) = 0$$

Entonces $u = -26$ y $u = 1$.

Es decir $5^x = -26$ y $5^x = 1$.

$5^x = -26$ no es posible.

$5^x = 1$, se cumple si $x = 0$.

c) $5(2^{2x+2}) - 64 = 16^x$

Primero.

$$20 \times 2^{2x} - 64 = (2^{2x})^2$$

Asiendo $u = 2^{2x}$.

$$20u - 64 = u^2$$

$$0 = u^2 - 20u + 64$$

$$b^{n+m} = b^n \times b^m$$

$$5^{2x} = (5^x)^2$$

$$5^{x+2} = 5^x \times 5^2$$

$$= 5^x \times 25$$

$$= 25 \times 5^x$$

$$5^0 = 1$$

$$5(2^{2x+2}) = 5(2^{2x} \times 2^2)$$

$$= 5(2^{2x} \times 4)$$

$$= 5(4 \times 2^{2x})$$

$$= 20 \times 2^{2x}$$

$$\begin{aligned}
 (16)^x &= (2^4)^x \\
 &= 2^{4x} \\
 &= 2^{2x \times 2} \\
 &= (2^{2x})^2
 \end{aligned}$$

$$0 = (u - 16)(u - 4)$$

Entonces $u = 16$ y $u = 4$.

Es decir $2^{2x} = 16$ y $2^{2x} = 4$.

$$\begin{array}{ll}
 2^{2x} = 16 & 2^{2x} = 4 \\
 2^{2x} = 2^4 & 2^{2x} = 2^2 \\
 2x = 4 & 2x = 2 \\
 x = 2 & x = 1
 \end{array}$$

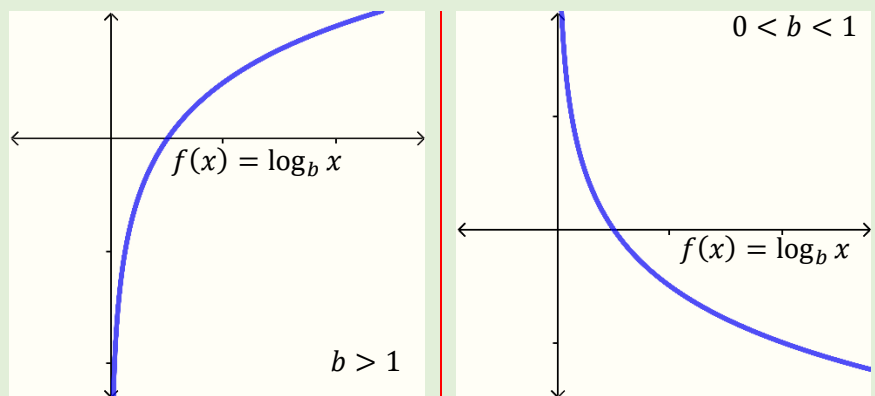
2.1.4.4 Función logarítmica y Ecuaciones Logarítmicas

Al igual que la función exponencial, la función logarítmica se utiliza con mucha frecuencia en los cálculos y desarrollos de las matemáticas, las ciencias naturales y las ciencias sociales. Entre otros fines, se usa ampliamente para comprimir la escala de medida de magnitudes cuyo crecimiento, es demasiado rápido.

Una **función logarítmica** es aquella que genéricamente se expresa como $f(x) = \log_b x$, siendo b la **base** de esta función, que ha de ser positiva y distinta de 1.

La función logarítmica es la inversa de la **función exponencial**

Gráficamente se representa:



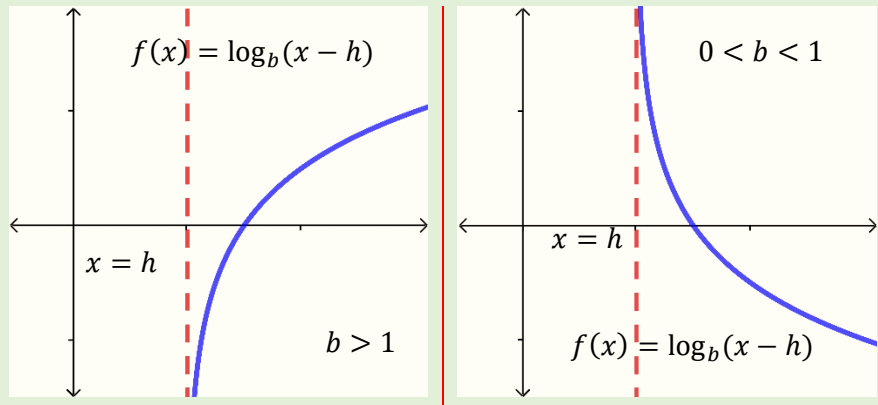
Las escalas de medida de la intensidad de los terremotos más comúnmente utilizadas son de tipo logarítmico. Así, la escala de Richter utiliza una escala logarítmica de base 10.

$$\log_b x = m \Rightarrow x = b^m$$

Con dominio $(0, +\infty)$ y rango R , siendo $x = 0$ una asíntota vertical y corta al eje x en el punto $(1,0)$.

Más general $f(x) = \log_b(x - h)$, siendo $x = h$ una asíntota vertical, corta al eje x en $(h + 1, 0)$ y el dominio será $(h, +\infty)$.

Gráficamente se representa:



Con dominio $(h, +\infty)$.

Cuando el logaritmo es base 10 ($b = 10$), se llama **logaritmo decimal** o **logaritmo común**, no se suele escribir la base así: $f(x) = \log x$.

Se llama **logaritmo neperiano** (o **logaritmo natural**), y se escribe: $f(x) = \ln x$, cuando la base es el número irracional e ($e = 2,7182818 \dots$).

Ejemplo 2.44

Calcular la inversa Graficar en un mismo plano indicando dominio y rango las funciones siguientes:

a) $f(x) = \log_e x$

b) $g(x) = \log_{1/2} x$

c) $h(x) = \log_{10}(x - 2)$

d) $m(x) = \log_{1/4}(x + 1)$

Solución

a) $f(x) = \log_e x = \ln x$

Calculando la inversa.

$$\log_e x = f(x) \Rightarrow x = e^{f(x)}$$

$$f^{-1}(x) = e^x$$

$$D_f = R_{f^{-1}}: (0, +\infty)$$

b) $g(x) = \log_{1/2} x$

Calculando la inversa.

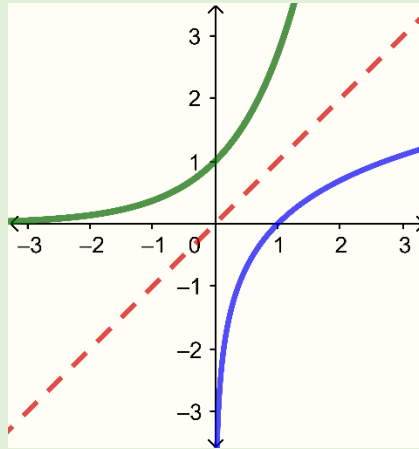
$$\log_{1/2} x = g(x) \Rightarrow x = (1/2)^{g(x)}$$

$$g^{-1}(x) = (1/2)^x$$

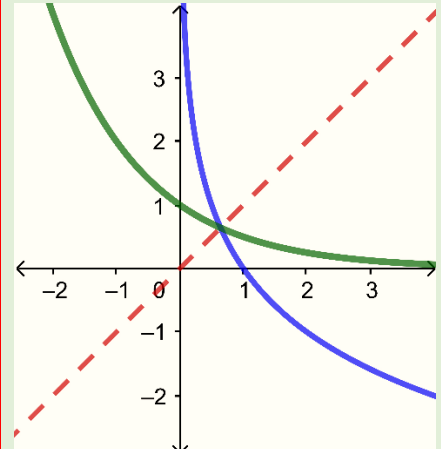
$$D_g = R_{g^{-1}}: (0, +\infty)$$

$$\log_b x = m \Rightarrow x = b^m$$

$$R_f = D_{f^{-1}}: \mathbb{R}$$



$$R_g = D_{g^{-1}}: \mathbb{R}$$



c) $h(x) = \log_{10}(x - 2)$

$$h(x) = \log_{10}(x - 2) = \log(x - 2)$$

Calculando la inversa.

$$\log_{10}(x - 2) = h(x)$$

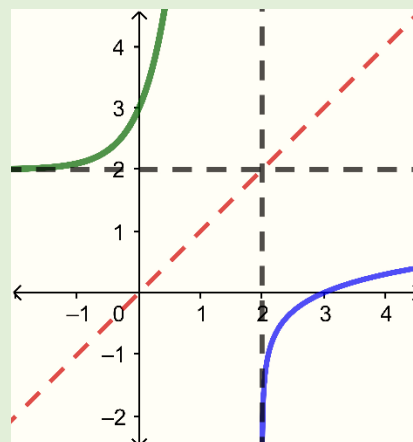
$$\Rightarrow x - 2 = 10^{h(x)}$$

$$\Rightarrow x = 10^{h(x)} + 2$$

$$h^{-1}(x) = 10^x + 2$$

$$D_h = R_{h^{-1}}: (2, +\infty)$$

$$R_h = D_{h^{-1}}: \mathbb{R}$$



d) $m(x) = \log_{1/4}(x + 1)$

Calculando la inversa.

$$\log_{1/4}(x + 1) = m(x)$$

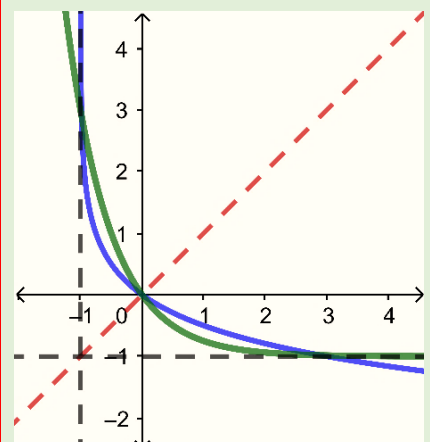
$$\Rightarrow x + 1 = (1/4)^{m(x)}$$

$$\Rightarrow x = (1/4)^{m(x)} - 1$$

$$m^{-1}(x) = (1/4)^x - 1$$

$$D_m = R_{m^{-1}}: (-1, +\infty)$$

$$R_m = D_{m^{-1}}: \mathbb{R}$$



Propiedades de los logaritmos

- Logaritmo de cualquier base de 1 es igual a cero.

$$\log_b 1 = 0$$

- Logaritmo base b de b es igual a uno.

$$\log_b b = 1$$

- Logaritmo de una potencia.

$$\log_b(x^y) = y \log_b x$$

- Logaritmo del producto.

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

- Logaritmo del cociente.

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

- Cambio de base.

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Ejemplo 2.45

Aplicando propiedades de los logaritmos, desarrolle las siguientes expresiones.

a) $\log_e\left(\frac{xy}{3d^2}\right)$

b) $\log_b(\sqrt[5]{32b})$

c) $\log_{10}\left(\frac{x^3}{\sqrt{y+2}\sqrt[3]{x+y}}\right)$

d) $\log_p\left(\frac{\sqrt[7]{(x+1)}}{x^{2/6}\sqrt{p}}\right)$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Solución

a) $\log_e \left(\frac{xy}{3d^2} \right)$

$$\begin{aligned}\log_e \left(\frac{xy}{3d^2} \right) &= \ln \left(\frac{xy}{3d^2} \right) \\ &= \ln(xy) - \ln(3d^2) \\ &= \ln(x) + \ln(y) - (\ln(3) + \ln(d^2)) \\ &= \ln(x) + \ln(y) - \ln(3) - 2 \ln(d)\end{aligned}$$

b) $\log_b(\sqrt[5]{32b})$

$$\begin{aligned}\log_b(\sqrt[5]{32b}) &= \log_b((32b)^{1/5}) \\ &= \frac{1}{5} \log_b(32b) \\ &= \frac{1}{5} [\log_b(32) + \log_b(b)] \\ &= \frac{1}{5} [\log_b(2^5) + 1] \\ &= \frac{1}{5} [5 \log_b(2) + 1] \\ &= \log_b(2) + \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$32 = 2^5$$

$$\log_b(b) = 1$$

c) $\log_{10} \left(\frac{x^3}{\sqrt{y + 2^3} \sqrt{x + y}} \right)$

$$\begin{aligned}\log_{10} \left(\frac{x^3}{\sqrt{y + 2^3} \sqrt{x + y}} \right) &= \log \left(\frac{x^3}{\sqrt{y + 2^3} \sqrt{x + y}} \right) \\ &= \log \left(\frac{x^3}{(y + 2)^{\frac{1}{2}} (x + y)^{\frac{1}{3}}} \right) \\ &= \log x^3 - \log \left((y + 2)^{\frac{1}{2}} (x + y)^{\frac{1}{3}} \right)\end{aligned}$$

$$= \log x^3 - \left[\log(y+2)^{\frac{1}{2}} + \log(x+y)^{\frac{1}{3}} \right]$$

$$= 3\log x - \frac{1}{2}\log(y+2) - \frac{1}{3}\log(x+y)$$

d) $\log_p \left(\frac{\sqrt[7]{x+1}}{x^2 \sqrt[6]{p}} \right)$

$$\log_p \left(\frac{\sqrt[7]{x+1}}{x^2 \sqrt[6]{p}} \right) = \log_p \left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{7}}}{x^2 p^{\frac{1}{6}}} \right)$$

$$= \log_p \left((x+1)^{\frac{1}{7}} \right) - \log_p \left(x^2 p^{\frac{1}{6}} \right)$$

$$= \frac{1}{7} \log_p(x+1) - \left[\log_p(x^2) + \log_p \left(p^{\frac{1}{6}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{7} \log_p(x+1) - 2 \log_p(x) - \frac{1}{6} \log_p(p)$$

$$= \frac{1}{7} \log_p(x+1) - 2 \log_p(x) - \frac{1}{6}$$

$$\log_p(p) = 1$$

Ejemplo 2.46

Aplicando propiedades de los logaritmos, desarrolle las siguientes expresiones.

a) $\frac{1}{2} \log_e(x) - 2 \log_e(x)$ **b)** $\log_b(2) - \log_b(x) + \log_b(y)$

c) $\log_{10}(x) + \frac{2}{3} \log_{10}(y) + 2$ **d)** $\log_p(y) - \frac{1}{2} \log_p(7) - 3$

Solución

a) $\frac{1}{2} \log_e(x) - 2 \log_e(x)$

$$\frac{1}{2} \log_e(x) - 2 \log_e(x) = \log_e \left(x^{\frac{1}{2}} \right) - \log_e(x^2)$$

$$= \log_e \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} \right)$$

$$= \log_e \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$= \log_e \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} \right)$$

b) $\log_b(2) - \log_b(x) + \log_b(y)$

$$\begin{aligned} \log_b(2) - \log_b(x) + \log_b(y) &= \log_b(2) + \log_b(y) - \log_b(x) \\ &= \log_b(2y) - \log_b(x) \\ &= \log_b \left(\frac{2y}{x} \right) \end{aligned}$$

c) $\log_{10}(x) + \frac{2}{3} \log_{10}(y) + 2$

$$\begin{aligned} \log_{10}(x) + \frac{2}{3} \log_{10}(y) + 2 &= \log_{10}(x) + \log_{10} \left(y^{\frac{2}{3}} \right) + 2 \log_{10}(10) \\ &= \log_{10}(x) + \log_{10} \left(y^{\frac{2}{3}} \right) + \log_{10}(10^2) \\ &= \log_{10} \left(100xy^{\frac{2}{3}} \right) \\ &= \log \left(100xy^{\frac{2}{3}} \right) \end{aligned}$$

d) $\log_p(y) - \frac{1}{2} \log_p(7) - 3$

$$\begin{aligned} \log_p(y) - \frac{1}{2} \log_p(7) - 3 &= \log_p(y) - \log_p \left(7^{\frac{1}{2}} \right) - 3 \log_p(p) \\ &= \log_p(y) - \left[\log_p \left(7^{\frac{1}{2}} \right) + \log_p(p^3) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log_p(y) - \left[\log_p \left(7^{\frac{1}{2}} p^3 \right) \right] \\
&= \log_p \left(\frac{y}{7^{\frac{1}{2}} p^3} \right) \\
&= \log_p \left(\frac{y}{\sqrt{7} p^3} \right)
\end{aligned}$$

Ecuaciones logarítmicas

Cuando en una ecuación la variable o incógnita aparece como argumento o como base de un logaritmo, se le llama ecuación logarítmica.

La resolución de **ecuaciones logarítmicas** se basa en los mismos procedimientos utilizados en la resolución de las ecuaciones habituales. Aunque no existen métodos fijos, habitualmente se procura convertir la ecuación logarítmica en otra equivalente donde no aparezca ningún logaritmo. Para ello, se ha de intentar llegar a una situación semejante a la siguiente:

$$\log_b f(x) = \log_b g(x)$$

Entonces $f(x) = g(x)$, se resuelve por los métodos habituales.

También puede operarse en la ecuación logarítmica utilizando las propiedades con el objetivo de obtener una ecuación equivalente del tipo: $\log_b f(x) = m$ de donde se obtiene que $f(x) = b^m$, que sí se puede resolver de la forma habitual.

Ejemplo 2.47

Encuentre el valor de x según sea el caso de las siguientes ecuaciones exponenciales.

$$\mathbf{a)} \log_5(x - 3) = 4$$

$$\mathbf{b)} \frac{1}{2} \log_7(x - 15) = 3 \log_7 4 - \frac{3}{2} \log_7(x - 15)$$

$$\mathbf{c)} 2 \log_2(2x - 2) = \log_2 \left(\frac{3}{8} + \frac{3x}{16} \right) + 5$$

Solución

$$\mathbf{a)} \log_5(x - 3) = 4$$

$$\log_b x = m \Rightarrow x = b^m$$

$$\log_5(x - 3) = 4 \Rightarrow x - 3 = 5^4$$

$$\Rightarrow x = 625 + 3$$

$$\Rightarrow x = 628$$

$$\mathbf{b)} \frac{1}{2} \log_7(x - 15) = 3 \log_7 4 - \frac{3}{2} \log_7(x - 15)$$

$$\frac{1}{2} \log_7(x - 15) = 3 \log_7 4 - \frac{3}{2} \log_7(x - 15)$$

$$\frac{1}{2} \log_7(x - 15) + \frac{3}{2} \log_7(x - 15) = 3 \log_7 4$$

$$2 \log_7(x - 15) = 3 \log_7 4$$

$$\log_7(x - 15)^2 = \log_7 4^3$$

$$\Rightarrow (x - 15)^2 = 64$$

$$(x - 15) = \pm \sqrt{64}$$

$$x - 15 = \pm 8$$

$$x = \pm 8 + 15$$

$$x = -8 + 15 = 7 \text{ no es valida}$$

$$x = 8 + 15 = 23$$

$$\mathbf{c)} 2 \log_2(2x - 2) = \log_2 \left(\frac{3}{8} + \frac{3x}{16} \right) + 5$$

$$2 \log_2(2x - 2) = \log_2 \left(\frac{3}{8} + \frac{3x}{16} \right) + 5$$

$$\log_2(2x - 2)^2 = \log_2 \left(\frac{3}{8} + \frac{3x}{16} \right) + 5 \log_2 2$$

$$(2x - 2)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(2) + 2^2 \\ = 4x^2 - 8x + 4$$

$$\log_2(2x - 2)^2 = \log_2\left(\frac{3}{8} + \frac{3x}{16}\right) + \log_2 32$$

$$\log_2(2x - 2)^2 = \log_2(12 + 6x)$$

$$\Rightarrow (2x - 2)^2 = 12 + 6x$$

$$4x^2 - 8x + 4 = 12 + 6x$$

$$4x^2 - 14x - 8 = 0$$

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

Utilizando la cuadrática $x = 4$ y $x = -1/2$.

Donde solo $x = 4$ es solución de la ecuación logarítmica.

Tener presente las operaciones que se pueden realizar con las potencias, ya que son de mucha utilidad.

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$



UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA
GUÍA DE EJERCICIOS SOBRE FUNCIONES
MATEMÁTICA I



I. Evaluar en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x) = 3x - 2$, encontrar: $f(-2)$, $f(0)$ y $f(2)$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$, encontrar: $f(-1)$, $f(3/2)$ y $f(3)$

c) $f(x) = \frac{3x-1}{2-x}$, encontrar: $f(-2)$, $f(0)$ y $f(2)$

d) $f(x) = \sqrt{3x+5}$, encontrar: $f(-3)$, $f(-1/3)$ y $f(4/3)$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+6}$, encontrar: $f(-\sqrt{3})$, $f(\sqrt{10})$ y $f(\sqrt{19})$

II. Determine el dominio de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$

b) $f(x) = \frac{x-5}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{3-x}{x^2+x-20}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{3x-2}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-3}{x-2}}$

f) $f(x) = \sqrt{3-4x}$

g) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{3-x}{5-2x}}$

h) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt[5]{x^2-4}}$

i) $f(x) = \frac{1 - 2x}{\sqrt{2x - 3}}$

j) $f(x) = \frac{x^2 - 21}{\sqrt{-x^2 + 2x - 1}}$

k) $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{9 - x^2}}$

l) $f(x) = \frac{x^2 - 12}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$

III. Determine las pendientes de las líneas que pasas por cada pareja de puntos:

a) $A = (2,7)$ y $B = (3,2)$

b) $A = (3,-2)$ y $B = (7,-2)$

c) $A = (-3,2)$ y $B = (-7,-2)$

d) $A = (1,2)$ y $B = (7,2)$

e) $A = (-3,-2)$ y $B = (-7,2)$

f) $A = (-2,-2)$ y $B = (-2,2)$

g) $A = (3,5)$ y $B = (3,-3)$

h) $A = (-1,-1)$ y $B = (5,-3)$

IV. Encuentre la ecuación de la línea recta que satisfacen las condiciones de cada uno de los casos siguientes, dibuje la gráfica en cada caso:

a) Pasa por los puntos $(1,2)$ y $(7,2)$

b) Su pendiente es -2 y pasa por $(2,3)$

c) Pendiente 0 y pasa por el origen

d) No tiene pendiente y pasa por el origen

e) Ordenada en el origen y su pendiente es igual a 2

f) Pendiente 0 y pasa por el punto $(3,-5)$

- g) No tiene pendiente y pasa por el punto $(3, -5)$
- h) Pasa por el punto $(-1, -2)$ y por el origen
- i) Pasa por el origen y el punto $(2, -1)$
- j) Corta al eje x en 3 y al eje y en 2

V. Encuentre la ecuación de la línea recta que satisfacen las condiciones de cada uno de los ejercicios siguientes, dibuje ambas rectas en un solo plano en cada caso.

- a) Pasa por los puntos $(1,2)$ y es paralela a la recta $3x - y = 7$
- b) Pasa por los puntos $(-1,1)$ y es paralela a la recta $2x + y = 5$
- c) Pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a $y = 5$
- d) Pasa por el punto $(-2,7)$ y es paralela a $x = 3$
- e) Pasa por el punto $(-3,2)$ y es paralela a la recta que pasa por $(2, -2)$ y $(3,2)$
- f) Pasa por el punto $(-3,2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(3, -2)$ y $(5, -5)$

VI. Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, perpendiculares o secantes.

- a) $2x - 5y - 6 = 0$ y $5y - 2x + 5 = 0$
- b) $3x - 2y + 7 = 0$ y $3y + 2x = 0$
- c) $3x - 3y + 4 = 0$ y $3y - 2x + 9 = 0$

d) $3x = 2y + 8$ y $3y + 2x - 5 = 0$

e) $5x - 4y = 10$ y $4y - 5x = 6$

f) $3x - 5y = 10$ y $10y - 6x = 7$

VII. Para las ecuaciones siguientes, escriba la ecuación ordinaria de la parábola, determine el rango y grafique.

a) $x^2 + y = 0$

b) $x^2 - y = -2$

c) $x^2 + 2x - 2y = 3$

d) $x^2 - 2x + 2y = 2$

e) $2x^2 + 4x - 2y = 6$

f) $3x^2 - 9x + 5y = 5$

g) $y^2 - 8x = 6$

h) $y^2 - 5y + 3x = 5$

VIII. Determine la ecuación general, el rango y grafique las siguientes parábolas

a) $x^2 = 2(y - 2)$

b) $(x - 1)^2 = -y$

c) $(x - 2)^2 = -2(y + 3)$

d) $(x + 1)^2 = 2(y + 3)$

e) $(x + 2)^2 = 4(y - 2)$

f) $(x - 3)^2 = -9(y + 5)$

g) $(y + 2)^2 = -8(x + 6)$

h) $(y - 2)^2 = 5(x - 3)$

IX. Para las siguientes funciones calcular $f + g$, $f - g$, $f * g$, f / g , luego encuentre su dominio

a) $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2 + 2x$

c) $f(x) = 3 - 2x$ y $g(x) = x^2 + 2x + 1$

d) $f(x) = x^2 + 9$ y $g(x) = x^2 - 9$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 6 - \sqrt{x}$

X. Encuentre la composición de funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ para:

a) $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = x^2 + 2x$

c) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ y $g(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = \frac{x+9}{x+1}$ y $g(x) = x^2 - 9$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 6 - x^2$

XI. Determine la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x - 7$

b) $f(x) = 5 - 3x^2$

c) $f(x) = \frac{3-x}{2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{3x-2}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

f) $f(x) = \sqrt{3-4x}$

g) $f(x) = \sqrt[4]{x-2} - 1$

h) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$

i) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{2x-3}}$

j) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 7$

XII. Grafique y determine el dominio de las funciones siguientes:

a) $f(x) = |2x - 7|$

b) $f(x) = \left| \frac{3-x}{2} \right|$

c) $f(x) = |x - 1| + 2$

d) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 1 \\ x + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x = 1 \\ x^2 + 1, & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$

$$\mathbf{g)} \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } x < -2 \\ x^2, & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 1 - 2x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

XIII. Trace la gráfica de las siguientes funciones.

$$\mathbf{a)} \quad f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

$$\mathbf{b)} \quad f(x) = -3^x$$

$$\mathbf{c)} \quad f(x) = \left(\frac{7}{5}\right)^x - 2$$

$$\mathbf{d)} \quad f(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^x + 1$$

$$\mathbf{e)} \quad f(x) = 2^{x+2}$$

$$\mathbf{f)} \quad f(x) = \log_3(x)$$

$$\mathbf{g)} \quad f(x) = \log_{1/2}(x + 1)$$

$$\mathbf{h)} \quad f(x) = -\log_4(x - 1)$$

$$\mathbf{i)} \quad f(x) = \log(x - 2)$$

$$\mathbf{j)} \quad f(x) = \ln(x - 3)$$

XIV. Traslade cada expresión exponencial a su forma logarítmica

$$\mathbf{a)} \quad 2^3 = 8$$

$$\mathbf{b)} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$$

$$\mathbf{c)} \quad \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$$

$$\mathbf{d)} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-2} = \frac{81}{16}$$

$$\mathbf{e)} \quad 4^{5/2} = 32$$

$$\mathbf{f)} \quad 81^{3/4} = 27$$

$$\mathbf{g)} \quad 16^{-1/4} = 2$$

$$\mathbf{h)} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-1/2} = \frac{3}{2}$$

XV. Traslade cada expresión logarítmica a su forma exponencial

a) $\log 100 = 2$

b) $\ln(e^3) = 3$

c) $\log_{1/2} 8 = -3$

d) $\log_{5/4} \left(\frac{16}{25}\right) = -2$

e) $\log_{16} 32 = \frac{5}{4}$

f) $\log_{1/3} 81 = -4$

XVI. Aplicando propiedades de los logaritmos, expandir las siguientes expresiones

a) $\log \frac{\sqrt[3]{2a^2b^5}}{\sqrt{3c^3}}$

b) $\ln \left(\frac{2\sqrt{xy^3}}{5z^5}\right)$

c) $\log_{1/2} \frac{2x}{\sqrt{x-y}(x+y)^3}$

d) $\log_3(x-1)^2(y+z)^{3/5}$

e) $\ln \frac{7^3\sqrt{xy}}{\sqrt{e^3z^5}}$

f) $\log_5(x+z)^5\sqrt[3]{(x-y)^5}$

XVII. Aplicando propiedades de los logaritmos, reducir las siguientes expresiones a un solo argumento.

a) $2 \log x - 3 \log y$

b) $5 \ln x + \ln y - 3$

c) $\log_{1/2} 5 - 3 \log_{1/2} x + 1$

d) $\frac{2}{3} \log_5 a - \frac{3}{2} \log_5 b - 2$

e) $\ln 2 - 3 \ln a - x + y$

f) $\frac{1}{2} \log_3(x-1) - \frac{3}{5} \log_3(y+z)$

XVIII. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_x 4 = 2$

c) $\log_2(2x) = 4$

d) $\log_x \frac{1}{16} = -4$

e) $\log_{\frac{x}{5}} \frac{125}{8} = -3$

f) $\frac{1}{2} \log_5(x-2) = 3 \log_5 2 - \frac{3}{2} \log_5(x-2)$

g) $3 \log_2 x = 5 \log_2 7$

h) $2 \log(2x+2) = 2 + \log\left(1 + \frac{12x}{25}\right)$

i) $\log_5(x-3) = 3$

j) $\log_3 1 + \log_3(x+1) - \log_3(2x-7) = 4$

XIX. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $5^x = \frac{1}{25}$

b) $2^{x^2-x} = 4$

c) $2^{2x} 4^{x-3} = 64^{x-1}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9^{x+1}$

e) $5^{x-4} = 125$

f) $2^{x^2} = 128$

g) $3^{2x} - 3^{x+1} = 54$

h) $2^{2x} + 2^{x+8} = -12$

XX. Determine la solución de los siguientes problemas de aplicación.

- a) Cuando el precio de un libro de texto es de \$20 se venden 80 ejemplares; pero cuando el precio se incrementa a \$90, solamente se logran vender 10 ejemplares. Encuentre la ecuación lineal de la demanda. ¿Cuántos libros se venderían si el precio fuera de \$40?
- b) Cuando la entrada cuesta \$5 asisten 300 personas a un cine, pero cuando la entrada se incrementa a 10 únicamente asisten 50. Construya la ecuación lineal de la demanda. ¿El cine estaría vacío si el precio de la entrada fuera de?
- c) Una zapatería de la calle Concepción vende mensualmente 50 pares de zapatos, elaborados por artesanos salvadoreños, cuyo precio es de \$100, pero solamente logran vender 10 pares de calzado de fábrica, cuyo precio es de \$200 el par. Construya la ecuación lineal de la demanda. ¿Cuál sería la demanda si el precio del calzado fuera de \$125 el par?
- d) Cuando el precio de la botella de aceite es de \$1.9, un supermercado tiene 2 botellas en oferta, pero cuando el precio es de \$2.3 el supermercado presenta 22 botellas en sus estantes. Construya la ecuación de oferta lineal. ¿Cuántas botellas pondría en los estantes el propietario si el precio fuera de \$2.10?
- e) El propietario de una granja avícola dispone únicamente vender 50 pollos, cuando cada pollo se cotiza a \$9, pero saca al mercado 500 pollos, cuando los pollos en periodo navideño, se cotizan a \$18. Construya la ecuación lineal de la oferta. ¿Cuántos pollos pondrá en el mercado el productor cuando el precio de cada pollo sea de \$15? ¿A qué precio no habrá oferta?

- f) El punto de equilibrio de un mercado para un producto ocurre cuando el precio es de \$4.50 la unidad, en este caso se fabrican 13,500 unidades. El fabricante no hace oferta de unidades con precio de \$1.00 y los consumidores no demandan unidades a \$19.50. Obtenga la ecuación lineal de la oferta y demanda.
- g) En una fábrica de camas plegables de metal se compran \$1,000 de hierro, \$200 de resortes. Si la fábrica vende cada armazón en \$94 mientras paga \$20 al obrero que la elabora y además gasta \$9 en materiales (soldadura, pintura, etc.) y el equivalente a \$5 de impuesto y transporte para cada una:
- Construya la ecuación de ingreso y costo
 - Encuentre el punto muerto
 - Si se venden solo 10 camas ¿Cuánto se pierde?
 - Si se venden solo 50 camas ¿Cuánto se gana?
- h) Un vendedor ofrece 220 pares de zapatos deportivos a \$160 el par, pero en este caso solamente 20 personas están interesadas en dichos zapatos. Si el precio fuera de \$50, habría 240 personas interesadas en comprarlos. Pero en este caso el vendedor guarda sus zapatos y no está dispuesto a vender. Encuentre el punto de equilibrio. Si el precio fuera de \$90. ¿Qué sería mayor, la oferta o la demanda?

XXI. Encuentre las intersecciones con los ejes

a) $3x - 5y + 7 = 0$

b) $2x + 7y - 9 = 0$

c) $x^2 + 5x - 2y - 6 = 0$

d) $x^2 - 3x + 5y - 4 = 0$

e) $\sqrt{2x} + 2y - 5 = 0$

f) $6 - \sqrt{3y} - 2x = 0$

g) $\frac{x - y}{x + 4} = 2$

h) $\frac{2x + y}{y + x - 2} = -3$

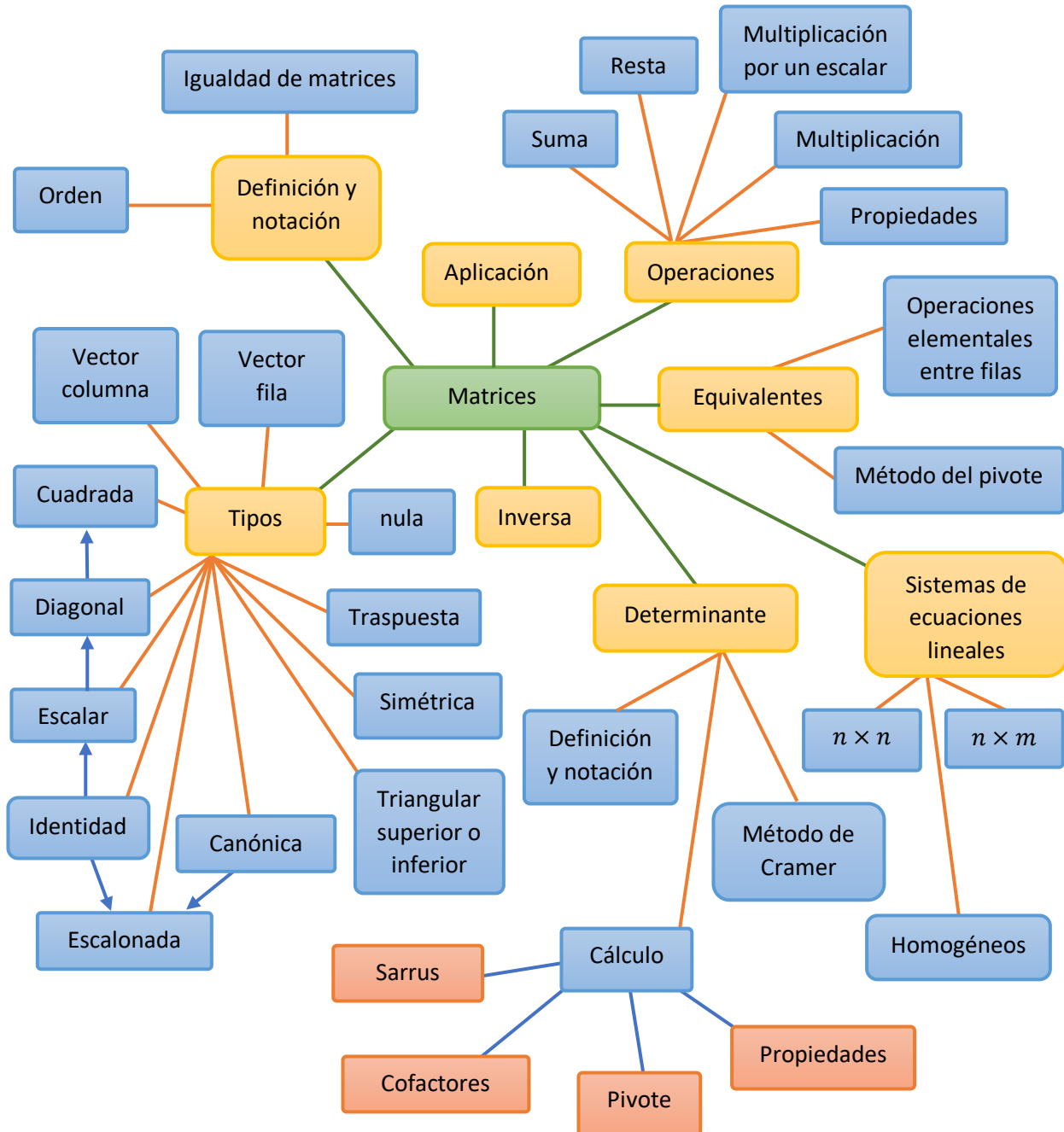
Capítulo III

Matrices

"Las matemáticas son el lenguaje que uso Dios para escribir el mundo": Galileo Galilei

Figura 4

Contenido capítulo III matrices



Capítulo 3: Matrices y determinantes



James Joseph Sylvester (1814-1897) fue un destacado matemático inglés que hizo contribuciones relevantes en varias disciplinas algebraicas, entre ellas a la teoría de matrices. La denominación “matrices” es, de hecho, invención suya; Sylvester solía bromear afirmando que fue una especie de Adán matemático, pues creó casi tanta terminología matemática como debió de crear el primero de los hombres para bautizar la flora y fauna del paraíso. El físico Edward Teller contó en su libro *The pursuit of simplicity*, cuál era, según Sylvester la diferencia entre ciencia y matemáticas: La ciencia intenta encontrar la lógica y la simplicidad en la naturaleza. Las matemáticas intentan establecer orden y simplicidad en el pensamiento humano. (Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, 2021).

3.1 Matrices

Las matrices constituyen una de las estructuras matemáticas más simples, en cuanto a su comprensión o estudio, y con un número mayor de aplicaciones prácticas (Vincent et. al, 2020).

El matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) fue el primero que utilizó el término “matriz” en 1850. La idea era que el término tuviera el significado de “madre de los determinantes”.

Las matrices son una herramienta de mucha utilidad en el estudio del álgebra lineal; lo cual a su vez es de suma importancia para expresar y resolver situaciones de la vida cotidiana. En los negocios son muy utilizadas en la relación entre precio de venta o el costo de producción de un artículo. Se puede presentar información entre la relación de precio de venta y las cantidades vendidas, a partir de un arreglo rectangular en filas y columnas.

En economía, a menudo resulta conveniente utilizar matrices para formular problemas y desplegar datos (Haeusseler et. al, 2008).

3.1.1 Definición de matrices

Antes de hablar sobre la definición de matriz, obsérvese los siguientes arreglos, tabla 1 y tabla 2, con la finalidad de tener una noción sobre la misma:

Tabla 1*Horario de clases.*

Hora	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
6:55-7:45	Mate.		Mate.		Mate.
7:50-8:40	Micro.	Micro.	Micro.		
8:45-9:35			Intro.	Intro.	Intro.
9:40-10:30	Filoso.			Filoso.	Filoso.

Tabla 2*Planilla de empleados enero 2030.*

Nº.	Código	Apellido	Nombre	Sueldo	Descuento	Salario a pagar
1	0001	García	Julio	\$600.00	\$50.00	\$550.00
2	0002	Cerón	Miguel	\$550.00	\$100.00	\$450.00
3	0003	López	Juan	\$800.00	\$150.00	\$650.00
5	0004	Martínez	Dora	\$550.00	\$100.00	\$450.00
6	0005	Franco	Julia	\$800.00	\$150.00	\$650.00

Se puede observar que la tabla 1, es un horario de clases, y en el caso de la tabla 2 se puede decir que se trata de una planilla de empleados.

En ambas tablas se pueden identificar algunas características:

- Poseen forma rectangular.
- Poseen filas y columnas.
- La información se encuentra en la intersección de filas y columnas.

A este tipo de arreglos rectangular se les llama **matrices**, en el caso de la tabla 1, hace referencia a una matriz de horario, y en el caso de la tabla 2, a una matriz de planilla.

También se puede observar que la información contenida puede ser **cualitativa**: asignaturas, código, nombres, apellidos, entre otros. O bien puede ser **cuantitativa**: sueldo, descuento, entre otros. Esta información se encuentra en la intersección de una fila con una columna, por ejemplo, para la tabla 2, en la fila 3 y columna sueldo se encuentra el dato de \$800.00 que para este caso se está haciendo referencia al sueldo de Juan en el mes de enero 2030.

Teniendo presente que las matrices pueden poseer información tanto cualitativa como cuantitativa, en este texto se trabajará con aquellas matrices cuya información sea cuantitativa, además se definirá una forma específica para representarlas y no será como los formatos anteriores.

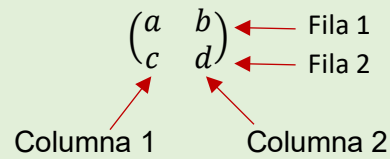
En pocas palabras una matriz es un arreglo rectangular que contiene información organizada en filas y columnas.

Definición 3.1: Matriz

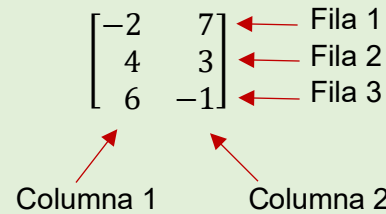
Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas (Grossman, 2008).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.1



y



Las matrices se representan con corchetes o paréntesis:

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ o bien } \begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Para nombrar una matriz se utilizan las letras mayúsculas del alfabeto; así se puede decir, la matriz A , la matriz B , la matriz C , entre otros.

Ejemplo 3.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Los **elementos** de una matriz se encuentran en la intersección de una fila con una columna y se nombran utilizando las letras minúsculas del alfabeto, colocándoles como subíndice el número de fila y columna en que se encuentran ubicados.

a_{ij} : donde i es el número de la fila y j es el número de la columna de la matriz a la cual pertenece.

Tener presente que para representar matrices solo se utilizan paréntesis y corchetes, ojo no utilizar llaves, ni barras, ya que estas tienen otro significado.

Paréntesis ()

Corchetes []

Llaves { }

Barras | |

No confundir cuando se hace referencia a una matriz o a uno de sus elementos

- Matriz con letras mayúsculas
- Elementos con letras minúsculas y subíndices

Ejemplo 3.3

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & -6 \\ -5 & 11 & 4 \end{pmatrix}$:

$a_{12} = 2$, ya que el número 2 se ubica en la fila 1 y columna 2.

$a_{33} = 4$, ya que el número 4 se ubica en la fila 3 y columna 3.

$a_{22} = 1$, ya que el número 1 se ubica en la fila 2 y columna 2.

Orden de una matriz

En una matriz A que tiene m filas y n columnas, el **orden** de la matriz A , es el producto indicado del número de filas por el número de columnas, es decir, $m \times n$.

El orden, la dimensión y el tamaño de una matriz hacen referencia a la misma característica en una matriz.

Ejemplo 3.4

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ el orden de A es 3×2 ; ya que posee 3 filas y 2 columnas.

b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ el orden de B es 2×2 ; ya que posee 2 filas y 2 columnas.

Ejemplo 3.5

Sea A una matriz de orden 3×3 , tal que $a_{ij} = -1$ para $i = j$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Escribir la matriz A .

Solución

- Ya que $i = j$ esto quiere decir que todos los elementos donde las filas coincidan con las columnas tendrán el valor de -1 es decir $a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1$.
- Por otra parte, el resto de elementos donde las filas no coincidan con las columnas tendrán el valor de 0 , es decir $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$, ya que $i \neq j$.

Obteniendo que la matriz A es: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Una matriz de orden $m \times n$ se representa de la forma siguiente:

$A_{m \times n}$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.6

Según características del ejemplo 3.6 se trata de una matriz de 3×2 , significa que posee 3 filas y 2 columnas, en forma general se

puede escribir $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$.

Escribir la matriz $B_{3 \times 2}$ tal que $b_{ij} = 2i - j$.

Solución

Calculando los valores de cada uno de sus elementos.

i	j	$b_{ij} = 2i - j$	b_{ij}
1	1	$2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$	1
	2	$2(1) - 2 = 2 - 2 = 0$	0
2	1	$2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$	3
	2	$2(2) - 2 = 4 - 2 = 2$	2

3	1	$2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$	5
	2	$2(3) - 3 = 6 - 2 = 4$	4

Por lo tanto, la matriz B buscada es: $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

3.1.2 Igualdad de matrices

Asumiendo que A y B son matrices de orden $m \times n$.

Dadas las matrices A y B , se dice que la matriz A es igual a la matriz B ($A = B$) o viceversa, si son del mismo orden y además poseen los mismos elementos en sus respectivas posiciones, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Ejemplo 3.7

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -x & 3 \\ -2 & y \end{bmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & m \\ n & 7 \end{pmatrix}$ determinar los valores de las variables tal que A sea igual a B .

Solución

Para iniciar se debe comprobar que sean del mismo orden, lo cual al observar dichas matrices se cumple, ya que ambas son de orden 2×2 .

Ahora se debe cumplir que todos sus elementos en sus respectivas posiciones sean iguales, es decir:

$$a_{11} = b_{11} \text{ es decir } -x = 2 \Rightarrow x = -2.$$

$$a_{12} = b_{12} \text{ es decir } 3 = m \Rightarrow m = 3.$$

$$a_{21} = b_{21} \text{ es decir } -2 = n \Rightarrow n = -2.$$

$$a_{22} = b_{22} \text{ es decir } y = 7.$$

De donde, los valores de las variables son:

$$m = 3, n = -2, x = -2, y = 7.$$

Ejemplo 3.8

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2x + 1 & 6 \\ y & z + 3 \\ 2 & 3w - 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ y $B = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 2 & 3z \\ 2 & w \end{bmatrix}_{3 \times 2}$.

Encontrar los valores de las variables asumiendo que las matrices son iguales.

Solución

Primero se observa que las matrices poseen el mismo orden, solo resta comparar que los elementos en sus respectivas posiciones sean iguales.

$$\begin{bmatrix} 2x + 1 & 6 \\ y & z + 3 \\ 2 & 3w - 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 2 & 3z \\ 2 & w \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Al igualar los elementos en sus respectivas posiciones se tiene que:

- $2x + 1 = x \Rightarrow 2x - x = -1 \Rightarrow x = -1$
- $6 = 6$
- $y = 2$
- $z + 3 = 3z \Rightarrow 3 = 3z - z \Rightarrow z = \frac{3}{2}$
- $2 = 2$
- $3w - 5 = w \Rightarrow 3w - w = 5 \Rightarrow w = \frac{5}{2}$

De donde los valores buscados son:

$$x = -1; y = 2; z = \frac{3}{2}; w = \frac{5}{2}$$

3.2 Tipos de matrices

Al estudiar las matrices se encuentra con una diversidad de estas, es decir hay varios tipos de matrices, los cuales se clasifican de acuerdo a su forma y tipo de elementos que las caracterizan, a continuación, se describe algunos tipos de matrices los cuales son más utilizados frecuentemente por su aplicabilidad en el desarrollo de problemas.

Matriz Vector Fila: es aquella que está formada por una sola fila y cualquier número de columnas.

Ejemplo 3.9

- Caso general (1 fila y n columnas).

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})_{1 \times n}$$

- Caso particular (1 fila y 3 columnas).

$$B = (-2 \quad 3 \quad 0)_{1 \times 3}$$

Matriz Vector columna: es aquella que está formada por una sola columna y cualquier número de filas.

Ejemplo 3.10

- Caso general (m f. y 1 c.)
- Caso particular (4 f. y 1 c.)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

(m f. y 1 c.) = (m filas y 1 columnas)

(4 f. y 1 c.) = (4 filas y 1 columnas)

Matriz cuadrada: es aquella en la cual el número de filas es igual al número de columnas.

Ejemplo 3.11

(n f. y n c.) = (n filas y n columnas)
Matriz cuadrada de orden $n \times n$.

(3 f. y 3 c.) = (3 filas y 3 columnas)
Matriz cuadrada de orden 3×3 .

Las matrices que no son cuadradas suelen llamarse matrices rectangulares.

En particular, si, la matriz A es de orden 3×3 se puede denotar $A_{3 \times 3}$ o simplemente por A_3 .

- Caso general (n f. y n c.)
- Caso particular (3 f. y 3 c.)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -5 \\ 0 & 3 & -2 \\ \pi & 1 & e \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ e & \sqrt[5]{7} \\ \pi & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 2}; \text{ la matriz } C \text{ es } \mathbf{no\ cuadrada} \text{ de orden } 3 \times 2.$$

Observaciones:

- Una matriz cuadrada $A_{n \times n}$ puede denotarse simplemente por A_n .
- En una matriz cuadrada los elementos a_{ij} donde $i = j$ conforman la llamada **diagonal principal**.

Matriz Diagonal: es una matriz cuadrada en la cual todos sus elementos son ceros, excepto al menos uno de su diagonal principal.

Ejemplo 3.12

En el ejemplo 3.12, A es matriz cuadrada de orden $n \times n$ además al menos uno de los elementos de la diagonal principal es diferente de cero.

Caso general.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Casos particulares.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

Matriz Escalar: es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo 3.13

Caso general.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Casos particulares.

$$B = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

En la matriz A del ejemplo 3.13 los elementos de la diagonal principal son diferentes de cero.

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} \neq 0$$

Por lo general, la matriz Identidad se designa con la letra "I" y el subíndice que especifica el orden.

I_n es una matriz identidad de orden $n \times n$.

Recordar:

- Toda I_n es cuadrada.
- Toda I_n es escalar.
- Toda I_n cumple que $A \times I = A$ e $I \times A = A$, siempre y cuando estos productos puedan efectuarse.

Matriz Unidad o Identidad: es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

Ejemplo 3.14

Caso general.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Casos particulares.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} ;$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

Matriz Cero o Matriz Nula: es aquella matriz donde todos sus elementos son iguales a cero.

La matriz nula puede ser de cualquier orden. Por lo general se designa con la letra "O" y el subíndice que indica su orden.

Ojo que $A \times B = O$, no significa que $A = O$ ó $B = O$, donde O es la matriz nula.

A los primeros elementos distintos de cero en cada fila de una matriz se les conoce como elementos distinguidos (en los ejemplos se presentan en recuadros sombreados).

Ejemplo 3.15

Casos generales.

Matriz cuadrada.

$$O_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Matriz rectangular.

$$O_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Casos particulares.

Matriz rectangular.

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Matriz cuadrada.

$$O_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

Matriz Escalonada: Una matriz se encuentra en forma escalonada si se cumplen las condiciones siguientes:

- Si posee filas donde todos sus elementos son iguales a cero, estas aparecen al final.
- La cantidad de elementos iguales a cero situados a la izquierda del primer elemento no cero (elemento distinguido), en cada fila, aumenta fila por fila.

Ejemplo 3.16

Las siguientes son matrices escalonadas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -15 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las siguientes son ejemplos de matrices **no escalonadas**:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Canónica: es una matriz escalonada cuyos elementos distinguidos son los únicos diferentes de cero en su respectiva columna y además son todos iguales a 1.

Importante:

La matriz identidad es un caso particular de matriz canónica (ver matriz I_3 y I_4 del ejemplo 3.14).

Ejemplo 3.17

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Traspuesta: es aquella matriz que resulta de intercambiar las filas a columnas y las columnas a filas, de una matriz dada. Se denota por A^T a la traspuesta de la matriz A .

Es importante observar que en la transposición de matrices los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ siempre mantienen su posición en la matriz traspuesta. Para el ejemplo 3.18 dichos elementos son: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$, $a_{33} = 4$.

Ejemplo 3.18

Dada la matriz.

Caso general.

Recordar: $(A^T)^T = A$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Caso particular.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{5} \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{4 \times 3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ \sqrt{5} & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

Matriz Simétrica: es la matriz que cumple la condición $A = A^t$.

Ejemplo 3.19

Matrices simétricas.

Caso general.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Con $a_{ij} = a_{ji}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ y $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Caso particular.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Matriz triangulas superior y matriz triangular inferior: una matriz cuadrada es llamada matriz triangular superior (inferior) si todos los elementos abajo (arriba) de la diagonal principal son iguales a cero.

Ejemplo 3.20

Triangular superior.

Caso general.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Caso particular.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior.

Caso general.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Caso particular.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa: una matriz cuadrada A^{-1} es llamada inversa de otra matriz A , si se verifica que: $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$, donde I es la matriz unidad (identidad).

En estos casos se dice que: A^{-1} es la inversa de A , o bien A es la inversa de A^{-1} .

Recuerda:

- Si una matriz es rectangular no tiene inversa.
- No todas las matrices cuadradas tienen inversa.
- Si una matriz cuadrada tiene inversa, entonces dicha matriz es única.

3.3 Operaciones con matrices

Las matrices tienen muchos usos en matemáticas y ciencias, para la mayor parte de estas aplicaciones, es esencial poseer un conocimiento sobre operaciones entre matrices. Al igual que los números reales, las matrices pueden operarse, dentro de las operaciones a tomar en cuenta en esta sección están la suma, resta y multiplicación.

3.3.1 Suma y resta de matrices

La suma de matrices es conmutativa:

$$A + B = B + A$$

La suma de matrices es asociativa:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

La resta de matrices NO es conmutativa:

$$A - B \neq B - A$$

Para poder realizar la operación suma o resta de matrices es necesario que estas sean del mismo orden y se operan elementos que ocupan las mismas posiciones en las matrices que se están operando, el resultado es una matriz del mismo orden.

Sean A y B dos matrices de orden $m \times n$, la suma o resta de matrices se define como:

$$\begin{aligned} A_{m \times n} \pm B_{m \times n} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Simbólicamente:

La matriz $C_{m \times n} = A_{m \times n} \pm B_{m \times n}$ donde $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Ejemplo 3.21

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ Calcular:

- $C = A + B$
- $D = A - B$

Solución

Primero se verifica que ambas matrices posean el mismo orden y en este caso ambas son de orden 2×2 , entonces es posible realizar las operaciones suma y resta.

- $C = A + B$
$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+3 & -1+2 \\ 7+7 & 3+(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $D = A - B$
$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4-3 & -1-2 \\ 7-7 & 3-(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.22

Encontrar la matriz $A - B$, si.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & \sqrt{2} \\ -3 & e & 0 \\ \pi & 6 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 7 \\ 3 & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

Cuando la operación entre elementos no sea un valor concreto se puede realizar una aproximación o simplemente dejarse representada.

$$\pi - 3 \approx 0.14$$

Solución

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & \sqrt{2} \\ -3 & e & 0 \\ \pi & 6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 7 \\ 3 & \pi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - (-1) & 5 - 2 & \sqrt{2} - 0 \\ -3 - 2 & e - 2 & 0 - 7 \\ \pi - 3 & 6 - \pi & -3 - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & \sqrt{2} \\ -5 & e - 2 & -7 \\ \pi - 3 & 6 - \pi & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.23

Determinar los valores de las variables, tal que la siguiente ecuación matricial sea verdadera:

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2y \\ x & 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución

Primero se realiza la operación del lado izquierdo.

$$\begin{pmatrix} 3 + (-2) & x + (-2y) \\ y + x & z + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x - 2y \\ y + x & 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices.

$$\begin{array}{c|c} 1 = 1 & x - 2y = -1 \\ \hline y + x = 5 & 4z = 8 \end{array}$$

Encontrando los valores de las variables.

Para z

$$4z = 8$$

$$z = \frac{8}{4}$$

$$z = 2$$

Para encontrar los valores de x y y , se procede a resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + x = 5 \end{cases}$$

Restando la ecuación 1 de la 2.

$x + y = 5$	Sustituyendo $y = 2$ en
$x - 2y = -1$ (-)	ecuación 2
<hr/>	
$3y = 6$	
$y = \frac{6}{3}$	$2 + x = 5$
$y = 2$	$x = 5 - 2$
	$x = 3$

Entonces los valores buscados son: $x = 3$, $y = 2$, $z = 2$.

3.3.2 Multiplicación de una constante por una matriz

La multiplicación de una matriz por un número real diferente de cero, siempre es posible y el resultado es una matriz con dimensiones iguales a la matriz que se está multiplicando.

Sean $k \in R$ y A una matriz de orden $m \times n$, el producto de la constante k por la matriz A se define como:

Para realizar el producto de una constante por una matriz, la constante se multiplica por cada uno de los elementos de la matriz, resultando una matriz del mismo orden a la matriz inicial.

$$k * A_{m \times n} = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Simbólicamente:

La matriz $C_{m \times n} = k * A_{m \times n}$ donde $c_{ij} = k * a_{ij}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Ejemplo 3.24

Sea $k = 2$ y $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ calcular $C = kA$.

Solución

$$C = kA$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4(2) & -1(2) \\ 7(2) & 3(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.26

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, calcular $C = -3A$.

Solución

$$\begin{aligned}C &= -3A \\&= -3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 3(-3) & -1(-3) \\ 0(-3) & 4(-3) \\ -3(-3) & 5(-3) \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 0 & -12 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.26 (Aplicación)

Una cadena de tiendas de electrónicos posee dos almacenes. En noviembre las ventas de laptops (L), tablet (T) y celulares (C) en los dos almacenes estuvieron dados por:

$$\begin{array}{l} \text{Almacén 1} \\ \text{Almacén 2} \end{array} \begin{matrix} L & T & C \\ \begin{pmatrix} 35 & 75 & 100 \\ 40 & 50 & 150 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Si la gerencia establece como meta incrementar las ventas en un 60% para el mes de diciembre sobre las ventas del mes anterior, ¿Cuál es la matriz que representa las ventas proyectadas?

Solución

Como la gerencia establece que las ventas aumenten en un 60% sobre las ventas del mes anterior, entonces para calcular el 60% de cada artículo, se debe multiplicar 0.6 por la cantidad de cada artículo, además se debe sumar las ventas del mes,

es decir, el 100% de cada artículo, es decir 1.0, que es equivalente a multiplicar la matriz por 1.6.

60% de las ventas + Ventas del mes = proyección de ventas

$$0.60 \begin{pmatrix} 35 & 75 & 100 \\ 40 & 50 & 150 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 & 75 & 100 \\ 40 & 50 & 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 120 & 160 \\ 64 & 80 & 240 \end{pmatrix}$$

De igual forma.

$$1.60 \begin{pmatrix} 35 & 75 & 100 \\ 40 & 50 & 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 120 & 160 \\ 64 & 80 & 240 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.27

Encontrar la matriz A , que satisfaga la ecuación matricial siguiente.

$$2A - 3 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se debe tomar en cuenta que la variable en mención en el ejemplo 3.27 es la matriz a encontrar.

Solución

Este problema será abordado de dos formas diferentes.

Forma 1:

Se abordará resolviendo la ecuación como si se tratase de una ecuación de primer grado.

Paso 1: Se traslada a un lado de la igualdad lo que tiene variable y al otro lado de la igualdad lo que no posee variable.

$$2A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Se Realizan las operaciones matriciales inmediatas.

$$2A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ 3 & 9 & 15 \\ -12 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 19 & -5 & 4 \\ 1 & 15 & 12 \\ -10 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Se multiplican ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de la constante que acompaña a la variable (matriz A) para este caso $1/2$.

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 19 & -5 & 4 \\ 1 & 15 & 12 \\ -10 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{19}{2} & \frac{-5}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 6 \\ -5 & -2 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Forma 2:

En este método primero se escribe la matriz A que debe ser de orden 3×3 , para poder efectuar la resta de matrices, es decir que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se sustituye este resultado en la ecuación y se efectúan las operaciones de matrices indicadas así:

$$2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ 3 & 9 & 15 \\ -12 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} - 12 & 2a_{12} + 6 & 2a_{13} \\ 2a_{21} - 3 & 2a_{22} - 9 & 2a_{23} - 15 \\ 2a_{31} + 12 & 2a_{32} + 3 & 2a_{33} - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices se obtienen las ecuaciones las cuales generan los elementos de la matriz A:

$2a_{11} - 12 = 7$ $2a_{11} = 19$ $a_{11} = \frac{19}{2}$	$2a_{12} + 6 = 1$ $2a_{12} = -5$ $a_{12} = -\frac{5}{2}$	$2a_{13} = 4$ $a_{13} = 2$
$2a_{21} - 3 = -2$ $2a_{21} = 1$ $a_{21} = \frac{1}{2}$	$2a_{22} - 9 = 6$ $a_{22} = 15$ $a_{22} = \frac{15}{2}$	$2a_{23} - 15 = -3$ $2a_{23} = 12$ $a_{23} = 6$
$2a_{31} + 12 = 2$ $2a_{31} = -10$ $a_{31} = -5$	$2a_{32} + 3 = -1$ $2a_{32} = -4$ $a_{32} = -2$	$2a_{33} - 6 = 3$ $2a_{33} = 9$ $a_{33} = \frac{9}{2}$

De donde, la matriz A buscada es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{19}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 6 \\ -5 & -2 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

3.3.3 Multiplicación de matrices.

La multiplicación de matrices con el objetivo de facilitar su comprensión se definirá primero para matrices de orden 2×2 y luego se generalizará para matrices de orden $m \times n$.

Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, dos matrices de orden 2, el producto $A \times B$ se define como:

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

El primer elemento de $A \times B$, se obtiene sumando los productos de los elementos de la fila 1 de A con los elementos de la columna 1 de B .

Es decir:

$$\begin{aligned} (ab)_{11} &= (\text{fila 1 de } A)(\text{columna 1 de } B) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ab)_{12} &= (\text{fila 1 de } A)(\text{columna 2 de } B) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ab)_{21} &= (\text{fila 2 de } A)(\text{columna 1 de } B) \\ &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ab)_{22} &= (\text{fila 2 de } A)(\text{columna 2 de } B) \\ &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.28

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, calcular:

a) $C = A \times B$

b) $D = B \times A$

Solución

a) $C = A \times B$

$$c_{11} = (\text{fila 1 de } A)(\text{columna 1 de } B)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1(3) + (-3)(2) = 3 - 6 = -3$$

$$c_{12} = (\text{fila 1 de } A)(\text{columna 2 de } B)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = 1(7) + (-3)(-4) = 7 + 12 \\ = 19$$

$$c_{21} = (\text{fila 2 de } A)(\text{columna 1 de } B)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2(3) + 5(2) = 6 + 10 = 16$$

$$c_{22} = (\text{fila 2 de } A)(\text{columna 2 de } B)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = 2(7) + 5(-4) = 14 - 20 = -6$$

De dónde.

$$C = A \times B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 19 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b) } D = B \times A$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(1) + 7(2) & 3(-3) + 7(5) \\ 2(1) + (-4)(2) & 2(-3) + (-4)(5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 14 & -9 + 35 \\ 2 - 8 & -6 - 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 & 26 \\ -6 & -26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se puede notar que $A \times B \neq B \times A$, el producto de matrices generalmente NO es conmutativo.

Ejemplo 3.29

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, calcular $A \times B$.

Solución

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0(0) + 0(0) & 0(0) + 0(-4) \\ 2(0) + 0(0) & 2(0) + 0(-4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siguiendo la misma idea se estudiará el producto de dos matrices de cualquier orden.

Sean las matrices $A_{m \times p}$ y $B_{q \times n}$, el producto $A \times B$ podrá realizarse siempre y cuando $p = q$ es decir siempre que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de

En el ejemplo 3.29 puede observarse que la matriz resultante es la matriz nula, sin embargo, las matrices que se multiplican son ambas diferentes de la matriz nula.

Es decir, $A \times B = 0$ sin embargo $A \neq 0 \wedge B \neq 0$.

Potencias

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A \times A \times A$$

$$A^4 = A \times A \times A \times A$$

⋮

Matriz Involutiva

$$A^2 = I$$

Matriz Nilpotente

$$A^k = 0$$

Para un $k \in \mathbb{N}$

Matriz Idempotente

$$A^2 = A$$

filas de la matriz B y el resultado será una matriz C de orden $m \times n$ donde el elemento c_{ij} es el producto de la fila i de A con la columna j de B . Es decir:

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A)(\text{columna } j \text{ de } B) = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

Si el número de columnas de la matriz A no coincide con el número de filas de la matriz B ($p \neq q$), el producto $A \times B$ no es posible.

Ejemplo 3.30


Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, calcular:

a) $C = A \times B$

b) $D = B \times A$

Solución

a) Recordar que para poder efectuar el producto el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B .


Como A es de orden 3×2 y B es de orden 2×2 se cumple que $p = q = 2$, lo cual significa que se puede realizar el producto y la matriz resultante será de orden 3×2 .

$$C = A \times B$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0(2) + (-1)(1) & 0(7) + (-1)(-4) \\ -3(2) + 2(1) & -3(7) + 2(-4) \\ 1(2) + 4(1) & 1(7) + 4(-4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 - 1 & 0 + 4 \\ -6 + 2 & -21 - 8 \\ 2 + 4 & 7 - 16 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -29 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) $D = B \times A$, no es posible, ya que la matriz B es de orden 2×2 y la matriz A es de orden 3×2 , de donde $p = 2$ y $q = 3$ es decir $p \neq q$.

Ejemplo 3.31

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, calcular $A \times B$.

Solución

La matriz A es de orden 2×4 y la matriz B es de orden 4×2 se cumple que $p = q = 4$, lo que significa es que se puede realizar el producto y la matriz resultante será de orden 2×2 .

$$\begin{aligned}
A \times B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1(3) + (-1)(2) + 5(-1) + 3(-2) & 1(1) + (-1)(5) + 5(2) + 3(1) \\ 0(3) + 3(2) + 2(-1) + (-1)(-2) & 0(1) + 3(5) + 2(2) + (-1)(1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 - 2 - 5 - 6 & 1 - 5 + 10 + 3 \\ 0 + 6 - 2 + 2 & 0 + 15 + 4 - 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sera posible el producto $B \times A$ del ejemplo 3.31?

3.3.4 Propiedades de las operaciones con matrices.

Sean las matrices A, B y C de orden $m \times n$ y $\alpha, \beta \in R$, cuando el orden es compatible, se cumplen las propiedades siguientes:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$

2. $A + 0 = 0 + A = A$

3. $A + (-A) = 0$

4. $A + B = B + A$

5. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

6. $I \times A = A \wedge A \times I = A$

7. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$

8. $C \times (A + B) = C \times A + C \times B$

9. $A \times B = 0$, no implica que $A = 0 \vee B = 0$

10. $A \times B = A \times C$, no implica que $B = C$

11. $(\alpha + \beta)C = \alpha C + \beta C$

12. $(\alpha\beta)C = \alpha(\beta C)$

Nota: 0 es la matriz nula.

Una **matriz elemental** es aquella que se obtiene al realizar una única operación elemental de fila sobre una matriz identidad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ojo las operaciones que se realizan con las filas, también se pueden realizar con las columnas.

3.4 Matrices equivalentes

Antes de poder verificar si dos o más matrices son equivalentes, es necesario conocer las operaciones que pueden realizarse con las filas o columnas de una matriz, las cuales están sustentadas por las operaciones entre matrices.

3.4.1 Operaciones elementales entre filas.

Dada una matriz A cualquiera, se pueden realizar las siguientes operaciones elementales entre filas:

- a) Intercambiar dos filas cualesquiera entre sí, simbólicamente: $f_i \leftrightarrow f_j$.

Ejemplo 3.32

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, intercambiar la fila número 1 con la fila número 3.

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Se puede observar que la matriz B se obtiene a partir de la matriz A , intercambiando la fila número 1 con la fila número 3, es decir, la fila número 1 pasa a ser la fila número 3 y viceversa.

b) Una fila cualquiera se puede multiplicar por una constante diferente de cero, simbólicamente: $kf_i \rightarrow f_i$, para $k \in R \wedge k \neq 0$.

Ejemplo 3.33

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, intercambiar la fila número 2 por la fila número 2 multiplicada por 2.

$$f_2 = (-3 \quad -1 \quad 0)$$

$$\begin{aligned} 2f_2 &= 2(-3 \quad -1 \quad 0) \\ &= (-3(2) \quad -1(2) \quad 0(2)) \\ &= (-6 \quad -2 \quad 0) \end{aligned}$$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_2 \rightarrow f_2} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = B$$

c) Una fila cualquiera puede ser sustituida por ella misma más un múltiplo de otra fila, simbólicamente: $f_i + kf_j \rightarrow f_i$.

Ejemplo 3.34

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, intercambiar la fila número 1 por la fila número 1 más la fila número 3 multiplicada por 2.

$$f_3 = (1 \quad 3 \quad 2)$$

$$\begin{aligned} 2f_3 &= 2(1 \quad 3 \quad 2) \\ &= (1(2) \quad 3(2) \quad 2(2)) \\ &= (2 \quad 6 \quad 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 + 2f_3 &= (4 \quad 2 \quad 1) + (2 \quad 6 \quad 4) \\ &= (4+2 \quad 2+6 \quad 1+4) \\ &= (6 \quad 8 \quad 5) \end{aligned}$$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 + 2f_3 \rightarrow f_1} \sim \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = B$$

Esta última operación elemental entre filas, se puede expresar generalizar de la forma siguiente: $kf_i + lf_j \rightarrow f_i$ con $k, l \neq 0$;

es decir, un múltiplo de una fila cualquiera (kf_i) más el múltiplo de otra fila (lf_j) puede sustituir a dicha fila (f_i).

3.4.2 Matrices equivalentes.

Las matrices equivalentes son importantes para resolver sistemas de ecuaciones utilizando matrices, cálculo de matrices inversas, cálculo de determinantes, entre otros aspectos.

$A \sim B$ "A es equivalente a B"

Se dice que las matrices A y B son equivalentes, que se denota $A \sim B$, si B se obtiene a partir de A mediante operaciones elementales entre filas.

En los ejemplos 3.32, 3.33 y 3.34 se puede observar que la matriz $A \sim B$, ya que B se obtiene de A mediante una operación elemental entre filas.

Ejemplo 3.35

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, determinar una matriz equivalente a la matriz A , en su forma identidad.

Solución

Primero se necesita que el elemento en la posición a_{21} (fila 2, columna 1) sea igual a cero, para lo cual se realiza la operación elemental entre filas $f_2 - 3f_1 \rightarrow f_2$ así:

$$\begin{aligned} f_2 - 3f_1 &= (3 \ 1) - 3(1 \ -2) \\ &= (3 \ 1) - (3 \ -6) \\ &= (0 \ 7) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} f_2 - 3f_1 \rightarrow f_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$7f_1 - (-2)f_2 = 7f_1 + 2f_2$$

$$\begin{aligned} 7f_1 + 2f_2 &= 7(1 \ -2) + 2(0 \ 7) \\ &= (7 \ -14) + (0 \ 14) \\ &= (7 \ 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}f_1 &= \frac{1}{7}(7 \ 0) \\ &= (1 \ 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}f_2 &= \frac{1}{7}(0 \ 10) \\ &= (0 \ 1) \end{aligned}$$

Luego se necesita que el elemento en la posición a_{12} (fila 1, columna 2) sea igual cero, para esto se realiza la operación elemental entre filas: $7f_1 - (-2)f_2 \rightarrow f_1$ así:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{7f_1 - (-2)f_2 \rightarrow f_1} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

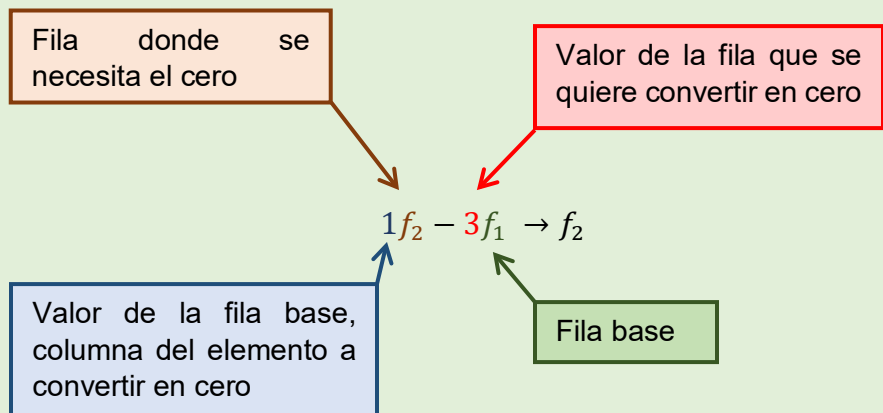
Para finalizar se necesita que los elementos a_{11} y a_{22} sean iguales a uno, para lo cual se hará $\frac{1}{7}f_1 \rightarrow f_1$ para el a_{11} , y $\frac{1}{7}f_2 \rightarrow f_2$ para el a_{22} así:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{7}f_1 \rightarrow f_1 \\ \frac{1}{7}f_2 \rightarrow f_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

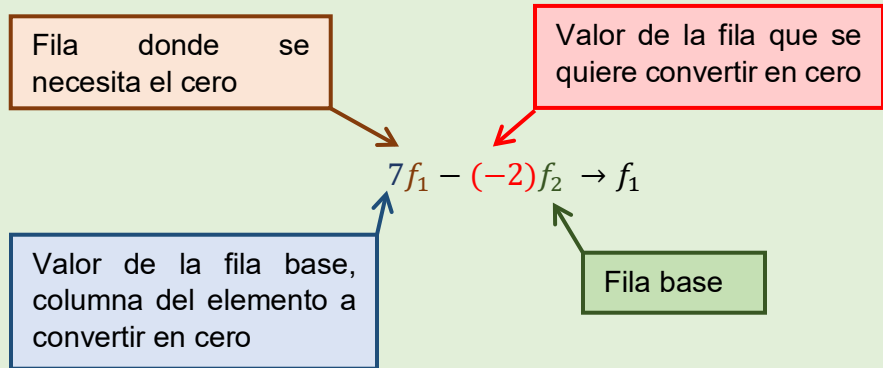
De donde

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que cuando se necesite lograr un cero en una posición determinada de una matriz se puede hacer en cualquier orden sin ningún inconveniente, pero si se requiere en la columna i se toma como base la fila i , supóngase que se requiere hacer un cero en la columna 1 se toma como base la fila 1 y se opera con la fila donde se necesite el valor que se quiere hacer cero de la forma siguiente:



Luego de la misma forma para la columna 2 tomando como base la fila 2 y operándola con la fila donde necesitamos el valor de cero:



El esquema anterior facilita los cálculos.

Ejemplo 3.36

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ determinar una matriz equivalente a la matriz A , en su forma diagonal.

Solución

Primero se debe recordar que la matriz diagonal es aquella donde todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son iguales a cero.

Ahora se tiene que convertir en cero el elemento en la posición a_{21} (fila 2, columna 1), para lo cual se realiza la operación elemental entre filas $f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2$ así:

$$\begin{aligned} f_2 - 2f_1 &= (2 \ 3 \ 2) - 2(1 \ 2 \ -1) \\ &= (2 \ 3 \ 2) - (2 \ 4 \ -2) \\ &= (0 \ -1 \ 4) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Convertir en cero el elemento en la posición a_{31} (fila 3, columna 1), para lo cual se realiza la operación elemental entre filas $f_3 - (-2)f_1 \rightarrow f_3$ así:

$$\begin{aligned} f_3 - (-2)f_1 &= f_3 + 2f_1 \\ &= (-2 \quad -1 \quad 5) + 2(1 \quad 2 \quad -1) \\ &= (-2 \quad -1 \quad 5) + (2 \quad 4 \quad -2) \\ &= (0 \quad 3 \quad 3) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - (-2)f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Convertir en cero el elemento en la posición a_{12} (fila 1, columna 2), para lo cual se realiza la operación elemental entre filas $-1f_1 - 2f_2 \rightarrow f_1$ así:

$$\begin{aligned} -1f_1 - 2f_2 &= -(1 \quad 2 \quad -1) - 2(0 \quad -1 \quad 4) \\ &= (-1 \quad -2 \quad 1) - (0 \quad -2 \quad 8) \\ &= (-1 \quad 0 \quad -7) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1f_1 - 2f_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Convertir en cero el elemento en la posición a_{32} (fila 3, columna 2), para lo cual se realiza la operación elemental entre filas $-1f_3 - 3f_2 \rightarrow f_3$ así:

$$-1f_3 - 3f_2 = -(0 \quad 3 \quad 3) - 3(0 \quad -1 \quad 4)$$

$$\begin{aligned}
 &= (0 \quad -3 \quad -3) - (0 \quad -3 \quad 12) \\
 &= (0 \quad 0 \quad -15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1f_3 - 3f_2 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

Convertir en cero el elemento en la posición a_{13} (fila 1, columna 3), para lo cual se realiza la operación elemental entre filas $-15f_1 - (-7)f_3 \rightarrow f_1$ así:

$$\begin{aligned}
 -15f_1 - (-7)f_3 &= -15f_1 + 7f_3 \\
 &= -15(-1 \quad 0 \quad -7) + 7(0 \quad 0 \quad -15) \\
 &= (15 \quad 0 \quad 105) + (0 \quad 0 \quad -105) \\
 &= (15 \quad 0 \quad 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{-15f_1 - (-7)f_3 \rightarrow f_1} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

Convertir en cero el elemento en la posición a_{23} (fila 2, columna 3), para lo cual se realiza la operación elemental entre filas $-15f_2 - 4f_3 \rightarrow f_2$ así:

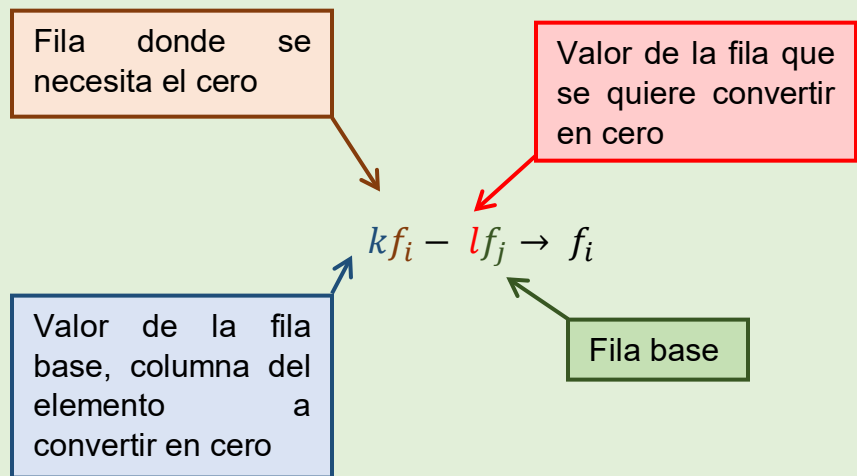
$$\begin{aligned}
 -15f_2 - 4f_3 &= -15(0 \quad -1 \quad 4) - 4(0 \quad 0 \quad -15) \\
 &= (0 \quad 15 \quad -60) - (0 \quad 0 \quad -60) \\
 &= (0 \quad 15 \quad 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{-15f_2 - 4f_3 \rightarrow f_2} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

De donde

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

De forma general, si se necesita un cero en la posición a_{ij} (fila i , columna j) se puede obtener mediante la operación entre filas:



Cuando se realizan operaciones de esta forma ya se tendrá claro por qué número multiplicar cada una de dichas filas, sobre esta base se ha desarrollado un algoritmo llamado **método del pivote**.

3.4.3 Método del pivote para matrices.

El método del pivote para matrices es un algoritmo el cual se fundamenta en la operación elemental entre filas utilizado, en el apartado anterior $kf_i - lf_j \rightarrow f_i$, y permite obtener una matriz equivalente a la matriz original, en su forma diagonal. Se ilustrará para matrices de orden 2, luego en general, para matrices de $m \times n$.

Algoritmo del método del pivote para matrices de orden 2.

Pasos.

1. Se toma como pivote el elemento a_{11} (si este elemento fuese igual a cero primero se realiza la operación de cambio de fila).
2. La fila del pivote no cambia, solo se escribe.
3. El otro elemento en la columna del pivote se convierte en cero.
4. El elemento que hace falta se calcula restando los productos cruzados comenzando por el pivote.
5. Se toma como elemento pivote el nuevo a_{22} y se repiten los pasos del 2 al 4.

Para indicar el elemento pivote se escribe entre paréntesis.

Ejemplo 3.37

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, determinar una matriz equivalente a la matriz A , en su forma diagonal.

Solución

Paso 1: Se toma el pivote a_{11} .

$$\begin{pmatrix} (4) & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Paso 2: La fila del pivote no cambia, solo se escribe.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ & \end{pmatrix}$$

Paso 3: El otro elemento en la columna del pivote se convierte en cero.

Producto cruzado.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$4(5) - 3(-2) = 20 + 6 \\ = 26$$

Producto cruzado.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$$

$$26(4) - 0(-2) = 104 + 0 \\ = 104$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Paso 4: El elemento que hace falta se calcula restando los productos cruzados comenzando por el pivote.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$$

Paso 5: Se toma como elemento pivote el nuevo a_{22} y se repiten los pasos del 2 al 4.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & (26) \end{pmatrix}$$

Paso 2: La fila del pivote no cambia, solo se escribe.

$$\begin{pmatrix} 0 & 26 \end{pmatrix}$$

Paso 3: El otro elemento en la columna del pivote se convierte en cero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$$

Paso 4: El elemento que hace falta se calcula restando los productos cruzados comenzando por el pivote.

$$\begin{pmatrix} 104 & 0 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$$

De dónde:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 104 & 0 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.38

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, determinar una matriz equivalente a la matriz A , en su forma diagonal.

Solución

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

De donde

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

Al aplicar el método del pivote se pueden sintetizar pasos para que el uso del mismo sea más eficiente.

Algoritmo del método del pivote para matrices de orden $m \times n$.

Los elementos pivotes serán aquellos que se encuentren en las posiciones $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$

Pasos.

1. Se toma como primer elemento pivote a_{11} .
2. La fila del pivote no cambia, solo se escribe.
3. Los demás elementos en la columna del pivote se hacen cero.
4. En el resto de elementos se escriben todas las posibles matrices de orden 2 que contienen: el elemento pivote, el elemento de la posición a calcular y los elementos que se

Es importante recordar que el elemento pivote no puede ser cero, si esto ocurre se tiene que realizar la operación elemental de intercambiar la fila del pivote cero con otra fila que se encuentre en la parte inferior, de tal forma que el pivote sea diferente de cero.

ubican en la intersección de las filas y columnas del pivote y el elemento a calcular.

5. Se restan los productos cruzados comenzando por el pivote.
6. Se toma el siguiente elemento pivote y se repiten los pasos del 2 al 5
7. El proceso termina cuando se han utilizado todos los elementos pivotes.

Ejemplo 3.39

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ determinar una matriz equivalente a la matriz A , en su forma diagonal.

Solución

Tomando el pivote $a_{11} = 1$.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 4 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \color{red}{1} & -2 & 3 \\ 0 & \left| \begin{array}{cc} \color{red}{1} & -2 \\ 2 & 0 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \color{red}{1} & 3 \\ 2 & 7 \end{array} \right| \\ 0 & \left| \begin{array}{cc} \color{red}{1} & -2 \\ 4 & -3 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \color{red}{1} & 3 \\ 4 & 9 \end{array} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Tomando el pivote $a_{22} = 4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & \color{red}{4} & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} \color{red}{4} & 0 \\ -2 & 1 \end{array} \right| & 0 & \left| \begin{array}{cc} \color{red}{4} & 1 \\ -2 & 3 \end{array} \right| \\ 0 & \color{red}{4} & 1 \\ \left| \begin{array}{cc} \color{red}{4} & 0 \\ 5 & 0 \end{array} \right| & 0 & \left| \begin{array}{cc} \color{red}{4} & 1 \\ 5 & -3 \end{array} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 14 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

Tomando el pivote $a_{33} = -17$.

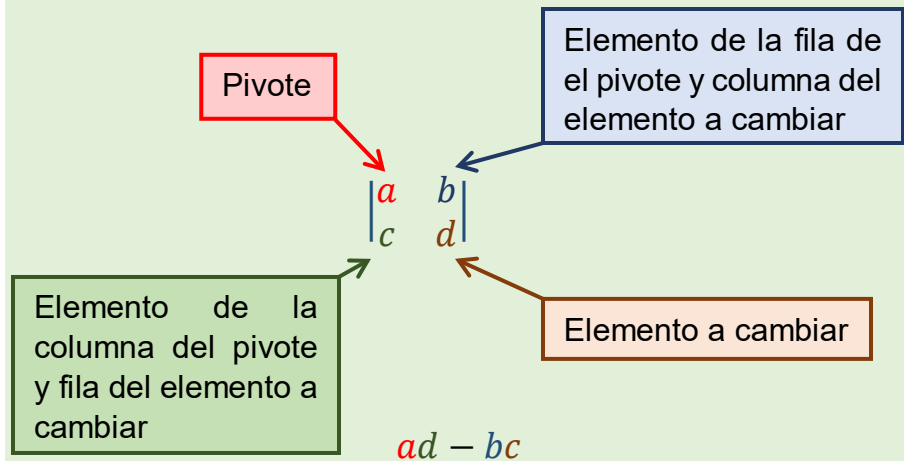
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 14 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & (-17) \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} -17 & 0 & -17 & 0 & 0 \\ 14 & 4 & 14 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & -17 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 4 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

Recordar la estructura del producto cruzado.



Cuando se han terminado los cálculos para un pivote, una fila puede ser dividida por un número con el propósito de obtener cantidades más pequeñas, con esto se logran facilitar los cálculos, ya que es más fácil operar cantidades pequeñas que grandes, y luego se continuará el proceso de forma normal.

Ejemplo 3.40

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ determinar una matriz

equivalente a la matriz A , en su forma diagonal.

Solución

Tomando el pivote $a_{11} = -1$.

$$\begin{pmatrix} (-1) & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 3 & -3 & 2 \\ \hline \end{array} \\ 0 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 3 & -3 & -1 \\ \hline \end{array} \\ 0 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \\ 0 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 3 & -3 & 2 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -14 & 14 & -13 \end{pmatrix}$$

Tomando el pivote $a_{22} = 2$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & (-2) & -6 & 3 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -14 & 14 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 0 \\ \hline \end{array} & 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & -6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 3 \\ \hline \end{array} \\ 0 & -2 & -6 & 3 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 0 \\ \hline \end{array} & 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & -6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 0 \\ \hline \end{array} & 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & -6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -14 & 0 \\ \hline \end{array} & 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline -14 & 14 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline -14 & -13 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 24 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -56 & 35 \\ 0 & 0 & -112 & 68 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 24 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -56 & 35 \\ 0 & 0 & -112 & 68 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-f_3 \rightarrow f_3 \\ \frac{1}{4}f_4 \rightarrow f_4}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 24 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 56 & -35 \\ 0 & 0 & -28 & 17 \end{pmatrix}$$

Tomando el pivote $a_{33} = 56$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 24 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & (56) & -35 \\ 0 & 0 & -28 & 17 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc} 56 & 0 & 56 & 0 & 0 & 56 & -35 \\ 24 & 2 & 24 & 0 & 0 & 24 & -13 \\ 56 & 0 & 56 & 0 & 0 & 56 & -35 \\ -6 & 0 & -6 & -2 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 56 & 0 & -35 \\ 56 & 0 & 56 & 0 & 0 & 56 & -35 \\ -28 & 0 & -28 & 0 & 0 & -28 & 17 \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 112 & 0 & 0 & 112 \\ 0 & -112 & 0 & -42 \\ 0 & 0 & 56 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 112 & 0 & 0 & 112 \\ 0 & -112 & 0 & -42 \\ 0 & 0 & 56 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \sim \\ \frac{1}{112}f_1 \rightarrow f_1 \\ -\frac{1}{2}f_2 \rightarrow f_2 \\ \frac{1}{7}f_3 \rightarrow f_3 \\ \frac{1}{-28}f_4 \rightarrow f_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 56 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando el pivote $a_{44} = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 56 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 21 & 56 & 21 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -5 & 0 & -5 & 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



(Karl o Carl Friedrich Gauss; Brunswick, actual Alemania, 1777 - Gotinga, id., 1855) Matemático, físico y astrónomo alemán. Nacido en el seno de una familia humilde, desde muy temprana edad Karl Friedrich Gauss dio muestras de una prodigiosa capacidad para las matemáticas (según la leyenda, a los tres años interrumpió a su padre cuando estaba ocupado en la contabilidad de su negocio para indicarle un error de cálculo), hasta el punto de ser recomendado al duque de Brunswick por sus profesores de la escuela primaria. (Fernández y Tamaro, 2004a).

3.5 Cálculo de la matriz inversa: Método de Gauss.

Como se mencionó en el apartado 3.1.3 existen algunas matrices cuadradas, las cuales cumplen la siguiente propiedad:

$$A \times B = I \quad \wedge \quad B \times A = I$$

En este caso se dirá que la matriz B es la matriz inversa de la matriz A y viceversa.

Sea A una matriz cuadrada, si existe una matriz B tal que: $A \times B = B \times A = I$ entonces se dice que B es la matriz inversa de A , y se denota por A^{-1} .

Ejemplo 3.41

La matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ es la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

ya que:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5.1 Método para calcular la inversa de una matriz. (Método de Gauss)

Este método fue desarrollado por el matemático, físico y astrónomo alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), y se siguen los siguientes pasos:

¡¡¡importante!!!

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si $ad - bc \neq 0$, entonces $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Matriz Ortogonal

$A \times A^T = I = A^T \times A$ Es decir, la transpuesta coincide con la inversa.

A las matrices que poseen inversa se les llama **matrices regulares** y las que no poseen inversa se les llama **matrices singulares**.

Si la matriz A posee inversa también la posee su transpuesta y

1. Se forma la matriz $[A : I]$, con A de orden n .
2. Se reduce $[A : I]$ a la matriz equivalente $[I : B]$. Si esto no es posible porque los primeros n elementos de alguna fila se convierten en cero, entonces la matriz A no posee inversa.
3. Si el paso dos se logra completar B será la matriz A^{-1} .

Ejemplo 3.42

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, determinar la matriz inversa a la matriz A , de ser posible.

Solución

$$[A : I] = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 26 & -3 & 4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 26 & -3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 104 & 0 & 20 & 8 \\ 0 & 26 & -3 & 4 \end{array} \right)$$

Utilizando operaciones de filas.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 104 & 0 & 20 & 8 \\ 0 & 26 & -3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{1}{104} f_1 \rightarrow f_1 \\ \sim \\ \frac{1}{26} f_2 \rightarrow f_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/26 & 1/13 \\ 0 & 1 & -3/26 & 2/13 \end{array} \right)$$

De donde:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/26 & 1/13 \\ -3/26 & 2/13 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

se cumple la siguiente relación:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Si A y B son dos matrices las cuales poseen inversa y además el producto $A \times B$ es posible entonces: $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

Ejemplo 3.43

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, determinar la inversa de la matriz A , de ser posible.

Solución

$$[A : I] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1) & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (1) & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (4) & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \frac{1}{2}f_1 \rightarrow f_1 \\ -\frac{1}{4}f_3 \rightarrow f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Utilizando operaciones de filas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \frac{1}{2}f_1 \rightarrow f_1 \\ \frac{1}{4}f_2 \rightarrow f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.44

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, determinar la inversa de la matriz A , de ser posible.

Solución

$$[A : I] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1) & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (1) & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1) & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & (-1) & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como A es una matriz de orden 3 y se observa que los primeros tres elementos de la fila 3, son todos iguales a cero, en este tipo de casos se dirá que la matriz de trabajo no posee inversa, ya que el elemento pivote que para la fila 3 tendría que ser cero, lo cual no es posible.

Que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución, significa que existen valores para las variables que satisfacen las ecuaciones, en otras palabras, que al sustituir dichos valores en cada una de las ecuaciones se obtiene una identidad.

Se puede observar que al realizar el producto de las matrices.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ dx + cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices se tiene

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

3.6 Solución de Sistema de Ecuaciones Lineales por medio de la matriz aumentada

Las matrices pueden utilizarse para obtener la solución de sistemas de ecuaciones lineales, de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas, para lo cual primero se representará un sistema de ecuaciones como un producto matricial, y luego se utilizará el método de la matriz aumentada.

3.6.1 Representación matricial de un sistema de ecuaciones

Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, este se puede representar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Dónde: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es la matriz de variables y $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ es la matriz de términos independientes.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Rightarrow AX = B$$

3.6.2 Solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Algoritmo para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

1. Se forma la matriz aumentada $[A : B]$.
2. Se determina la matriz equivalente $[I : Z]$.

3. La solución es $x = z_{11} \wedge y = z_{21}$.

Ejemplo 3.45

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 7y = 9 \end{cases}$$

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & 2:1 \\ 5 & 7:9 \end{pmatrix}$, y se aplica el método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2:1 \\ 5 & 7:9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2:1 \\ 0 & 11:22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 33 & 0:-33 \\ 0 & 11:22 \end{pmatrix}$$

Utilizando operaciones de filas.

$$\begin{pmatrix} 33 & 0:-33 \\ 0 & 11:22 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{matrix} \frac{1}{33}f_1 \rightarrow f_1 \\ \frac{1}{11}f_2 \rightarrow f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0:-1 \\ 0 & 1:2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución es: $x = -1 \wedge y = 2$.

Ejemplo 3.46: Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$$

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & -7:2 \\ 2 & 5:11 \end{pmatrix}$, y se aplica el método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 29 & 29 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 87 & 0 & 261 \\ 0 & 29 & 29 \end{pmatrix}$$

Utilizando operaciones de filas.

$$\begin{pmatrix} 87 & 0 & 261 \\ 0 & 29 & 29 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{29}f_2 \rightarrow f_2]{\frac{1}{87}f_1 \rightarrow f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución es: $x = 3 \wedge y = 1$.

3.6.3 Solución de un sistema de “n” ecuaciones lineales con “n” incógnitas:

El algoritmo para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, básicamente es el mismo para sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, con la variante que en este caso hay más variables.

1. Se forma la matriz aumentada $[A : B]$.
2. Se determina la matriz equivalente $[I : Z]$.
3. La solución es: $x_1 = z_{11}, x_2 = z_{21}, x_3 = z_{31}, \dots, x_n = z_{n1}$.

Ejemplo 3.47

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 7y - z = 8 \\ 2x + 5y + z = -1 \\ x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, y se aplica el

método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 0 & 29 & 5 & -19 \\ 0 & 10 & -5 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 0 & 29 & 5 & -19 \\ 0 & 10 & -5 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 87 & 0 & 6 & 99 \\ 0 & 29 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & -195 & -390 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 87 & 0 & 6 & 99 \\ 0 & 29 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & -195 & -390 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \frac{1}{3}f_1 \rightarrow f_1 \\ -\frac{1}{195}f_3 \rightarrow f_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 29 & 0 & 2 & 33 \\ 0 & 29 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 29 & 0 & 2 & 33 \\ 0 & 29 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 29 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 29 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizando operaciones entre filas.

$$\begin{pmatrix} 29 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 29 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \frac{1}{29}f_1 \rightarrow f_1 \\ \frac{1}{29}f_2 \rightarrow f_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución es: $x = 1$, $y = -1$ \wedge $z = 2$.

Ejemplo 3.48

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 2x - y + z + w = 0 \\ -x + 2y - 2z - w = 0 \\ x - 2y + z - 2w = -2 \\ x - y + z + w = 5 \end{cases}$$

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1: & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1: & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2: & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1: & 5 \end{pmatrix}$, y se

aplica el método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1: & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1: & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2: & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1: & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1: & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1: & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5: & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1: & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1: & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1: & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5: & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1: & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 2: & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1: & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -18: & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2: & 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 2: & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1: & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -18: & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2: & 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \frac{1}{2}f_1 \rightarrow f_1 \\ -\frac{1}{6}f_3 \rightarrow f_3 \\ \frac{1}{2}f_4 \rightarrow f_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1: & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1: & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3: & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1: & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1: & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1: & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3: & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1: & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1: & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8: & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3: & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1: & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1: & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8: & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3: & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1: & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0: & -15 \\ 0 & 3 & 0 & 0: & -114 \\ 0 & 0 & 1 & 0: & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 1: & 15 \end{pmatrix}$$

Utilizando operaciones de filas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0: & -15 \\ 0 & 3 & 0 & 0: & -114 \\ 0 & 0 & 1 & 0: & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 1: & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \frac{1}{3}f_1 \rightarrow f_1 \\ \frac{1}{3}f_2 \rightarrow f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0: & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0: & -38 \\ 0 & 0 & 1 & 0: & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 1: & 15 \end{pmatrix}$$

Donde, la solución es: $x = -5$, $y = -38$, $z = -43 \wedge w = 15$.

3.6.4 Solución de un sistema de “m” ecuaciones lineales con “n” incógnitas.

En los casos abordados hasta el momento el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas, es decir en ambos casos la matriz de coeficientes es cuadrada.

Ahora se abordarán los casos cuando se tiene un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es decir, el número de ecuaciones no coincide con el número de incógnitas, aquí la matriz de coeficientes no será cuadrada, esto cambia un poco el algoritmo de solución de dicho sistema de ecuaciones. En lugar de hablar de una matriz equivalente en su forma identidad ($[I : Z]$) se dirá en su forma escalonada ($[E : Z]$) y se toma el sistema de ecuaciones asociado a esta matriz.

Ejemplo 3.49

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 7y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, y se aplica el método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 & 5 \\ 0 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 60 & 0 & 75 & 240 \\ 0 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$$

Utilizando operaciones de filas.

$$\begin{pmatrix} 60 & 0 & 75:240 \\ 0 & 20 & 5:20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{array}{l} \frac{1}{60}f_1 \rightarrow f_1 \\ \frac{1}{20}f_2 \rightarrow f_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/4:4 \\ 0 & 1 & 1/4:1 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} x + 0y + \frac{5}{4}z = 4 \\ 0x + y + \frac{1}{4}z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{5}{4}z \\ y = 1 - \frac{1}{4}z \end{cases}$$

Es decir, el sistema tiene múltiples soluciones.

Para determinar una solución particular, se toma un valor cualquiera para $z = 4$ y luego se sustituye en las dos ecuaciones obteniendo:

$$\begin{cases} x = 4 - \frac{5}{4}z \\ y = 1 - \frac{1}{4}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{5}{4}(4) \\ y = 1 - \frac{1}{4}(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Para este caso, la solución es: $x = -1, y = 0 \wedge z = 4$.

Para $z = 0$ y luego se sustituye en las dos ecuaciones obteniendo:

$$\begin{cases} x = 4 - \frac{5}{4}z \\ y = 1 - \frac{1}{4}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{5}{4}(0) \\ y = 1 - \frac{1}{4}(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Para este caso, la solución es: $x = 4, y = 1 \wedge z = 0$.

De esta forma se pueden calcular más soluciones particulares.

Ejemplo 3.50

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + 2y = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Si al final de realizar operaciones entre filas el sistema asociado a la matriz equivalente expresa una relación falsa, eso significa que el sistema no tiene solución.

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, y se aplica el

método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -9 \\ 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -9 \\ 0 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 24 & 0 & 15 \\ 0 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} 24x + 0y = 15 \\ 0x + 8y = -9 \\ 0x + 0y = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x = 15 \\ 8y = -9 \\ 0 \neq -36 \end{cases}$$

La tercera ecuación resulta ser algo falso, en consecuencia, se concluye que el sistema no tiene solución.

Ejemplo 3.51

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + 2y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, y se aplica el

método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -9 \\ 0 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -9 \\ 0 & -8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 24 & 0 & 15 \\ 0 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} 24x + 0y = 15 \\ 0x + 8y = -9 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x = 15 \\ 8y = -9 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5/8 \\ y = -9/8 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La tercera ecuación resulta ser verdadera, con esto se concluye puede concluir que este sistema tiene solución la cual es: $x = \frac{5}{8} \wedge y = -9/8$.

Ejemplo 3.52

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 7y - z = 8 \\ 2x + 5y + 2z = -1 \\ 5x - 2y + z = 7 \end{cases}$$

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, y se aplica el

método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 0 & 29 & 8 & -19 \\ 0 & 29 & 8 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 0 & 29 & 8 & -19 \\ 0 & 29 & 8 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 87 & 0 & 27 & 99 \\ 0 & 29 & 8 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 87 & 0 & 27 & 99 \\ 0 & 29 & 8 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}f_1 \rightarrow f_1} \begin{pmatrix} 29 & 0 & 9 & 33 \\ 0 & 29 & 8 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} 29x + 0y + 9z = 33 \\ 0x + 29y + 8z = -19 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 29x = 33 - 9z \\ 29y = -19 - 8z \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{33 - 9z}{29} \\ y = -\frac{19 + 8z}{29} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{33 - 9z}{29} \quad \wedge \quad y = -\frac{19 + 8z}{29}$$

Es decir, el sistema tiene múltiples soluciones.

Determinando una solución particular, tomando un valor para z y sustituyéndola en las dos ecuaciones para $z = 0$ se tiene:

$$\begin{cases} x = \frac{33 - 9z}{29} \\ y = -\frac{19 + 8z}{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{33 - 9(0)}{29} \\ y = -\frac{19 + 8(0)}{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{33}{29} \\ y = -\frac{19}{29} \end{cases}$$

Para este caso, la solución es: $x = 33/29$, $y = -19/29$ \wedge $z = 0$

De esta misma forma se pueden calcular más soluciones.

Ejemplo 3.53

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 7y - z = 8 \\ 2x + 5y + 2z = -1 \\ 5x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, y se aplica el

método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 0 & 29 & 8 & -19 \\ 0 & 29 & 8 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 & 8 \\ 0 & 29 & 8 & -19 \\ 0 & 29 & 8 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 87 & 0 & 27 & 99 \\ 0 & 29 & 8 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 87 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} 87x + 0y + 27z = 99 \\ 0x + 29y + 8z = -19 \\ 0x + 0y + 0z = 87 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 87x = 99 - 27z \\ 29y = -19 - 8z \\ 0 \neq 87 \end{cases}$$

La tercera ecuación resulta ser algo falso, en consecuencia, se concluye que el sistema no tiene solución.

Los sistemas de ecuaciones abordados hasta el momento, los términos independientes son diferentes de cero, ahora se analizarán los sistemas de ecuaciones donde todos los términos independientes son iguales a cero, los cuales son llamados: **sistemas de ecuaciones homogéneos**, y son de la forma $A \times X = 0$.

Los sistemas de ecuaciones homogéneos siempre tienen solución, la cual puede ser única o infinita, todos poseen la solución llamada solución trivial, la cual es: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, ..., $x_n = 0$.

Ejemplo 3.54

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 7y = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

Solución

Un sistema homogéneo siempre tiene por lo menos la solución trivial.

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & -7:0 \\ 2 & 5:0 \end{pmatrix}$, y se aplica el método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 3 & -7:0 \\ 2 & 5:0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7:0 \\ 0 & 29:0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 87 & 0:0 \\ 0 & 29:0 \end{pmatrix}$$

Utilizando operaciones de filas.

$$\begin{pmatrix} 87 & 0:0 \\ 0 & 29:0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{87}f_1 \rightarrow f_1 \\ \frac{1}{29}f_2 \rightarrow f_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0:0 \\ 0 & 1:0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución es: $x = 0 \wedge y = 0$.

Ejemplo 3.55

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$$

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 1 & -3:0 \\ 2 & -6:0 \end{pmatrix}$, y se aplica el método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3:0 \\ 2 & -6:0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -7:0 \\ 0 & 0:0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} x - 7y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Es decir, el sistema tiene múltiples soluciones.

Ejemplo 3.56

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 7y - z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Solución

$[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1:0 \\ 2 & 5 & 2:0 \\ 5 & -2 & 1:0 \end{pmatrix}$ y aplicando el método del pivote.

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -1:0 \\ 2 & 5 & 2:0 \\ 5 & -2 & 1:0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1:0 \\ 0 & 29 & 8:0 \\ 0 & 29 & 8:0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -1: 8 \\ 0 & 29 & 8:-19 \\ 0 & 29 & 8:-19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 87 & 0 & 27:0 \\ 0 & 29 & 8:0 \\ 0 & 0 & 0:0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 87 & 0 & 27:0 \\ 0 & 29 & 8:0 \\ 0 & 0 & 0:0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}f_1 \rightarrow f_1} \begin{pmatrix} 29 & 0 & 9:0 \\ 0 & 29 & 8:0 \\ 0 & 0 & 0:0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} 29x + 0y + 9z = 0 \\ 0x + 29y + 8z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 29x = -9z \\ 29y = -8z \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{9z}{29} \\ y = -\frac{8z}{29} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{9z}{29} \quad \wedge \quad y = -\frac{8z}{29}$$

Es decir, el sistema tiene múltiples soluciones.

Determinando una solución particular, tomando un valor para z y sustituyéndola en las dos ecuaciones para $z = 29$ se tiene:

$$\begin{cases} x = -\frac{9z}{29} \\ y = -\frac{8z}{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{9(29)}{29} \\ y = -\frac{8(29)}{29} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = -8 \end{cases}$$

Para este caso, la solución es: $x = -9$, $y = -8 \quad \wedge \quad z = 29$.

De esta misma forma se pueden calcular más soluciones particulares.

Ejemplo 3.57

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ -3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Solución

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1:0 \\ 3 & 2 & 2:0 \\ -3 & -2 & 2:0 \end{pmatrix}$, y se aplica el

método del pivote así:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1:0 \\ 3 & 2 & 2:0 \\ -3 & -2 & 2:0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1:0 \\ 0 & -5 & 7:0 \\ 0 & 5 & 1:0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1:0 \\ 0 & -5 & 7:0 \\ 0 & 5 & 1:0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -10 & 0 & 26:0 \\ 0 & -5 & 8:0 \\ 0 & 0 & -40:0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0:0 \\ 0 & -5 & 0:0 \\ 0 & 0 & -40:0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -400 & 0 & 0:0 \\ 0 & -200 & 0:0 \\ 0 & 0 & -40:0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -400 & 0 & 0:0 \\ 0 & -200 & 0:0 \\ 0 & 0 & -40:0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -\frac{1}{400}f_1 \rightarrow f_1 \\ -\frac{1}{20}f_2 \rightarrow f_2 \\ -\frac{1}{40}f_3 \rightarrow f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0:0 \\ 0 & 1 & 0:0 \\ 0 & 0 & 1:0 \end{pmatrix}$$

De donde, la solución del sistema es la trivial: $x = 0$, $y = 0 \wedge z = 0$.

3.7 aplicación de matrices

Como se mencionó al inicio del capítulo, las matrices constituyen una de las estructuras matemáticas más simples, en cuanto a su comprensión o estudio, por ende, con ellas se puede organizar información de forma más sencilla, por lo cual se puede resolver problemas de aplicación, los cuales se pueden resolver de forma directa planteando matrices o

planteando sistemas de ecuaciones y resolviéndolos por medio de la matriz aumentada, el texto se enfocara en los problemas que se resuelven de forma directa.

Ejemplo 3.58

La carpintería de José fabrica tres modelos de camas básicas, médium y premium en tamaños individual y familiar, producen cada mes 10 camas familiares y 80 individuales de tipo normal, 80 familiares y 60 individuales del tipo médium y 40 familiares y 60 individuales del tipo premium. Cada cama de tipo familiar utiliza 20 tornillos y 25 kg de esponja, las individuales llevan 15 tornillos y 15 kg de esponja en cualquiera de los tres modelos de cama.

F: tipo familiar
I: tipo individual
N: modelo básico
M: modelo médium
P: modelo premium
T: tornillo
E: esponja

- Representar la información en dos matrices.
- Encontrar una matriz que represente la cantidad de tornillos y de esponja que se necesita mensualmente para la producción de los modelos de cama.

Solución

$$a) \quad A = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & I \end{matrix} \\ \begin{matrix} N \\ M \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 10 & 80 \\ 80 & 60 \\ 40 & 60 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} T & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ I \end{matrix} & \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 15 & 15 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Para este caso el producto $A \times B$ es válido, pero no basta solo con que se puedan multiplicar las matrices además de esto se tiene que analizar si dicho producto tiene sentido, es decir los elementos de las columnas de la matriz A tienen que hacer referencia a los elementos de las filas de la matriz B, lo cual se cumple.

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 80 \\ 80 & 60 \\ 40 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 25 \\ 15 & 15 \end{pmatrix} = \begin{matrix} T & E \\ N & \begin{pmatrix} 1400 & 12410 \end{pmatrix} \\ M & \begin{pmatrix} 2500 & 11120 \end{pmatrix} \\ P & \begin{pmatrix} 9815 & 92352 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$10(20) + 80(15) = 1400$$

$$10(25) + 80(15) = 12410$$

$$80(20) + 60(15) = 2500$$

$$80(25) + 60(15) = 11120$$

$$40(20) + 60(15) = 9815$$

$$40(25) + 60(15) = 92352$$

Pero se pide los tornillos y espuma para todos los modelos, por ende, la información no está ilustrada de forma correcta, para corregir esto solo se necesita algo muy sencillo que es cambiar las filas por las columnas, es decir se debe calcular la traspuesta así.

$$(AB)^T = \begin{matrix} N & M & P \\ T & \begin{pmatrix} 1400 & 2500 & 9815 \end{pmatrix} \\ E & \begin{pmatrix} 12410 & 11120 & 92352 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ejemplo 3.59

La carnicería de María en el periodo de navidad oferta 3 tipos de bandejas de carne, pequeña, mediana y grande, la pequeña contiene 2 lbs de res, 4 lbs de pollo y 5 lbs de cerdo, la mediana 4 lbs de res 7 lbs de pollo y 8 lbs de cerdo y la grande 6 lbs de res 12 lbs de pollo y 16 lbs de cerdo. Si María está interesada en vender 20 bandejas pequeñas, 30 bandejas medianas y 40 bandejas grandes. Determinar por medio de operaciones matriciales la cantidad que necesita en libras, de cada tipo de carne.

Solución

Primero se debe construir las matrices según las bandejas.

$$P = \begin{matrix} lbs \\ Re \\ Po \\ Ce \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad M = \begin{matrix} lbs \\ Re \\ Po \\ Ce \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad G = \begin{matrix} lbs \\ Re \\ Po \\ Ce \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Re: carne de res
Po: carne de pollo
Ce: carne de cerdo
P: pequeño
M: mediano

G: grande
lbs: libras

Como ya se tiene la cantidad de bandejas de cada tipo, se utiliza la operación de multiplicar la matriz por un escalar y se suman los resultados.

$$\begin{aligned}20P + 30M + 40G &= 20 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 30 \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + 40 \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ 210 \\ 240 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 240 \\ 480 \\ 640 \end{pmatrix} \\ &= \begin{matrix} lbs \\ Re \\ Po \\ Ce \end{matrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 770 \\ 980 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es decir, María necesita 400 lbs de carne de res, 770 lbs de carne de pollo y 980 lbs de carne de cerdo.

Ejemplo 3.60

La empresa “el trueno” distribuye transformadores y plantas eléctricas, en la cual durante los últimos 3 años se cuenta con la siguiente información. La matriz A representa las unidades vendidas y la matriz B el precio de cada artículo.

P: plantas eléctricas
T: transformadores

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2021 & 2022 & 2023 \end{matrix} \\ \begin{matrix} T \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 250 & 700 & 450 \\ 200 & 550 & 550 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} T & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2021 \\ 2022 \\ 2023 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 500 & 800 \\ 480 & 750 \\ 550 & 860 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Encontrar la matriz $B \times A$. ¿Cuánto fue el ingreso anual por las ventas? ¿Qué elementos de la matriz producto brindan esa información?
- ¿En qué orden se deben multiplicar las matrices para obtener los ingresos de cada artículo durante esos tres años? ¿Qué elementos de la matriz brindan esa información?

Solución

$$a) \quad BA = \begin{pmatrix} 500 & 800 \\ 480 & 750 \\ 550 & 860 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & 700 & 450 \\ 200 & 550 & 550 \end{pmatrix}$$

$$500(250) + 800(200) = 285000$$

$$500(700) + 800(550) = 790000$$

$$500(450) + 800(550) = 665000$$

$$480(250) + 750(200) = 270000$$

$$480(700) + 750(550) = 748500$$

$$480(450) + 750(550) = 628500$$

$$550(250) + 860(200) = 309500$$

$$550(700) + 860(550) = 858000$$

$$550(450) + 860(550) = 720500$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 2021 & 2022 & 2023 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2021 \\ 2022 \\ 2023 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 285000 & 790000 & 665000 \\ 270000 & 748500 & 628500 \\ 309500 & 858000 & 720500 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

¿Cuánto fue el ingreso anual por las ventas?

- ✓ 285000 se ingresó por ambas ventas el año 2021.
- ✓ 748500 se ingresó por ambas ventas el año 2022.
- ✓ 720500 se ingresó por ambas ventas el año 2023.

¿Qué elementos brindan esa información?

Los elementos de la diagonal principal.

$$b) \quad AB = \begin{pmatrix} 250 & 700 & 450 \\ 200 & 550 & 550 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 & 800 \\ 480 & 750 \\ 550 & 860 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} T & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} T \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 708500 & 1112000 \\ 666500 & 1045500 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- ✓ 708500 se ingresó por la venta de los transformadores durante el periodo 2021-2023.
- ✓ 1045500 se ingresó por la venta de las plantas eléctricas durante el periodo 2021-2023.

¿Qué elementos brindan esa información?

Los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo 3.61

Una fábrica de sodas, produce sodas normales y sodas light, en presentaciones pequeña, mediana, grande y gigante, para la cual la matriz A representa los mililitros que contiene cada presentación y la matriz B la cantidad producida según tipo normal o light.

$$A = ml \begin{pmatrix} Pe & Me & Gr & Gi \\ 300 & 750 & 2000 & 3000 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} N & L \\ Pe & 700 & 900 \\ Me & 900 & 750 \\ Gr & 1000 & 500 \\ Gi & 850 & 200 \end{pmatrix}$$

N: normal
L: light
Pe: pequeño
Me: mediano
Gr: grande
Gi: gigante
ml: mililitros

- Encontrar la matriz $A \times B$.
- Interpretar los elementos de la matriz $A \times B$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad AB &= (300 \quad 750 \quad 2000 \quad 3000) \begin{pmatrix} 700 & 900 \\ 900 & 750 \\ 1000 & 500 \\ 850 & 200 \end{pmatrix} \\ &= ml \begin{pmatrix} N & L \\ 5435000 & 2432500 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- ✓ Se embotellan 5435000ml de soda normal
Y 2432500ml de soda light

Ejemplo 3.62

Fátima invita a sus compañeros a tomarse unos refrescos, ella no recuerda cuanto invirtió, solo recuerda que compro 5 de piña, 7 de tamarindo y 10 de horchata, además que los precios eran \$0.75 los de piña, \$0.45 los de tamarindo y \$0.55 los de horchata. ¿Utilizando operaciones matriciales se puede conocer la cantidad que invirtió Fátima?

Solución

$$A = \begin{matrix} & P & T & H \\ \text{Cantidad} & (5 & 7 & 10) \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & P & T & H \\ \text{Precio} & \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.45 \\ 0.55 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$AB = (5 \quad 7 \quad 10) \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.45 \\ 0.55 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} & P & T & H \\ \text{Cantidad} & (12.4) \end{matrix}$$

Es decir, Fátima invirtió \$12.4

P: refresco de piña
T: refresco de tamarindo
H: refresco de horchata

Ejemplo 3.63

En las fiestas Patronales de San Salvador, se estaban vendiendo tres tipos de conserva de coco, toronja y camote, en tres presentaciones pequeña mediana y grande.

El primer día se vendieron 10 pequeñas, 9 medianas y 5 grandes de coco, 8 pequeñas, 4 medianas y 3 grandes conservas de toronja y 15 pequeñas, 12 medianas y 8 grandes de camote, el segundo día de fiesta se triplicaron las ventas. Si cada la presentación pequeña cuestan \$0.50, la mediana \$1.50 y la grande \$2.50. ¿Cuánto dinero se recaudó por la venta de cada tipo de las conservas durante los dos días de fiesta?

Solución

Se contruyen las matrices A ventas del primer día y la matriz B muestra los precios según las presentaciones.

P: pequeño
M: mediano
G: grande
Co: conserva de coco
To: conserva de toronja
Ca: conserva de camote

$$A = \begin{matrix} & P & M & G \\ \begin{matrix} Co \\ To \\ Ca \end{matrix} & \begin{pmatrix} 10 & 9 & 5 \\ 8 & 4 & 3 \\ 15 & 12 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} Precio \\ \begin{matrix} P \\ M \\ G \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Basándose en la matriz A se puede encontrar las ventas del segundo día multiplicándola por tres, ya que se dice que las ventas se triplican.

$$C = 3A = 3 \begin{pmatrix} 10 & 9 & 5 \\ 8 & 4 & 3 \\ 15 & 12 & 8 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 30 & 27 & 15 \\ 24 & 12 & 9 \\ 45 & 36 & 24 \end{pmatrix}$$

Las ventas que se efectuaren en los dos días se obtienen sumando $D = A + C$

$$D = A + C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 5 \\ 8 & 4 & 3 \\ 15 & 12 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 27 & 15 \\ 24 & 12 & 9 \\ 45 & 36 & 24 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 40 & 36 & 20 \\ 32 & 16 & 12 \\ 60 & 48 & 32 \end{pmatrix}$$

Para obtener lo recaudado por cada tipo de conserva se multiplica $D \times B$.

$$DB = \begin{pmatrix} 40 & 36 & 20 \\ 32 & 16 & 12 \\ 60 & 48 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{matrix} Precio \\ \begin{matrix} Co \\ To \\ Ca \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 124 \\ 70 \\ 182 \end{pmatrix}$$

Es decir que durante los dos días de fiestas se recaudaron \$124 por las conservas de coco, \$70 por las conservas de toronja y \$182 por las conservas de camote.

Ejemplo 3.64

La carpintería de José elabora tres tipos de sillones de una, dos y tres piezas. Para los cuales se necesitan 1.5 m, 2.8 m y 3.7 m de madera respectivamente, 100 ml, 150 ml y 175 ml de pegamento respectivamente y 100 m, 200 m y 300 m de junco respectivamente. Si se sabe que el costo de cada metro es de madera es \$4, el pegamento \$0.02 por mililitro y \$0.1 el metro de junco. Si en un mes de trabajo se elaboran 20 de una pieza, 15 de dos piezas y 12 de tres piezas.

- Construir matrices que muestren la cantidad de muebles elaborados, el precio y la cantidad de material utilizado.
- Utilizando operaciones matriciales calcular los costos mensuales de la carpintería.

Solución

- Se contruyen las matrices A de materiales, la matriz B de costos y la matriz C la cantidad de muebles elaborados.

1P: sillones de una pieza
2P: sillones de dos piezas
3P: sillones de tres piezas

Ma: madera
Pe: pegamento
Ju: junco

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} Ma & Pe & Ju \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1P \\ 2P \\ 3P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1.5 & 100 & 100 \\ 2.8 & 150 & 200 \\ 3.7 & 175 & 300 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} Costo \end{matrix} \\ \begin{matrix} Ma \\ Pe \\ Ju \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 0.02 \\ 0.1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1P & 2P & 3P \end{matrix} \\ \begin{matrix} Cantidad \end{matrix} & \begin{pmatrix} 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Para obtener los costos de la carpintería en un mes se necesita realizar el producto $C \times A \times B$.

$$CAB = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 100 & 100 \\ 2.8 & 150 & 200 \\ 3.7 & 175 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0.02 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$= (116.4 \quad 6350 \quad 8600) \begin{pmatrix} 4 \\ 0.02 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$= (1452.6)$$

Es decir, la carpintería invierte \$1452.6 al mes

Ejemplo 3.65

El Ministerio de salud distribuye cuatro tipos de medicamento para el dolor de cabeza, en la zona central y paracentral, mensualmente distribuyen, 600 cajas de nurofen, 700 de tylenol, 1500 de panadol y 1250 de aspirina, para la zona central y 300 cajas de nurofen, 200 de tylenol, 1000 de panadol y 950 de aspirina, para la zona paracentral. Si cada caja de nurofen cuesta \$100, la de tylenol \$125, la de panadol \$50 y la de aspirina \$40.

- Construya dos matrices que representen una los costos de los cuatro tipos de medicamentos y la otra la cantidad de cajas distribuidas en las diferentes zonas.
- Utilice operaciones matriciales para encontrar los gastos en los que incurre el ministerio de salud en las diferentes zonas.

Solución

- Se contruyen las matrices A que reprecenten los costos y la matriz B la cantidad de cajas distribuidas sugun la zona.

Nu: nurofen
 Ty: tylenol
 Pa: panadol
 As: aspirina
 C: zona central
 P: zona paracentral

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} Nu & Ty & Pa & As \end{matrix} \\ \text{costo} & \begin{pmatrix} 100 & 125 & 50 & 40 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} Nu \\ Ty \\ Pa \\ As \end{matrix} & \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 700 & 200 \\ 1500 & 1000 \\ 1250 & 950 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b) Para determinar los gastos por zona se tiene que realizar el producto $A \times B$.

$$AB = (100 \quad 125 \quad 50 \quad 40) \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 700 & 200 \\ 1500 & 1000 \\ 1250 & 950 \end{pmatrix}$$

$$= (272500 \quad 143000)$$

Es decir, el ministerio de salud invierte \$272,500 en la zona central y \$143,000 en la zona paracentral en medicamentos

Ejemplo 3.66

La carpintería de José elabora tres tipos de sillones de una, dos y tres piezas. Para los cuales se necesitan 1.5 m, 2.8 m y 3.7 m de madera respectivamente, 100 ml, 150 ml y 175 ml de pegamento respectivamente y 100 m, 200 m y 300 m de junco respectivamente. Si el consumo mensual de dichos materiales asciende a 122 m de madera, 6650 ml de pegamento y 9000 m de junco, determinar la cantidad de sillones de cada tipo.

Solución

Primero se extrae la información.

	1 pieza	2 piezas	3 piezas	consumo
Madera	1.5	2.8	3.7	122
Pegamento	100	150	175	6650
Junco	100	200	300	9000

Luego se plantean las incógnitas y el sistema de ecuaciones a resolver.

Sea x cantidad de sillones de una pieza.

Sea y cantidad de sillones de dos piezas.

Sea z cantidad de sillones de tres piezas.

$$\begin{cases} 1.5x + 2.8y + 3.7z = 122 \\ 100x + 150y + 175z = 6650 \\ 100x + 200y + 300z = 9000 \end{cases}$$

Si se quiere evitar trabajar con decimales se puede multiplicar la ecuación 1 por 10 así:

$$\begin{aligned} 10(1.5x + 2.8y + 3.7z &= 122) \\ 15x + 28y + 37z &= 1220 \end{aligned}$$

Se forma la matriz $[A : B] = \begin{pmatrix} 15 & 28 & 37 : 1220 \\ 100 & 150 & 175 : 6650 \\ 100 & 200 & 300 : 9000 \end{pmatrix}$.

Se aplica el método del pivote.

$$\begin{pmatrix} 15 & 28 & 37 : 1220 \\ 100 & 150 & 175 : 6650 \\ 100 & 200 & 300 : 9000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 28 & 37 : 1220 \\ 0 & -550 & -1075 : -22250 \\ 0 & 200 & 800 : 13000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 28 & 37 : 1220 \\ 0 & -550 & -1075 : -22250 \\ 0 & 200 & 800 : 13000 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{200}f_3 \rightarrow f_3]{-\frac{1}{25}f_2 \rightarrow f_2} \begin{pmatrix} 15 & 28 & 37 : 1220 \\ 0 & 22 & 43 : 890 \\ 0 & 1 & 4 : 65 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 28 & 37 : 1220 \\ 0 & 22 & 43 : 890 \\ 0 & 1 & 4 : 65 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 330 & 0 & -390 : 1920 \\ 0 & 22 & 43 : 890 \\ 0 & 0 & 45 : 540 \end{pmatrix}$$

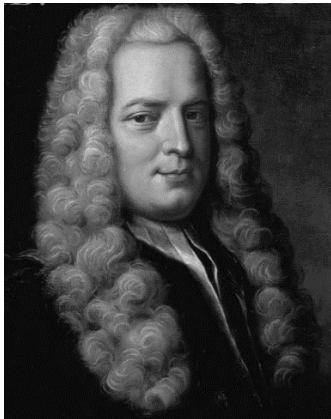
$$\begin{pmatrix} 330 & 0 & -390 : 1920 \\ 0 & 22 & 43 : 890 \\ 0 & 0 & 45 : 540 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{45}f_3 \rightarrow f_3]{\frac{1}{30}f_1 \rightarrow f_1} \begin{pmatrix} 11 & 0 & -13 : 64 \\ 0 & 22 & 43 : 890 \\ 0 & 0 & 1 : 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & -13 & 64 \\ 0 & 22 & 43 & 890 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 220 \\ 0 & 22 & 0 & 374 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 220 \\ 0 & 22 & 0 & 374 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{22}f_2 \rightarrow f_2]{\frac{1}{11}f_1 \rightarrow f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

De donde, $x = 20$, $y = 17 \wedge z = 12$.

Es decir, en la carpintería se construyen 20 sillones de una pieza, 17 sillones de dos piezas y 12 sillones de tres piezas al mes.



(Ginebra, Suiza, 1704 - Bagnols-sur-Cèze, Francia, 1752)
Matemático suizo. Talento precoz, presentó su tesis a los dieciocho años y desde los veinte fue catedrático de matemáticas en la Universidad de Ginebra. Un breve periplo europeo efectuado desde 1727 hasta 1729 le permitió conocer a los más célebres matemáticos de su tiempo, con los que luego mantendría correspondencia. En 1750 pasó a ocupar la cátedra de filosofía en la

3.8 Determinantes: Definición y Notación.

Una de las aplicaciones más importantes de los determinantes es dar soluciones de algunos sistemas de ecuaciones lineales (sistemas de ecuaciones compatibles determinados), los cuales pueden resolverse mediante el empleo de la regla de Cramer, el nombre Cramer se debe al matemático Suizo Gabriel Cramer.

Sea A una matriz cuadrada, el determinante de la matriz A se representa por $\det(A)$ ó $|A|$, y el resultado es un número real.

Ejemplo 3.67

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ el determinante de A se representa por: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

misma universidad. (Fernández y Tamaro, 2004b).

Sistema de ecuaciones compatibles determinados: son aquellos que poseen una única solución.

Ojo, no confundir el determinante de una matriz con el valor absoluto de un número.

El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta.

Para la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ su determinante se representa por: $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Para la matriz $C = (2)$ su determinante se representa por: $|B| = |2|$.

El orden de un determinante es el número de filas que posee, para el ejemplo 3.58, el determinante de la matriz A es de orden 3, el determinante de la matriz B es de orden 2 y el determinante de la matriz C es 1.

3.9 Cálculo de determinantes

Para calcular determinantes existen diversos métodos, al igual que los apartados anteriores se iniciará calculando determinantes de orden 2, el cual es un recordatorio del producto cruzado utilizado en el método del pivote, luego se retomará el método de Sarrus para determinantes de orden 3, para finalizar con métodos más generales para determinantes de orden mayor o igual a 3.

3.9.1 Cálculo de determinantes de orden 2.

Sea el determinante de orden 2, $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, se calcula restando los productos cruzados comenzando por la diagonal principal así:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ejemplo 3.68

Calcular el determinante de las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$,
 $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3(7) - 2(5) = 21 - 10 = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1(-3) - 2(2) = 3 - 4 = -1$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -2(5) - 4(-1) = -10 + 4 = -6$$



(Saint-Affrique, 1798- *id.*, 1861)
Matemático francés. Profesor en la Universidad de Estrasburgo, demostró el lema fundamental del cálculo de variaciones y publicó numerosas obras sobre la resolución de ecuaciones de varias incógnitas. Se le debe la *regla de Sarrus*, para el cálculo de determinantes. Destaca su obra *Método para hallar las condiciones de integrabilidad de*

3.9.2 Cálculo de determinantes de orden 3: Método de Sarrus.

Este método fue descrito por el matemático francés Pierre Sarrus (1798-1861), en el artículo «Nouvelles méthodes pour la résolution des équations», publicado en Estrasburgo en 1833. Este método es comúnmente conocido como “la regla de Sarrus”, es exclusivo para calcular determinantes de orden 3, pero también es aplicable para matrices de orden 2×2 . Para determinantes de orden 4 en adelante este método no se puede aplicar

Para calcular el determinante utilizando este método se procede de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

una ecuación diferencial.
(Fernández y Tamaro, 2004c).

El determinante de una matriz triangular superior o inferior es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{vmatrix} = adf$$

Paso 1:

Se agregan las dos primeras columnas (o filas) al determinante de A así:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Paso 2:

Se suman los productos de las diagonales de 3 elementos de arriba hacia abajo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh$$

O bien

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf$$

Paso 3:

Se restan los productos de las diagonales de 3 elementos, de abajo hacia arriba.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Es importante tener en cuenta que solo se necesita realizar de una sola forma ya sea por filas o columnas, en este texto se retomara la forma de agregar las columnas, pero queda a disposición del lector utilizar la forma que más se le facilite.

O bien

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi$$

Ejemplo 3.69

Calcular el determinante de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2(0)(4) + 1(3)(1) + 2(2)(2) - 1(0)(2) - 2(3)(2) - 4(2)(1) \\ &= 0 + 3 + 8 - 0 - 12 - 8 \\ &= 11 - 20 \\ &= -9 \end{aligned}$$

O bien

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2(0)(4) + 2(2)(2) + 1(1)(3) - 1(0)(2) - 2(2)(3) - 2(1)(4) \\ &= 0 + 8 + 3 - 0 - 12 - 8 \\ &= 11 - 20 \\ &= -9 \end{aligned}$$

Recordar el método de Sarrus no se aplica para determinantes de orden mayor a 3

$$\begin{aligned}
 |B| &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)(1)(2) + 0(-1)(-2) + (-1)(3)(1) - (-2)(1)(-1) \\
 &\quad - 1(-1)(-1) - 2(3)(0) \\
 &= -2 + 0 - 3 - 2 - 1 - 0 \\
 &= -5 - 3 \\
 &= -8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |C| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 1(0)(1) + 2(2)(1) + 3(1)(2) - 1(0)(3) - 2(2)(1) - 1(1)(2) \\
 &= 0 + 4 + 6 - 0 - 4 - 2 \\
 &= 10 - 6 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

3.9.3 Cálculo de determinantes de orden 3 o mayor

3.9.3.1 Método de cofactores

El método de cofactores es útil para calcular determinantes de orden mayor o igual que tres, para poder utilizar este método, es necesario primero conocer los términos, meno y cofactor, ya que utilizando estos se realiza dicho cálculo.

Si $|A|$ es un determinante, el **menor** de $|A|$ asociado al elemento a_{ij} se define como, el determinante que resulta de eliminar la fila i y la columna j del determinante $|A|$ y se denota por M_{ij} .

Ejemplo 3.70

Calcular los menores del determinante siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0(4) - 3(2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2(4) - 3(1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(2) - 0(1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{21} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1(4) - 2(2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2(4) - 2(1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{23} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(2) - 1(1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1(3) - 2(0) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{32} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(3) - 2(2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2(0) - 1(2) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Matriz de menores es la matriz que se forma al obtener todos los menores de una matriz dada, para el ejemplo 3.70 sería.

$$M = \begin{vmatrix} -6 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Sea $|A|$ un determinante, el **cofactor** de $|A|$ asociado al elemento a_{ij} se define como: $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Ejemplo 3.71

Calcular los cofactores del determinante siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{array}{l}
 C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} \\
 = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 = (1)(2 + 1) \\
 = 1(3) \\
 = 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} \\
 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\
 = (-1)(6 - 2) \\
 = -1(4) \\
 = -4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} \\
 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\
 = (1)(3 + 2) \\
 = 1(5) \\
 = 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} \\
 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 = (-1)(0 + 1) \\
 = -1(1) \\
 = -1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} \\
 = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\
 = (1)(-2 - 2) \\
 = 1(-4) \\
 = -4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} \\
 = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\
 = (-1)(-1 + 0) \\
 = -1(-1) \\
 = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} \\
 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 = (1)(0 + 1) \\
 = 1(1) \\
 = 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} \\
 = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\
 = (-1)(1 + 3) \\
 = -1(4) \\
 = -4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} \\
 = (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
 = (1)(-1 + 0) \\
 = 1(-1) \\
 = -1
 \end{array}$$

Matriz de cofactores es la matriz que se forma al obtener todos los cofactores de una matriz dada, para el ejemplo 3.71 sería.

$$C = \begin{vmatrix} -6 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

La matriz adjunta A es la matriz traspuesta de la matriz de cofactores de A y se denota $Adj(A)$, para el ejemplo 3.71 sería.

$$Adj(C) = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Conociendo estos términos, ya se puede calcular el determinante de una matriz A cuadrada de orden mayor o igual a tres, por medio de cofactores de la manera siguiente:

1. Se selecciona una fila i de cofactores (o columna de preferencia la que tenga la mayor cantidad de cero).
2. El determinante de A se calcula como:

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij}$$

Ejemplo 3.72

Calcular el determinante de la matriz siguiente utilizando el

método de cofactores: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución

Siguiendo la recomendación de tomar la fila con más ceros se toma la fila 1, la idea de seleccionar la fila con la mayor cantidad de ceros es para reducir las operaciones.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= (-1)(3) + 0(-4) + (-1)(5) \\ &= -3 + 0 + -5 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$C_{11} = 3$, $C_{12} = -4$ y $C_{13} = 5$ por ejemplo 3.71.

Ejemplo 3.73

Calcular el determinante de la matriz siguiente utilizando el

método de cofactores: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

Siguiendo la recomendación de tomar la fila con más ceros se toma la fila 4.

Lo importante de tomar las filas con ceros es que se reduce el número de cálculos.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_{41}C_{41} + a_{42}C_{42} + a_{43}C_{43} + a_{44}C_{44}$$

$$= 0(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ + 0(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\ = 2 + 2 + 6 - 2 + 2 + 6 \\ = 16$$

$$|N| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ = -2 + 0 - 3 - 2 - 1 + 0 \\ = -8$$

Para encontrar los determinantes de orden 3 resultantes se puede utilizar cofactores nuevamente o utilizar Sarrus.

$$= (-2)(16) + 1(-8) \\ = -32 - 8 \\ = -40$$

3.9.3.2 Método del pivote para el cálculo de determinantes

El método del pivote es útil para calcular determinantes de orden mayor o igual a tres, y es una forma mecanizada de aplicar las propiedades de los determinantes que se estudiarán en el siguiente capítulo, no olvidar que el pivote no puede valer cero y en la fórmula que se utilizara quedara claro, ya que no es posible dividir entre cero.

Pasos para calcular el determinante $|A|_n$:

1. Se toma como pivote el elemento a_{11} .
2. Se aplica la fórmula $|A| = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} |D|_{n-1}$.
3. Se toma como pivote el nuevo a_{11} y posteriormente se repite el paso 2.
4. El proceso termina cuando $|D|_{n-1}$ es de orden 2.

Ejemplo 3.74

Recordar que el pivote tiene que ser diferente de cero.

Donde $|D|_{n-1}$ es el determinante de orden $n-1$ el cual está formado por todos los determinantes de orden dos que se puedan formar comenzando siempre por el pivote.

Calcular el determinante de la matriz siguiente utilizando el

método del pivote: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución

Se toma el pivote $a_{11} = -1$, $n = 3$.

Aplicando la fórmula.

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{1}{(-1)^{3-2}} \left| \begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(4 + 4) \\ &= -1(8) \\ &= -8 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.75

Calcular el determinante de la matriz siguiente utilizando el

método del pivote: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

Se toma el pivote $a_{11} = -1$, $n = 4$.

Aplicando la fórmula.

$$|A| = \frac{1}{(-1)^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{(-1)^2} \begin{vmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

aplicando nuevamente el método pivote $a_{11} = -1$, $n = 3$.

$$|A| = \frac{1}{1(-1)^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \frac{1}{(-1)^1} \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(72 - 32)$$

$$= -1(40)$$

$$= -40$$

Para el caso que $a_{11} = 0$ se puede intercambiar dos filas, de tal forma que $a_{11} \neq 0$, para tal caso, el determinante cambia de signo, como se podrá observar más adelante.

El elemento pivote puede ser cualquier elemento a_{ij} , para lo cual se debe tomar en cuenta la siguiente fórmula:

$$|A| = \frac{(-1)^{i+j}}{(a_{ij})^{n-2}} |D|_{n-1}$$

Ejemplo 3.76

Calcular el determinante de la matriz siguiente utilizando diferentes pivotes al a_{11} :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se puede tomar como pivote cualquier elemento a_{ij} , siempre y cuando $a_{ij} \neq 0$.

Solución

Tomando el pivote $a_{21} = 3$, $n = 3$.

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{(-1)^{2+1}}{(3)^{3-2}} \left| \begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ \hline -2 & 1 \end{array} \right| = \frac{(-1)^{2+1}}{(3)^{3-2}} \left| \begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ \hline -1 & -1 \\ 3 & -1 \\ \hline -2 & 2 \end{array} \right| \\ &= \frac{(-1)^3}{3^1} \left| \begin{array}{c|c} 1 & -4 \\ \hline 5 & 4 \end{array} \right| \\ &= -\frac{1}{3} (4 + 20) \\ &= -\frac{1}{3} (24) \\ &= -8 \end{aligned}$$

Tomando el pivote $a_{32} = 1, n = 3$.

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{(-1)^{3+2}}{(1)^{3-2}} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(-1)^5}{1^1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(3 + 5) \\ &= -1(8) \\ &= -8 \end{aligned}$$

Tomando el pivote $a_{33} = 2, n = 3$.

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{(-1)^{3+3}}{(2)^{3-2}} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(-1)^6}{2^1} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(-12 - 4) \\ &= \frac{1}{2}(-16) \\ &= -8 \end{aligned}$$

3.10 Propiedades de los determinantes.

En este apartado se abordarán, cinco propiedades de los determinantes, las cuales, facilitan el cálculo de los mismos, por ende, es muy importante poder conocerlas y poder aplicarlas.

1. Si una matriz A de orden n tiene una fila o columna en la cual todos sus elementos son iguales a cero, entonces $|A| = 0$.

Por ejemplo, sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

entonces $|A| = 0$, ya que todos los elementos de la fila 4 son iguales a cero.

2. Sea A una matriz, si B es la matriz que resulta de multiplicar una fila o columna de A por un número real $k \neq 0$ entonces $|B| = k|A|$. (el determinante de B es igual al determinante de A multiplicado por k).

Por ejemplo, sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, donde B es la matriz que resulta de realizar la operación entre filas $-2f_2 \rightarrow f_2$ de la matriz A , entonces se verifica que:

$$\begin{aligned} |B| &= k|A| \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ 1(6) - 2(-4) &= -2(1(-3) - 2(2)) \\ 6 + 8 &= -2(-3 - 4) \\ 14 &= -2(-7) \\ 14 &= 14 \end{aligned}$$

3. Si se intercambian dos filas de una matriz su determinante cambia de signo.

Por ejemplo, sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, donde B es la matriz que resulta de realizar la operación entre filas $f_1 \leftrightarrow f_2$ de la matriz A , entonces se verifica que:

$$\begin{aligned} |B| &= -|A| \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ 2(2) - (-3)(1) &= -(1(-3) - 2(2)) \\ 4 + 3 &= -(-3 - 4) \\ 7 &= -(-7) \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

4. Si dos filas o columnas de un determinante son iguales, entonces el determinante es cero. (esta propiedad se generaliza para cuando una fila o columna es múltiplo de otra).

Por ejemplo, sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

entonces $A = 0$, ya que $f_1 = f_4$.

Otro ejemplo, sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 6 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

entonces $A = 0$, ya que $f_6 = 3f_2$.

5. Si en una matriz se realiza la operación elemental $f_i + kf_j \rightarrow f_i$, entonces el determinante no cambia.

Por ejemplo, sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$, donde B es la matriz que resulta de realizar la operación entre filas $f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2$, entonces se verifica que:

$$|B| = |A|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$1(-7) - (0)(2) = 1(-3) - 2(2)$$

$$-7 - 0 = -3 - 4$$

$$-7 = -7$$

$$\begin{aligned} f_2 - 2f_1 &= (2 \ -3) - 2(1 \ 2) \\ &= (2 \ -3) - (2 \ 4) \\ &= (0 \ -7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 7 + 18 + 10 - 3 - 15 - 28 \\ &= -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 - 2f_1 &= (2 \ 1 \ 3) - 2(1 \ 2 \ 1) \\ &= (2 \ 1 \ 3) - (2 \ 4 \ 2) \\ &= (0 \ -3 \ 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 - 3f_1 &= (3 \ 5 \ 7) - 3(1 \ 2 \ 1) \\ &= (3 \ 5 \ 7) - (3 \ 6 \ 3) \\ &= (0 \ -1 \ 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 - \frac{1}{3}f_2 &= (0 \ -1 \ 4) - \frac{1}{3}(0 \ -3 \ 1) \\ &= (0 \ -1 \ 4) - \left(0 \ -1 \ \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(0 \ 0 \ \frac{11}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{vmatrix} \\ &= 1(-3)\left(\frac{11}{3}\right) \end{aligned}$$

Otro, sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$,

donde B es la matriz que resulta de realizar las operaciones entre filas $f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2$, $f_3 - 3f_1 \rightarrow f_3$ y $f_3 - \frac{1}{3}f_2 \rightarrow f_3$ entonces se verifica que:

$$|B| = |A|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$-11 = -11$$

3.10 El método de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Este método lo desarrolló el matemático Suizo Gabriel Cramer en 1750, en honor a él es conocido como “la regla de Cramer”, en el cual se hace uso de los determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos de orden n que tienen solución única.

= -11

Sea el sistema no homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Si $|D| \neq 0$ entonces la solución única será:

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|D|}, \quad x_2 = \frac{|D_2|}{|D|}, \quad x_3 = \frac{|D_3|}{|D|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|D_n|}{|D|}$$

Si $|D| = 0$ el método de Cramer no es aplicable.

Si $|D| = 0$ y algún $|D_i| \neq 0$, entonces el sistema no tiene solución.

Si $|D| = 0$ y todos los $|D_i| = 0$, entonces el sistema tiene múltiples soluciones, pero para obtenerlas hay que aplicar otro método.

Donde $|D|$ es el determinante de los coeficientes.

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Los $|D_i|$ se obtienen al sustituir la columna i por la columna de los términos independientes.

$$|D_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

\vdots

$$|D_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Ejemplo 3.77

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 7y = 9 \end{cases}$$

Para utilizar este método las ecuaciones tienen que estar ordenadas.

Solución

Se verifica que las variables estén ordenadas, luego se calcula

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 11, \text{ como } |D| \neq 0 \text{ se aplica el método de}$$

Cramer:

Se calculan los $|D_i|$.

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -11$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 22$$

Donde el valor de las variables será:

$$x = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{-11}{11} = -1$$

$$y = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{22}{11} = 2$$

Por tanto, la solución es: $x = -1 \wedge y = 2$.

Ejemplo 3.78

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 7y - z = 8 \\ 2x + 5y + z = -1 \\ x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

Solución

Se verifica que las variables estén ordenadas, luego se calcula

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -65, \text{ como } |D| \neq 0 \text{ se aplica el método}$$

de Cramer:

Se calculan los $|D_i|$.

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -30 - 7 - 2 + 5 - 3 - 28 \\ &= -65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |D_1| &= \begin{vmatrix} 8 & -7 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -1 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -80 + 28 + 1 - 20 - 8 + 14 \\ &= -65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |D_2| &= \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 6 + 8 + 8 - 1 + 12 + 32 \\ &= 65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |D_3| &= \begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -60 + 7 + 16 - 40 + 3 - 56 \\ &= -130 \end{aligned}$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 8 & -7 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -65$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 65$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -130$$

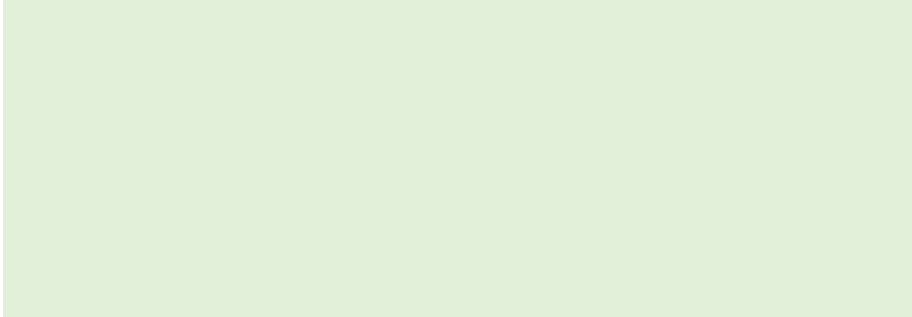
Donde el valor de las variables será:

$$x = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{-65}{-65} = 1$$

$$y = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{65}{-65} = -1$$

$$z = \frac{|D_3|}{|D|} = \frac{-130}{-65} = 2$$

Por tanto, la solución es: $x = 1$, $y = -1 \wedge z = 2$.





UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA



GUÍA DE EJERCICIOS SOBRE MATRICES Y DETERMINANTES

MATEMÁTICA I

I. Definición y tipos de matrices

1) Escriba una matriz con las características siguientes:

a) De orden 3×4 , tal que: $a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{para } i = j \\ -3, & \text{para } i \neq j \end{cases}$

b) De orden 3×2 , tal que: $b_{ij} = 3i - 7j$

c) De orden 4×3 , tal que: $c_{ij} = \begin{cases} 3, & \text{para } i < j \\ -1, & \text{para } i = j \\ 5, & \text{para } i > j \end{cases}$

d) De orden 4×4 , tal que: $d_{ij} = \begin{cases} 2i - j, & \text{para } i < j \\ 3i + j, & \text{para } i = j \\ 3i^2 - j^2, & \text{para } i > j \end{cases}$

e) De orden 4×4 , tal que: $e_{ij} = \begin{cases} i^2, & \text{para } i < j \\ 3ij, & \text{para } i = j \\ -j^2, & \text{para } i > j \end{cases}$

f) De orden 3×2 , tal que: $f_{ij} = 2ij - 1$

g) De orden 3×4 , tal que: $g_{ij} = 2ij + i$

2) Una de las empresas de Juan importa pantalones, short y faldas de China y Italia, los costos unitarios de importación de cada producto desde China son \$10.00, \$8.50 y \$8.25, respectivamente. Los de Italia son \$15.00, \$12.75 y \$12.00, respectivamente. Representar dicha información como una matriz de orden 2×3 . ¿Qué representa el elemento de la posición a_{12} ?, ¿qué representa el elemento a_{11} ?, ¿el elemento a_{22} ? y el elemento a_{31} ?

3) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & a & 3 \\ x & y & 1 \\ 0 & -z & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ v & 3 & w \end{pmatrix}$, determinar los valores de las variables tal que $A = B$.

4) Determinar los valores de las variables, tales que las matrices dadas

$$A = \begin{pmatrix} 3x + 2y & 0 & 1 \\ z & 5x - 3y & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 3w - z \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ sean iguales.}$$

5) Escribir las matrices siguientes:

- a) Una matriz fila de orden 1×4 , cuyos elementos sean pares.
- b) Una matriz columna de orden 5×1 , cuyos elementos sean impares.
- c) Una matriz nula de orden 3×4 .
- d) Una matriz diagonal de orden 5×5 , cuyos elementos de la diagonal principal sean primos.
- e) La matriz identidad de orden 4×4 .
- f) Una matriz escalonada de orden 4×5 .
- g) Una matriz simétrica, cuyos elementos de la diagonal principal sean pares.
- h) Una matriz de orden 3×3 la cual su traspuesta sea ella misma y todos sus elementos sean diferentes de cero.
- i) Una matriz triangular superior de orden 4×4 , y los elementos de la diagonal principal sean múltiplos de 3.

II. Operaciones con matrices

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$, efectuar las operaciones siguientes:

- a) $A + B$
- b) $A - B$
- c) $A + B + C$
- d) $A - B - C$
- e) $(A + C - B) - (A + B - C)$
- f) $2A - 3B + 4C$
- g) $5B + 2C - 6A$

2. Determinar los valores de las variables, tales que las ecuaciones matriciales siguientes sean verdaderas:

- a) $\begin{pmatrix} y & 1 \\ 2 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x & 3 \\ 5 & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 3x & 3 & z \\ 0 & -y & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2y & 4 & z \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- c) $2 \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 3y & 0 \\ 2 & 3z \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3y & 2 \\ x & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -6 & 9 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
- d) $3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & u \\ 1 & x & 3 \\ z & 2 & y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2y & 1 \\ x & 1 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 9 \\ 1 & 15 & 7 \\ -8 & 4 & -13 \end{pmatrix}$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ efectuar las operaciones siguientes, si es posible.

a) $A \times B$

d) $C \times B$

g) $2A^2 - 3D^2$

j) $B \times (A - D)$

m) $D \times A + 2(A^2 \times D^2) - 5A$

p) $B \times E$

s) $(A \times B) \times E$

v) $A \times B + 3E$

y) $(E^2 + E) - C \times B$

b) $B \times A$

e) $A^2 - B \times C$

h) $D \times B$

k) $(C \times B - E) \times C$

n) $A \times B - D \times B$

q) $E \times C$

t) $(A \times C) \times E$

w) $(E^T)^2 - E^3$

z) E^5

c) $A \times C$

f) $2(C \times B)$

i) E^2

l) $(E \times B) \times C$

o) $B \times C - E^2$

r) $E \times A$

u) $B \times E - E$

x) $(A + D) \times C$

4. Determinar el valor de la Matriz, en cada una de las ecuaciones matriciales siguientes:

a) $3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} - 5A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

b) $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con $a_{11} = a_{12} = a_{23}$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } 3 \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} - 4A = 2 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } 2 \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 3A = -3 \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } 5 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} + 3A = 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Una matriz de probabilidades es una matriz cuadrada que cumple 2 propiedades, la primera todos sus elementos son mayores o iguales a cero (≥ 0) y la segunda la suma de todos los elementos de cada fila es 1. Dadas A y B matrices de probabilidad probar que AxB o BxA son matrices de probabilidad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Un bufete de abogados cuenta, con 1 asesor de publicidad (\$700), 5 abogados (\$1500 c/u) y 2 secretarias (\$500 c/u), para diciembre han decidido aparte del salario mensual agregar un bono 15% para asesor de publicidad y abogados y del 20% para las secretarias:

- a) Exprese el pago y bono de dichas personas como una matriz de 2×3
- b) Exprese el número de trabajadores de dicho bufet como una matriz vector columna
- c) Utilice el producto de matrices para identificar el monto total de salarios y el monto total del bono.
- d) Cuál es el monto total que invierte el bufet en el mes de diciembre.

7. Una pupusería de los planes de Renderos, tiene 5 tipos de especialidades de pupusas, (FQ) frijol con queso (\$0.5 c/u), (Q) queso (\$0.75 c/u), (R) revueltas (\$0.5 c/u), (P) pollo (\$0.85 c/u) y (C) camarón (\$0.95 c/u), cierto día recibieron un pedido de la siguiente forma: 8 de frijol con queso, 5 de queso, 10 revueltas y 3 de camarón.

- a) Exprese los precios de las especialidades en una matriz vector fila
- b) Exprese el pedido una matriz vector columna
- c) Utilice el producto de matrices para conocer la cantidad de dinero que se obtuvo en dicho pedido

III. Matrices equivalentes

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, obtener una matriz equivalente en su forma diagonal, utilizando operaciones entre filas.
2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, obtener una matriz equivalente en su forma diagonal, utilizando operaciones entre filas.
3. Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, obtener una matriz equivalente en su forma escalonada, utilizando operaciones entre filas y el método del pivote.
4. Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, obtener una matriz equivalente en su forma identidad.
5. Sea la matriz $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, obtener una matriz equivalente en su forma escalonada, utilizando operaciones entre filas y el método del pivote.
6. Sea la matriz $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, obtener una matriz equivalente en su forma identidad.

IV. Para las matrices siguientes, calcular su matriz inversa, si es posible:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

$$3. \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

V. Utilizando el método de la matriz aumentada, resolver los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

$$1. \quad \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 3x - y = 15 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x - 3y + 2z = -5 \\ 2x - 2y + 4z = 18 \\ 5x + y - 3z = -30 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + y - 3z = -12 \\ 3x - y + 2z = 15 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ x + 2y = 8 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 3 \\ 2x - 3y - z = 14 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} 4x - 3y + z + 2w = 8 \\ x - 2y + 2z - w = 2 \\ x + 2y - 3z + w = -4 \\ 2x - y + 2z - 3w = -1 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ -3y + 6z + 2w = 7 \\ 6x + 2z - w = 14 \\ 2x - 3y + 2w = -5 \end{cases}$$

VI. Calcular el determinante de las matrices siguientes:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

7. $G = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

8. $H = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

VII. Aplicando el método de Sarrus, calcular el determinante de las matrices siguientes:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

6. $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

7. $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

8. $H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

VIII. Calcular el determinante de las matrices siguientes, aplicando el método de cofactores:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

IX. Determinar los valores de "x" tal que las ecuaciones siguientes sean verdaderas:

$$1. \quad \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 10$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} x+4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & x \end{vmatrix} = -4$$

$$3. \quad \begin{vmatrix} x & 0 \\ 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$4. \quad \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & 3 \end{vmatrix}$$

$$5. \quad \begin{vmatrix} x+4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{vmatrix}$$

$$6. \quad \begin{vmatrix} x+3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & 3 \end{vmatrix}$$

$$7. \quad \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & 1 & x \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$8. \quad \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & 1 & x \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

X. Aplicando el método del pivote, calcular los determinantes de las matrices siguientes:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad E = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad G = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

XI. Fundamentándose en las propiedades, determinar el valor de los determinantes siguientes:

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 5 & 13 & 5 \end{vmatrix} \text{ es?}$$

$$b) \text{ Si } |B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 8 & 5 & -2 \\ 9 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 335, \text{ entonces } \begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 5 & 8 & -2 \\ 11 & 9 & 4 \end{vmatrix} \text{ es?}$$

$$\text{c) } |C| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} \text{ es?}$$

$$\text{d) Si } |D| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 56, \text{ entonces } 3 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ es?}$$

$$\text{e) } |E| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 & -7 \\ 2 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \text{ es?}$$

$$\text{f) Si } |F| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 143, \text{ entonces } 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 11 & 6 & -2 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix} \text{ es?}$$

XII. Aplicar el método de Cramer, si es posible, para resolver los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

$$1. \quad \begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 5x - 4y = 56 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} x - y + 3z = 10 \\ 2x - 3y + z = -7 \\ -4x + 2y - z = 14 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 3x + y + 7z = 14 \\ 2x - y + 5z = 1 \\ x + 3y - 5z = -12 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} 2x + 2y - z = -4 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 5x + 4y - 6z = -17 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} 2x - 3y + z - w = -4 \\ x + y - 2z + w = -6 \\ x - 2y + 2z - 3w = 3 \\ 2x - 3y + z - w = -3 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ -3y + 6z + 2w = 7 \\ 6x + 2z - w = 14 \\ 2x - 3y + 2w = -5 \end{cases}$$

Resumen de fórmulas básicas

Operaciones con fracciones.

$$\frac{a}{b} = a \frac{1}{b} = \frac{1}{b} a$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Potencia y raíces.

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{n+1}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Logaritmos.

$$\log_b a = x \Rightarrow a = b^x$$

$$\log_{10} a = \log a$$

$$\log_e a = \ln a \quad \log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b (x^n) = n \log_b x$$

$$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{\log_b x}{n}$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Productos notables.

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Formula general.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Economía.

$$U = I - C_t$$

$$I = px$$

$$C_t = C_v + C_f$$

$$C_v = qx$$

U : utilidad

x : unidades producidas y vendidas

I : ingresos

C_t : costos totales

p : precio

C_f : costos fijos

q : costo por unidad

C_v : costos variables

Fórmulas de la recta.

Forma general: $Ax + By + C = 0$ con $A, B, C \in \mathbf{R}$

Dos puntos: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Pendiente-intercepto: $y = mx + b$

Ecuación simétrica o canónica: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Dadas las rectas.

$$L_1 = m_1x + b_1 \text{ y } L_2 = m_2x + b_2$$

Son paralelas si: $m_1 = m_2$

Son perpendiculares si: $m_1 \times m_2 = -1$ o $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Fórmulas de la parábola vertical.

Forma general: $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$

Ecuación ordinaria o canónica: $(x - h)^2 = -4p(y - k)$

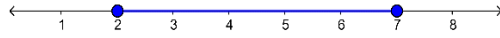
Forma alternativa de la canónica: $f(x) = a(x - h)^2 + k$ con vértice en (h, k) y se abre hacia abajo si $a < 0$ o hacia arriba si $a > 0$

$$a = -\frac{A}{C}, \quad h = -\frac{B}{2A} \text{ y } k = \frac{B^2}{4AC} - \frac{D}{C}$$

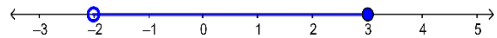
Soluciones a los ejercicios y problemas planteados

Parte I, capítulos I

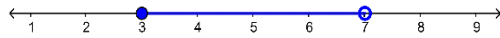
a) $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 7\}$



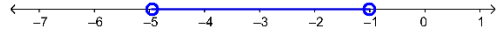
b) $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 3\}$



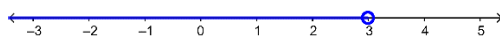
c) $C = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 7\}$



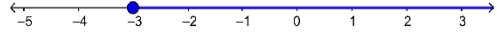
d) $D = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x < -1\}$



e) $E = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$

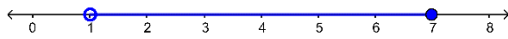


f) $F = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x\}$

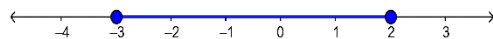


Parte II, capítulos I

a) $A = (1,7]$



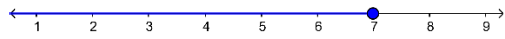
b) $B = [-3,2]$



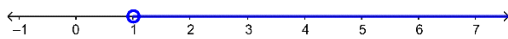
c) $C = [2,5)$



d) $D = (-\infty, 7]$



e) $E = (1, +\infty)$



f) $F = (-1,4)$



Parte III, capítulos I

a) $A \cup B = (-\infty, 7]$

b) $A \cup C = [2, 7]$

c) $B \cup C = (-\infty, 7)$

d) $A \cap B = [2, 3)$

e) $A \cap C = [3, 7)$

f) $B \cap C = \emptyset$

g) $A - B = [3, 7]$

h) $B - A = (-\infty, 2)$

i) $B - C = (-\infty, 3)$

j) $C - B = [3, 7)$

k) $A - C = [2, 3)$

l) $C - A = \emptyset$

m) $A \cup B \cup C = (-\infty, 7]$

n) $A \cap B \cap C = \emptyset$

o) $A \cup (B \cap C) = [2, 7]$

p) $A \cap (B \cup C) = [2, 7)$

q) $A - (B \cup C) = \{7\}$

r) $B \cup (A \cap C) = (-\infty, 7)$

s) $B - (A \cap C) = (-\infty, 3)$

t) $B - (A \cup C) = (-\infty, 2)$

u) $(A - B) \cup (A - C) = [2, 7]$

Parte IV, capítulos I

- | | | |
|--|--|--|
| a) $x \in (-\infty, 2]$ | b) $x \in (-3, +\infty)$ | c) $x \in \left[\frac{5}{2}, 5\right)$ |
| d) $x \in \left[-6, -\frac{13}{3}\right)$ | e) $x \in \left(-\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$ | f) $x \in [-16, 8)$ |
| g) $x \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$ | h) $x \in \left(-\infty, -\frac{6}{7}\right)$ | i) $x \in \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ |
| j) $x \in \left[-\frac{3}{7}, +\infty\right)$ | k) $x \in (-\infty, +\infty)$ | l) Sin solución. |
| m) $x \in (2, 4]$ | n) Sin solución. | o) $x \in \left(-\infty, \frac{21}{8}\right]$ |
| p) $x \in \left(\frac{81}{5}, +\infty\right)$ | | |

Parte V, capítulos I

- | | |
|---|--|
| a) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ | b) $x \in \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$ |
| c) $x \in (-\infty, -0.2573] \cup [2.5907, +\infty)$ | d) $x \in (-\infty, -5.5678) \cup (5.5678, +\infty)$ |
| e) $x \in (-0.65, 4.65)$ | f) $x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ |
| g) $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$ | h) $x \in (-4, 5)$ |
| i) $x \in [-16, 4]$ | j) $x \in (-\infty, -4) \cup (-3, 3) \cup (4, +\infty)$ |

Parte VI, capítulos I

- | | |
|---|---|
| a) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (4, +\infty)$ | b) $x \in [-19, -1)$ |
| c) $x \in (-\infty, -1.3523] \cup [10.3523, +\infty)$ | d) $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{7}\right)$ |
| e) $x \in \left(4, \frac{14}{3}\right]$ | f) $x \in \left(-1, -\frac{2}{3}\right]$ |
| g) $x \in (-1, -0.5616) \cup (1, 3.5616)$ | h) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{11}{8}, +\infty\right)$ |

i) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1,5)$

j) $x \in (-1,1)$

Parte VII, capítulos I

1. 150 *productos o más.*

2. 151 *artículos o más.*

3. 200 *artículos o más.*

4. 114 *kg o menos.*

5. 41 *artículos o más.*

6. 1601 *empaques o más.*

7. 120001 *productos o más.*

8. 11 *productos o más.*

9. 334 *camas o más.*

10. a) 701 *artículos o más.* b) 800 *artículos o más.*

Parte VIII, capítulos I

a) $x = 3, \quad y = 0$

b) $x = 1, \quad y = 2$

c) No tiene solución

d) $x \in R, \quad y = 3$

e) $x = 1, \quad y = 1$

f) $x = 3, \quad y = 1$

Parte IX, capítulos I

a) $R = \{(2,2), (2,4), (3,4), (2,6), (3,6)\}$
 $\{(5,6), (2,8), (3,8), (5,8), (7,8)\}$

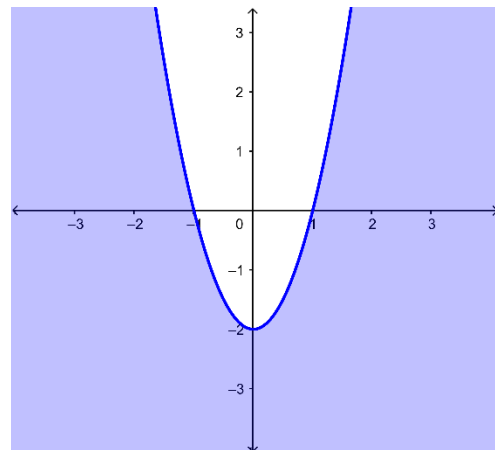
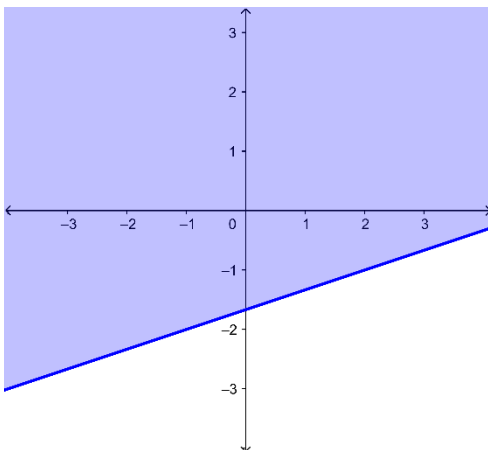
b) $R = \{(3,2), (5,4), (7,6)\}$

c) $R = \emptyset$

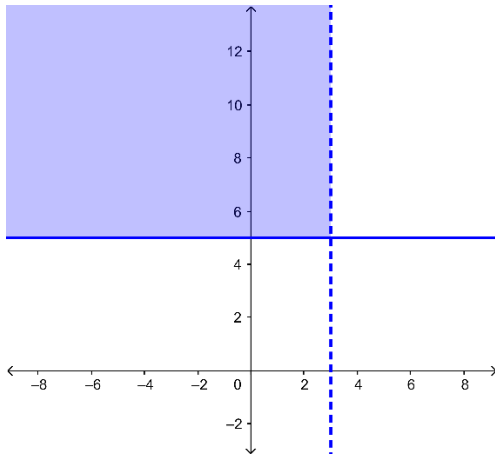
Parte X, capítulos I

a) $D_R = R \text{ y } R_R = R$

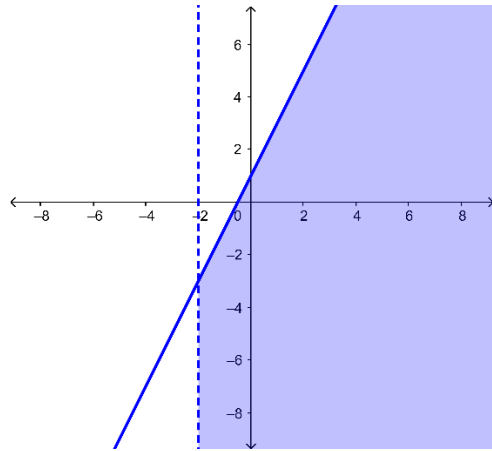
b) $D_R = R \text{ y } R_R = R$



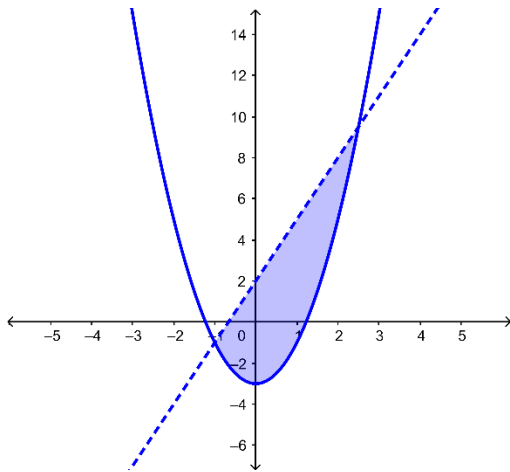
c) $D_R = (-\infty, 3) \vee R_R = [5, +\infty)$



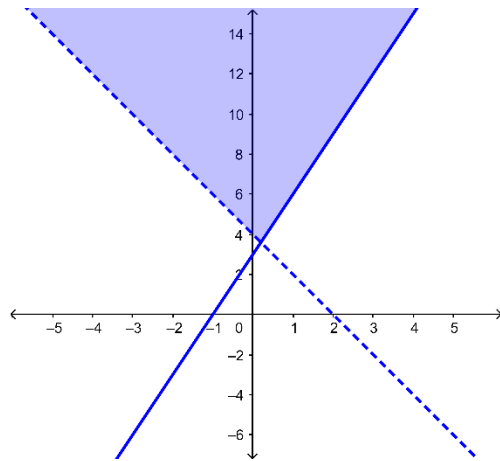
d) $D_R = (-2, +\infty) \vee R_R = R$



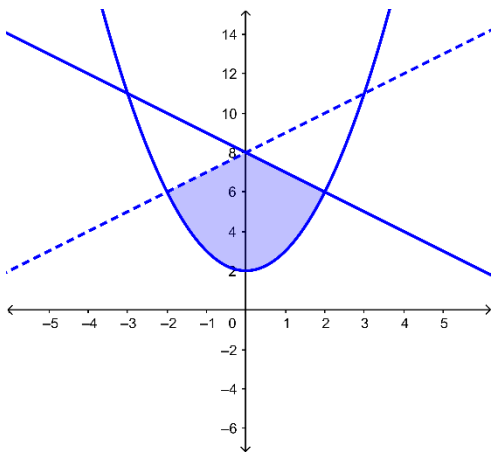
e) $D_R = (-1, 2.5) \vee R_R = [-3, 9.5)$



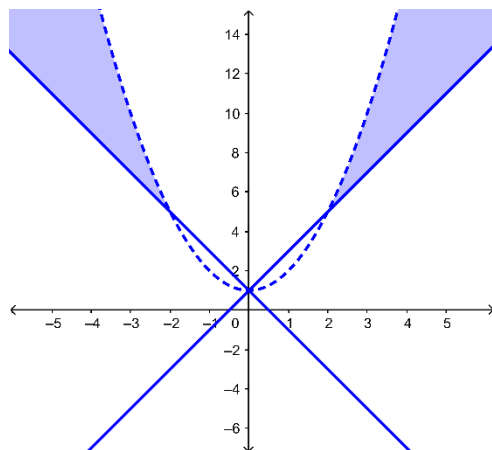
f) $D_R = R \vee R_R = (3, 6, +\infty)$



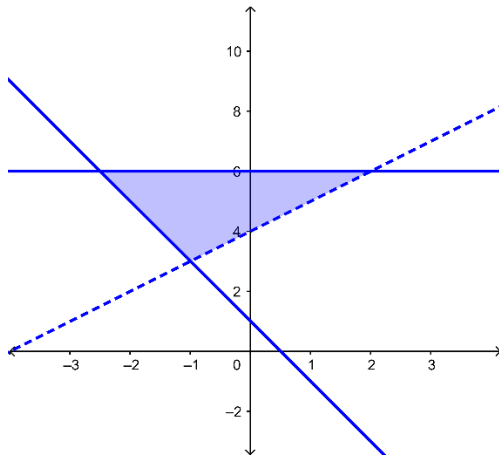
g) $D_R = (-2, 2] \vee R_R = [2, 8)$



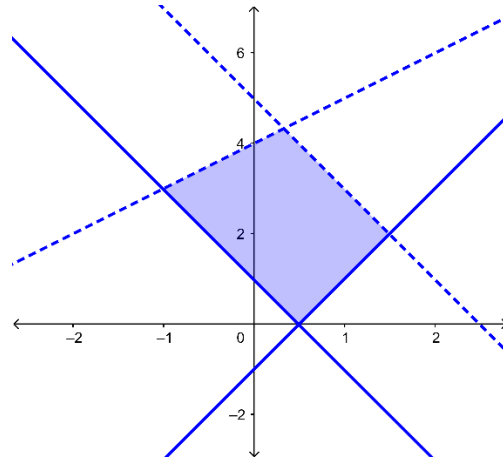
h) $D_R = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \vee R_R = (5, +\infty)$



i) $D_R = [-2.5, 2)$ y $R_R = (2.7, 6]$



j) $D_R = (-1, 1.5)$ y $R_R = [0, 4.33)$



Parte I, capítulos II

a) $f(-2) = -8$; $f(0) = -2$; $f(2) = 4$

b) $f(-1) = 7$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$; $f(3) = 11$

c) $f(-2) = -\frac{7}{4}$; $f(0) = -\frac{1}{2}$;
 $f(2)$ no está definida.

d) $f(-3)$ no está definida.
 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$; $f\left(\frac{4}{3}\right) = 3$

e) $f(-\sqrt{3}) = 3$; $f(\sqrt{10}) = 4$; $f(\sqrt{19}) = 5$

Parte II, capítulos II

a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

c) $D_f = \mathbb{R} - \{-5, 4\}$

d) $D_f = \mathbb{R}$

e) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

f) $D_f = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$

g) $D_f = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup [3, +\infty)$

h) $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

i) $D_f = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

j) $D_f = \emptyset$

k) $D_f = (-3, 3)$

l) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Parte III, capítulos II

a) $m = -5$

b) $m = 0$

c) $m = -1$

d) $m = 0$

e) $m = -1$

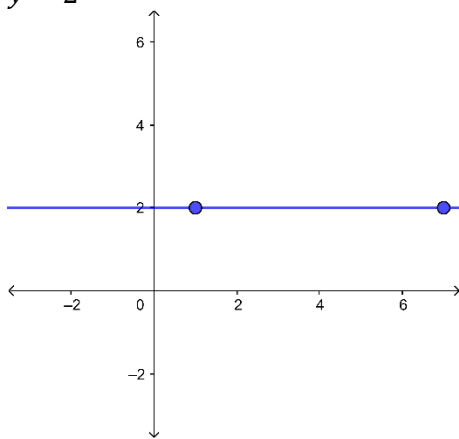
f) No tiene pendiente.

g) No tiene pendiente.

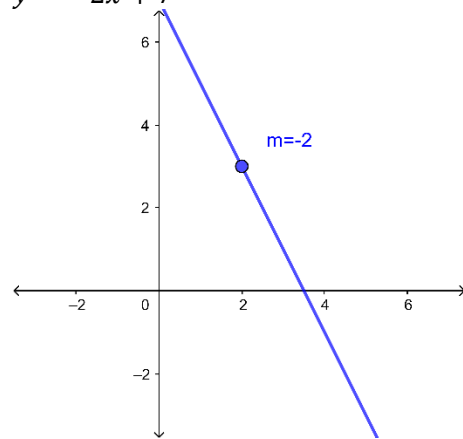
h) $m = -\frac{1}{3}$

Parte IV, capítulos II

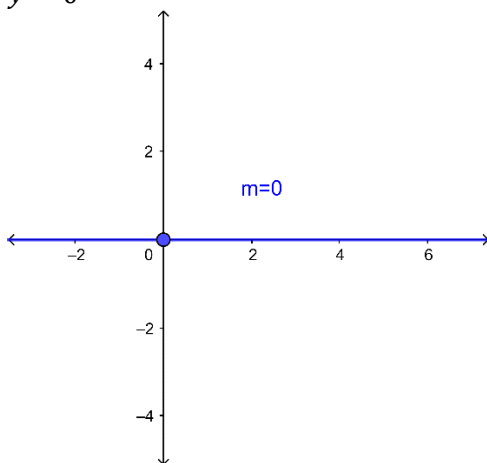
a) $y = 2$



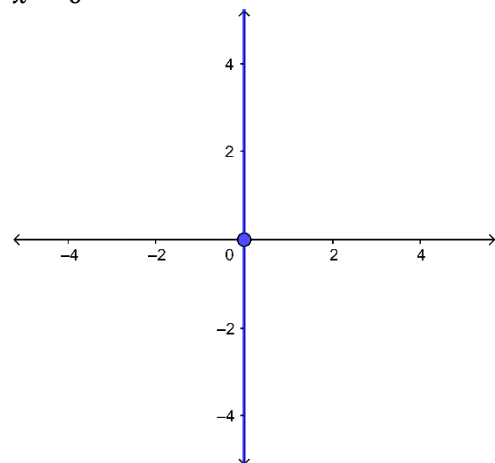
b) $y = -2x + 7$



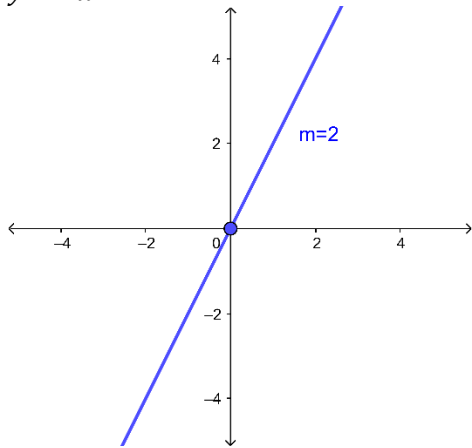
c) $y = 0$



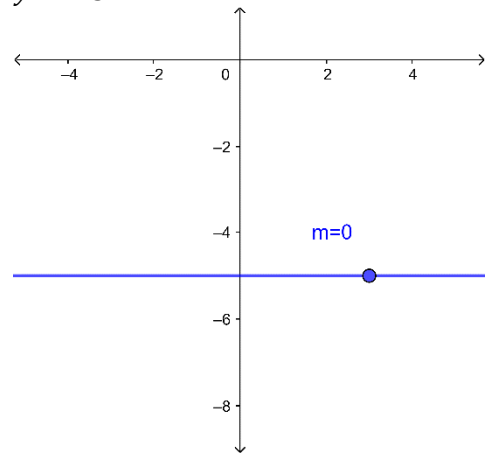
d) $x = 0$



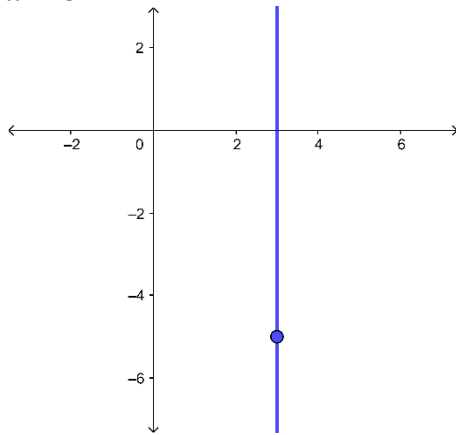
e) $y = 2x$



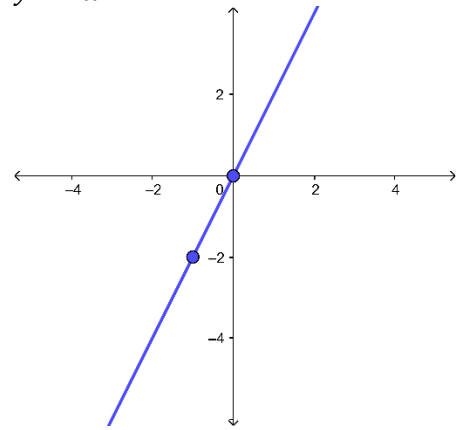
f) $y = -5$



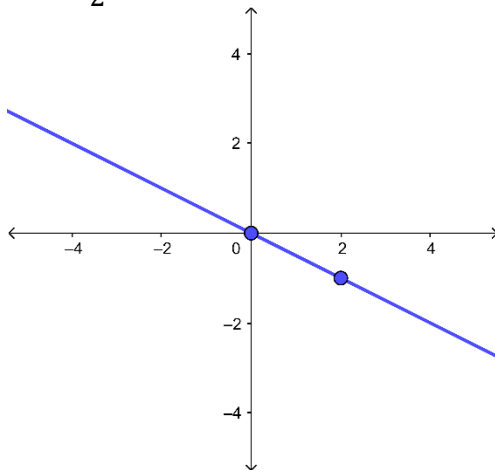
g) $x = 3$



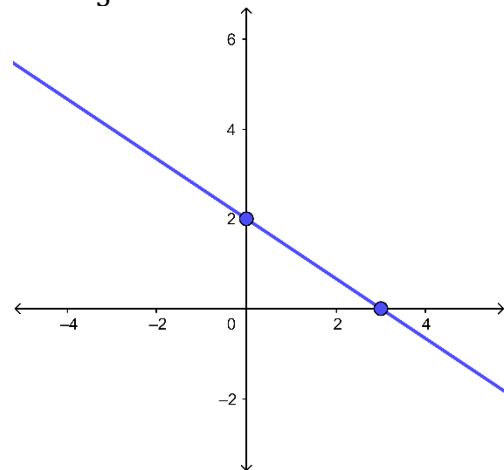
h) $y = 2x$



i) $y = -\frac{1}{2}x$

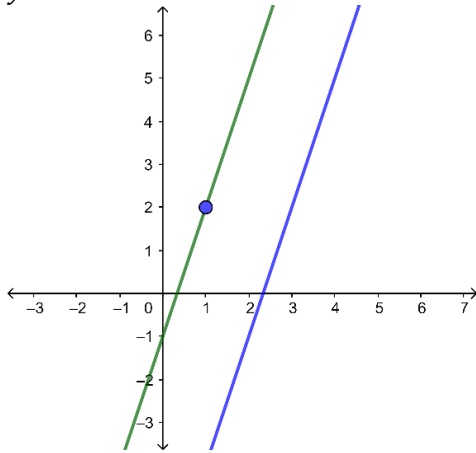


j) $y = -\frac{2}{3}x + 2$

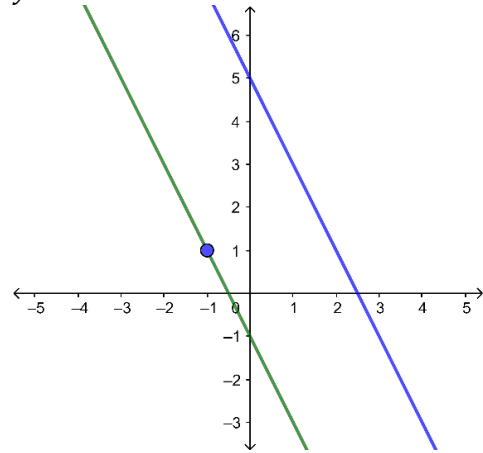


Parte V, capítulos II

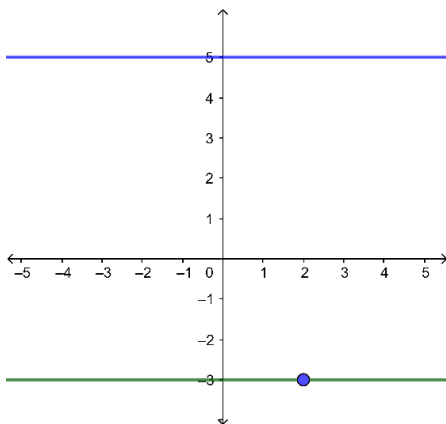
a) $y = 3x - 1$



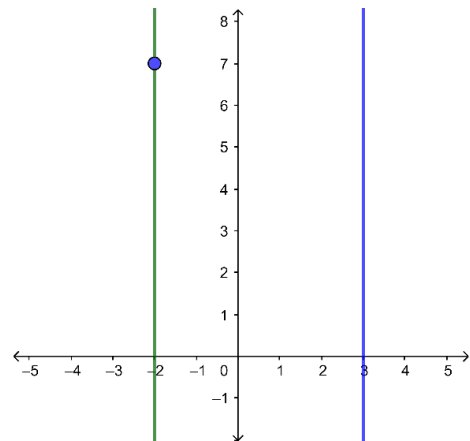
b) $y = -2x - 1$



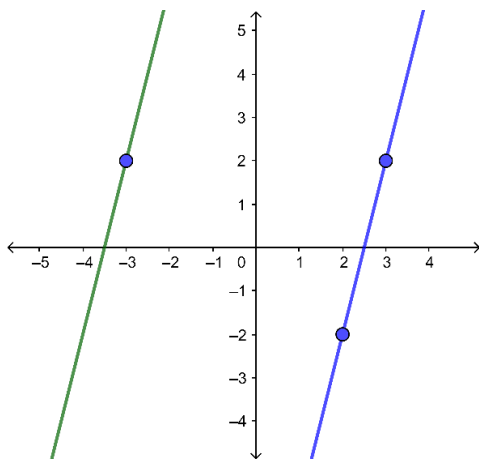
c) $y = -3$



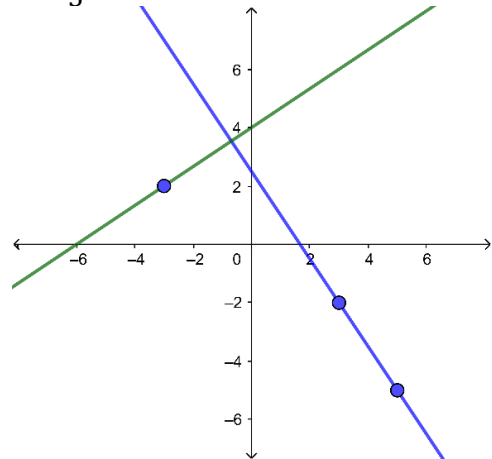
d) $x = -2$



e) $y = 4x + 14$



f) $y = \frac{2}{3}x + 4$



Parte VI, capítulos II

a) Paralelas.

b) Perpendiculares.

c) Secantes.

d) Perpendiculares.

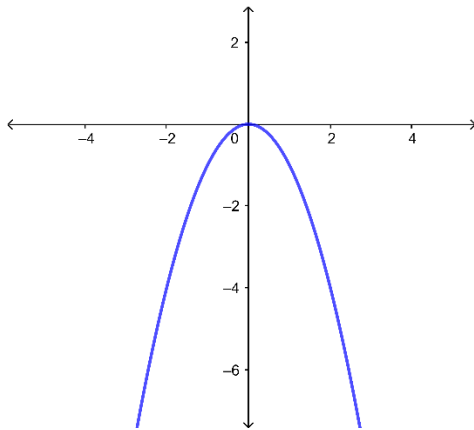
e) Secantes.

f) Paralelas.

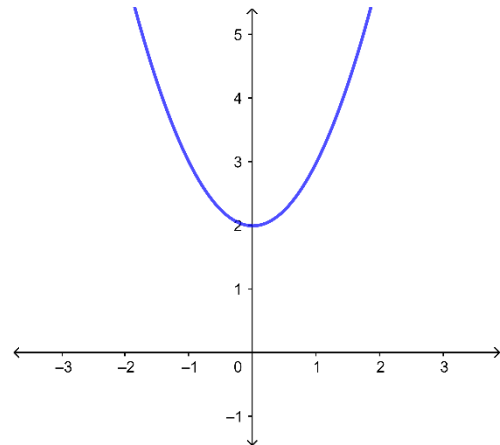
Parte VII, capítulos II

Para los literales del a) al f) el dominio es los reales.

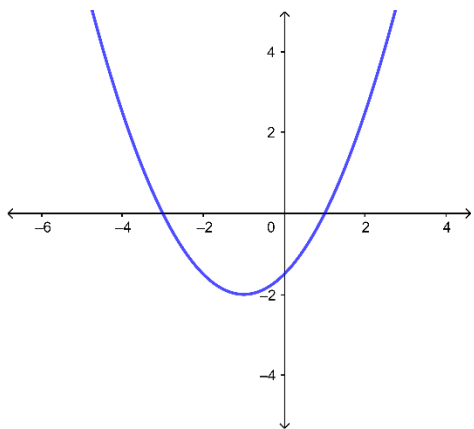
a) $y = -x^2; R_f = (-\infty, 0]$



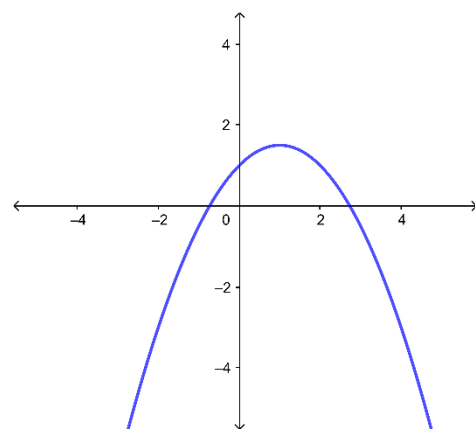
b) $y = x^2 + 2; R_f = [2, +\infty)$



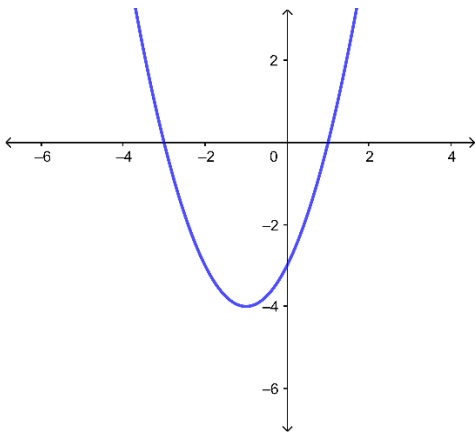
c) $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2; R_f = [-2, +\infty)$



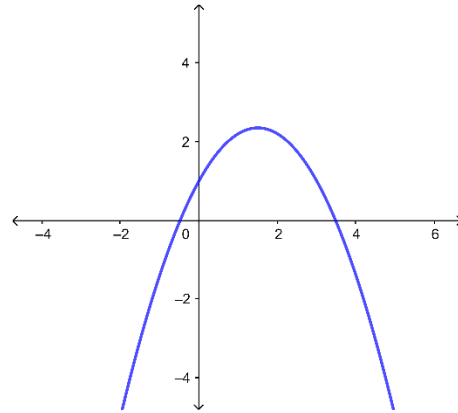
d) $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{3}{2}; R_f = (-\infty, \frac{3}{2}]$



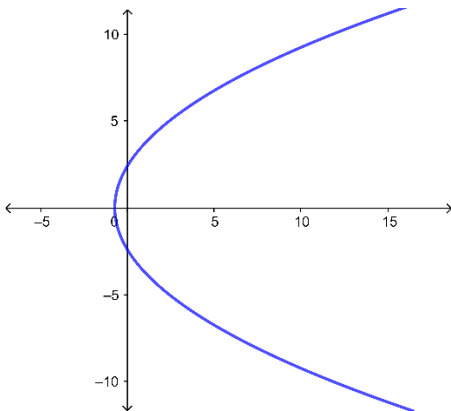
e) $y = (x + 1)^2 - 4; R_f = [-4, +\infty)$



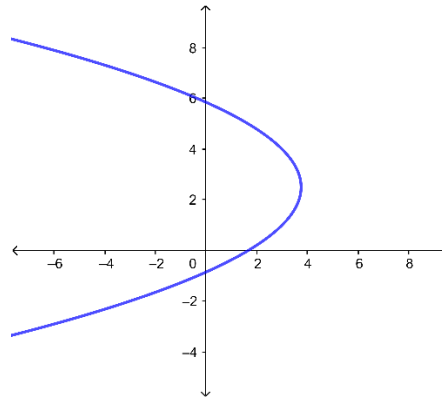
f) $y = -\frac{3}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{47}{20}; R_f = \left(-\infty, \frac{47}{20}\right]$



g) $x = \frac{1}{8}y^2 - \frac{3}{4}$
 $D_R = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right); R_R = R$



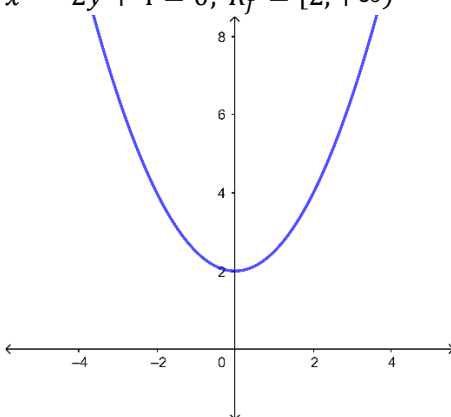
h) $x = -\frac{1}{3}\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$
 $D_R = \left(-\infty, \frac{15}{4}\right]; R_R = R$



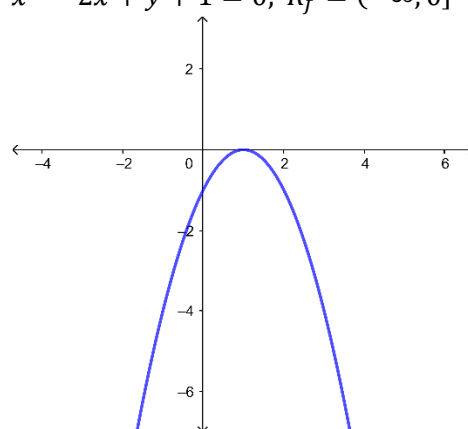
Parte VIII, capítulos II

Para los literales del a) al f) el dominio es los reales.

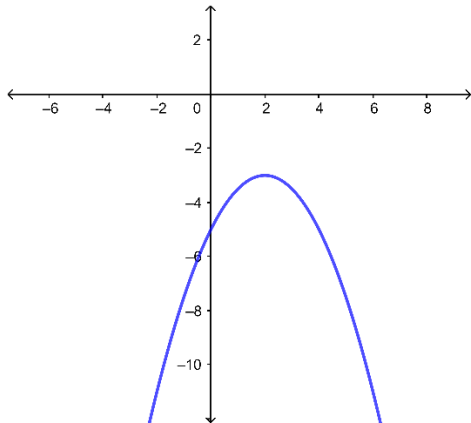
a) $x^2 - 2y + 4 = 0; R_f = [2, +\infty)$



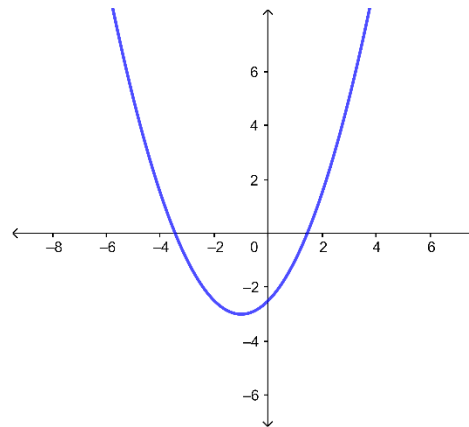
b) $x^2 - 2x + y + 1 = 0; R_f = (-\infty, 0]$



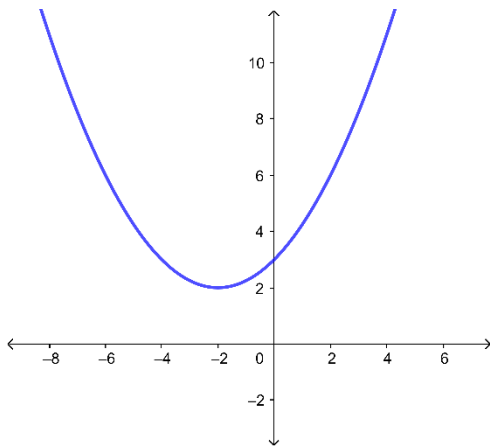
c) $x^2 - 4x + 2y + 10 = 0$; $R_f = (-\infty, -3]$



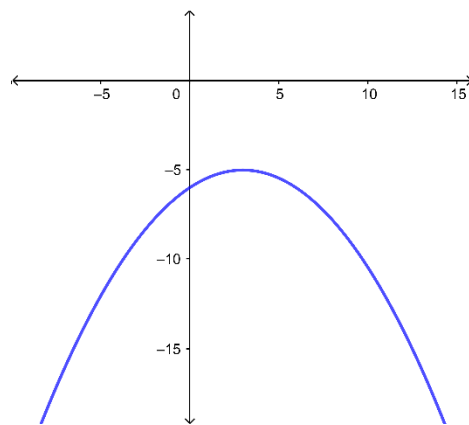
d) $x^2 + 2x - 2y - 5 = 0$; $R_f = [-3, +\infty)$



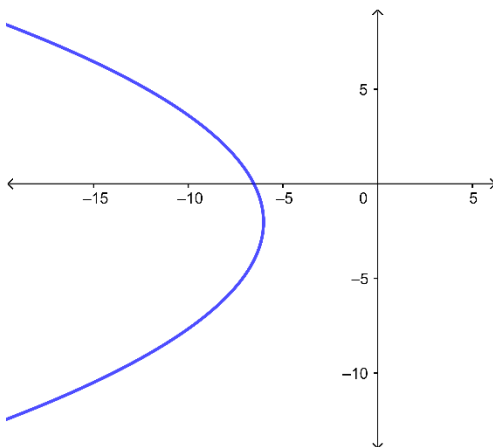
e) $x^2 + 4x - 4y + 12 = 0$; $R_f = [2, +\infty)$



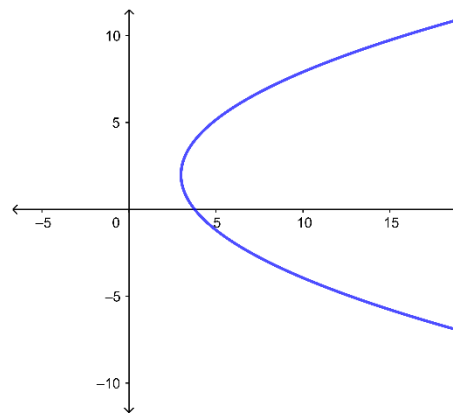
f) $x^2 - 6x + 9y + 54 = 0$; $R_f = (-\infty, -5]$



g) $y^2 + 4y + 8x + 52 = 0$
 $D_R = (-\infty, -6]$; $R_R = R$



h) $y^2 - 4y - 5x + 19 = 0$
 $D_R = [3, +\infty)$; $R_R = R$



Parte IX, capítulos II

a) $f(x) + g(x) = 5x - 2$
 $f(x) - g(x) = x + 4$
 $f(x) * g(x) = 6x^2 - 7x - 3$
 $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f*g} = R$

$$f(x)/g(x) = \frac{3x + 1}{2x - 3}$$

$$D_{f/g} = R - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

c) $f(x) + g(x) = x^2 + 4$
 $f(x) - g(x) = -x^2 - 4x + 2$
 $f(x) * g(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 3$
 $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f*g} = R$

$$f(x)/g(x) = \frac{3 - 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

$$D_{f/g} = R - \{-1\}$$

e) $f(x) + g(x) = 6$
 $f(x) - g(x) = 2\sqrt{x} - 6$
 $f(x) * g(x) = 6\sqrt{x} - x$
 $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f*g} = [0, +\infty)$

$$f(x)/g(x) = \frac{\sqrt{x}}{6 - \sqrt{x}}$$

$$D_{f/g} = [0, +\infty) - \{36\}$$

b) $f(x) + g(x) = x^2 + 4x - 1$
 $f(x) - g(x) = -x^2 - 1$
 $f(x) * g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$
 $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f*g} = R$

$$f(x)/g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 2}$$

$$D_{f/g} = R$$

d) $f(x) + g(x) = 2x^2$
 $f(x) - g(x) = 18$
 $f(x) * g(x) = x^4 - 81$
 $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f*g} = R$

$$f(x)/g(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$$

$$D_{f/g} = R - \{-3, 3\}$$

Parte X, capítulos II

a) $f(g(x)) = 6x - 8$
 $g(f(x)) = 6x - 1$

b) $f(g(x)) = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 1$
 $g(f(x)) = 4x^4 - 1$

c) $f(g(x)) = \sqrt{1 - 2x^2}$
 $g(f(x)) = -2x + 4$

d) $f(g(x)) = \frac{x^2}{x^2 - 8}$
 $g(f(x)) = \frac{72 - 8x^2}{x^2 + 2x + 1}$

e) $f(g(x)) = \sqrt{6 - x^2}$
 $g(f(x)) = 6 - x$

Parte XI, capítulos II

a) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

b) $f^{-1}(x) = \pm \sqrt{\frac{5-x}{3}}$

c) $f^{-1}(x) = -2x + 3$

d) $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 2}{3}$

e) $f^{-1}(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

f) $f^{-1}(x) = \frac{3-x^2}{4}$

g) $f^{-1}(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3$

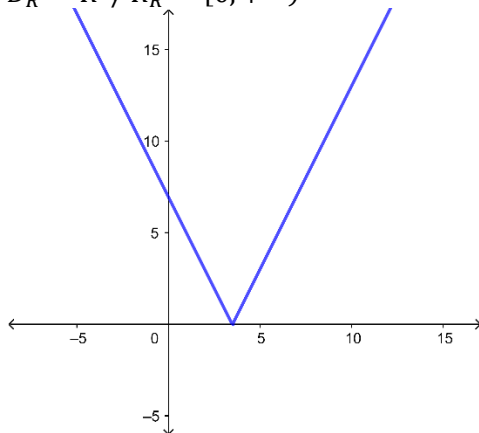
h) $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2}$

i) $f^{-1}(x) = \frac{3x^2 + 4}{2x^2}$

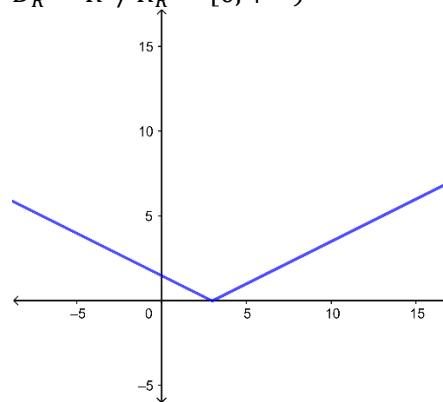
j) $f^{-1}(x) = \pm \sqrt{\frac{3x+21}{2}}$

Parte XII, capítulos II

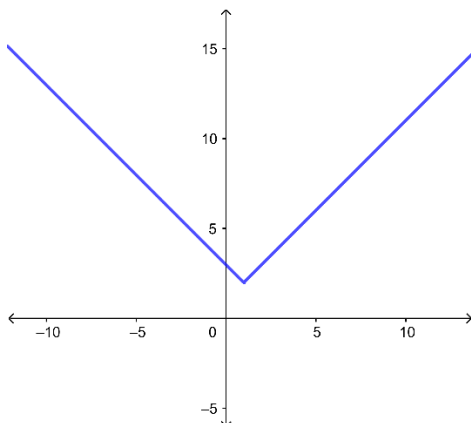
a) $D_R = R \text{ y } R_R = [0, +\infty)$



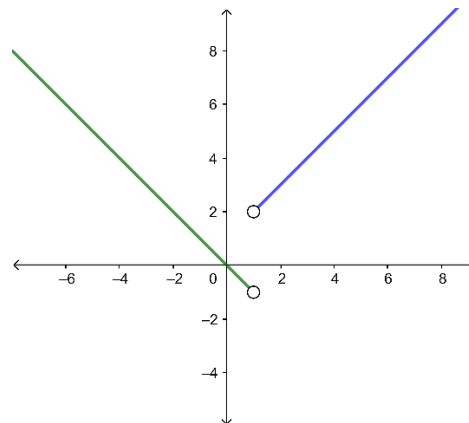
b) $D_R = R \text{ y } R_R = [0, +\infty)$



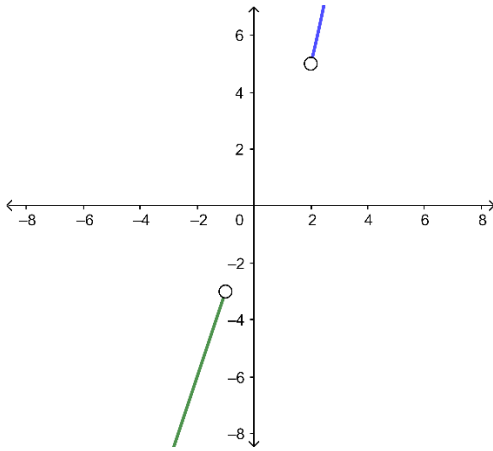
c) $D_R = R \text{ y } R_R = [2, +\infty)$



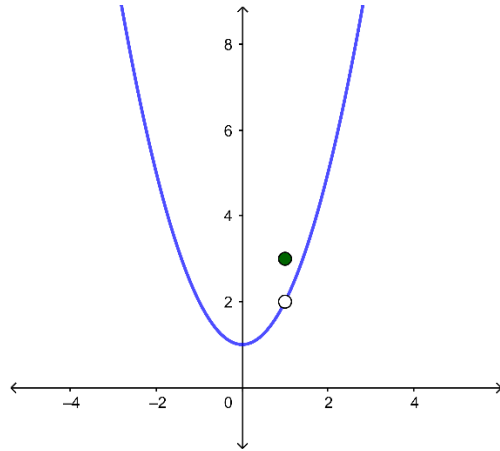
d) $D_R = R - \{1\} \text{ y } R_R = (-1, +\infty)$



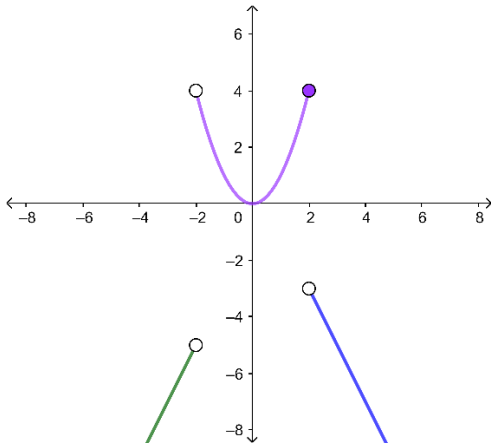
e) $D_R = R - [-1,2]$ y $R_R = R - [-3,5]$



f) $D_R = R$ y $R_R = [1, +\infty)$

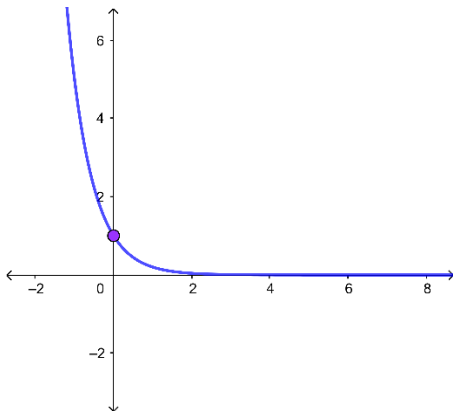


g) $D_R = R - \{-2\}$ y $R_R = R - [-3,0]$

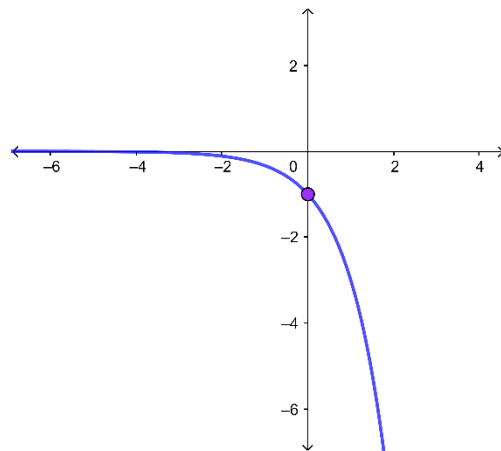


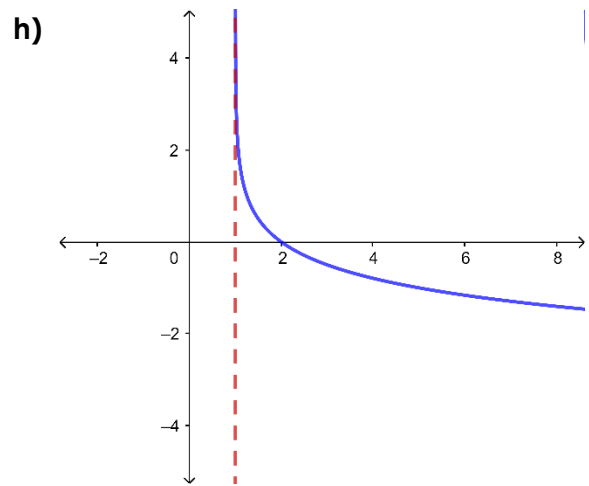
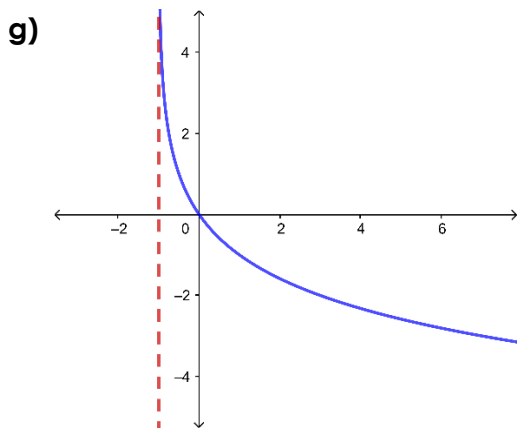
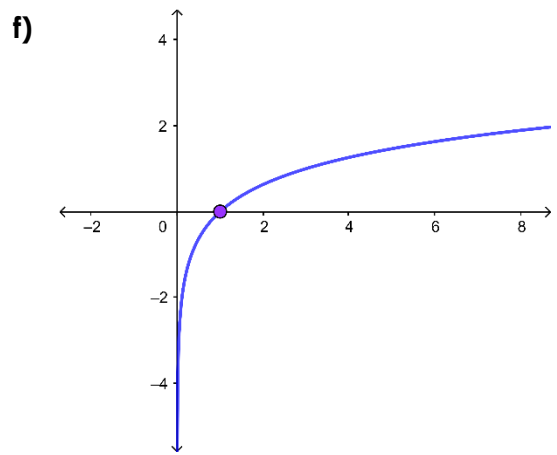
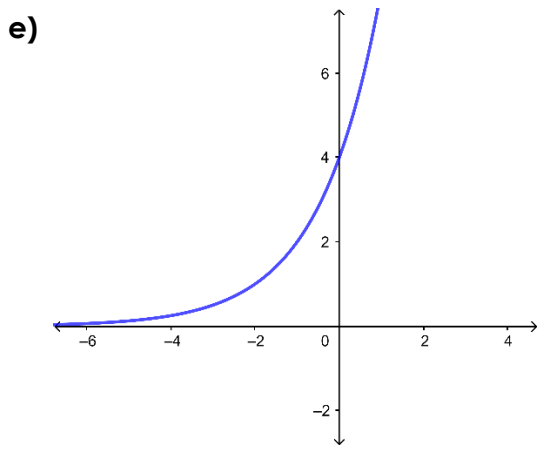
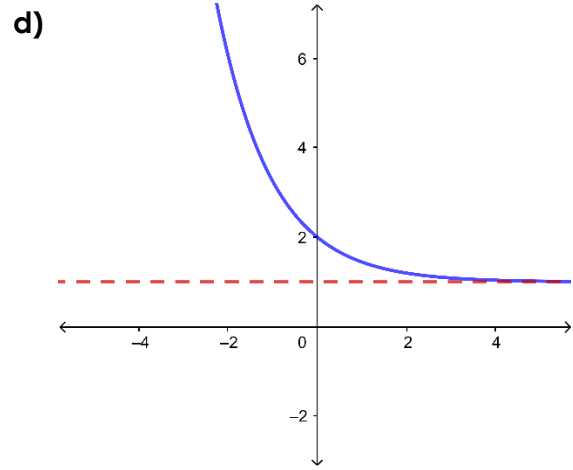
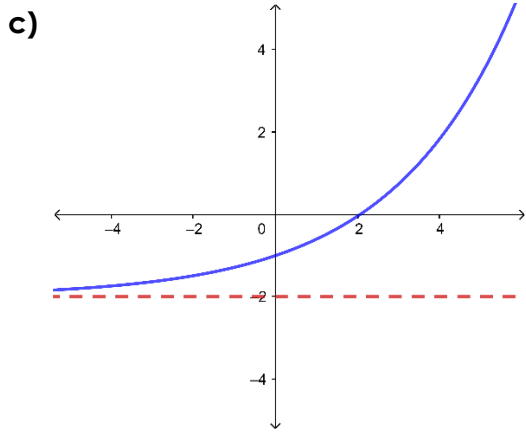
Parte XIII, capítulos II

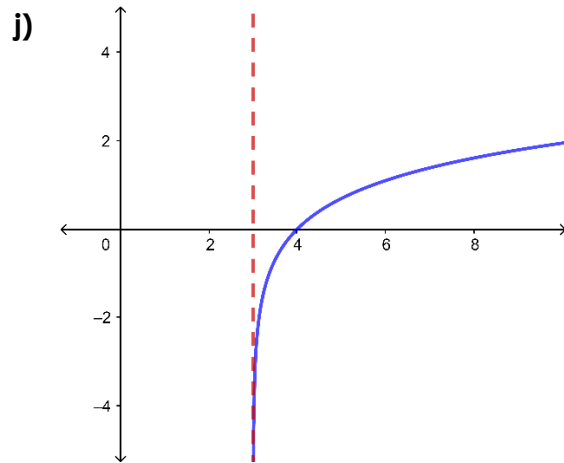
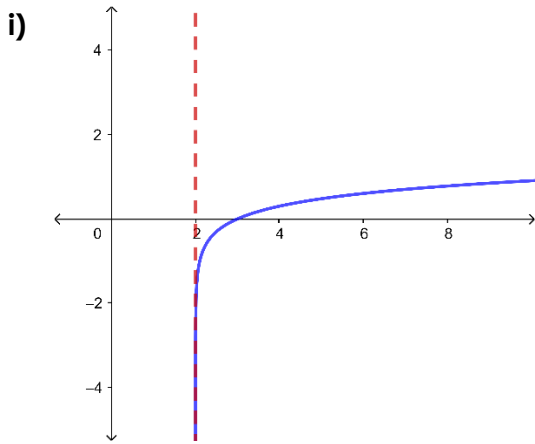
a)



b)







Parte XIV

a) $\log_2(8) = 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(32) = -5$

c) $\log_{\frac{7}{5}}\left(\frac{49}{25}\right) = 2$

d) $\log_{\frac{4}{9}}\left(\frac{81}{16}\right) = -2$

e) $\log_4(32) = \frac{5}{2}$

f) $\log_{81}(27) = \frac{3}{4}$

g) $\log_{16}(2) = -\frac{1}{4}$

h) $\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

Parte XV

a) $10^2 = 100$

b) $e^3 = e^3$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{25}$

e) $16^{\frac{5}{4}} = 32$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$

Parte XI

a) $\frac{1}{3}\log 2 + \frac{2}{3}\log a + \frac{5}{3}\log b - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{3}{2}\log c$

b) $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln x + \frac{3}{2}\ln y - \ln 5 - 5\ln z$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} x - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x - y) - 3\log_{\frac{1}{2}}(x + y)$

d) $2\log_3(x - 1) + \frac{3}{5}\log_3(y + z)$

e) $\ln 7 + \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{3} \ln y - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \ln z$

f) $5 \log_5(x+z) + \frac{5}{3} \log_5(x-y)$

Parte XVII, capítulos II

a) $\log\left(\frac{x^2}{y^3}\right)$

b) $\ln\left(\frac{x^5 y}{e^3}\right)$

c) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2x^3}\right)$

d) $\log_5\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{25\sqrt{b^3}}\right)$

e) $\ln\left(\frac{2e^y}{a^3 e^x}\right)$

f) $\log_3 \frac{\sqrt{(x-1)}}{\sqrt[5]{(y+z)^3}}$

Parte XVIII, capítulos II

a) $x = 9$

b) $x = 2$

c) $x = 8$

d) $x = 2$

e) $x = 2$

f) $x = 2 + 2\sqrt{2}$

g) $x = \sqrt[3]{16807}$

h) $x = 12$

i) $x = 128$

j) $x = \frac{568}{161}$

Parte XIX, capítulos II

a) $x = -2$

b) $x = -1, x = 2$

c) $x = 0$

d) $x = -\frac{1}{2}$

e) $x = 7$

f) $x = \pm\sqrt{7}$

g) $x = 2$

h) $x = 2, x = \log_2 6$

Parte XX, capítulos II

a) $p = -q + 100$
Si el precio es \$40 se venderían 60 libros.

b) $p = -\frac{1}{50}q + 11$
Si el precio es \$11 el cine estaría vacío.

c) $p = -\frac{5}{2}q + 225$
Si el precio es \$125 se venderían 40 pares de zapatos.

d) $p = 0.02q + 1.86$
Si el precio es de \$2.1 el propietario ofertaría 12 botellas.

- e) $p = \frac{1}{50}q + 8$
 Si el precio es de \$15 el propietario ofertaría 350 pollos, si el precio fuese \$8 no ofertaría.

- f) Ecuación de oferta.

$$p = \frac{7}{27000}q + 1$$

Ecuación de demanda.

$$p = -\frac{1}{900}q + 19.5$$

- g) i) $C(x) = 34x + 1200$
 $I(x) = 94x$

- h) El punto de equilibrio es (120,110).

Si el precio fuese \$90, fuese mayor la demanda.

ii) Punto muerto (20,1880).

iii) se pierden \$600.

iv) se ganan \$1800.

Parte XXI, capítulos II

i) $I_x = \left(-\frac{7}{3}, 0\right) \quad I_y = \left(0, \frac{7}{5}\right)$

j) $I_x = \left(\frac{9}{2}, 0\right) \quad I_y = \left(0, \frac{9}{7}\right)$

k) $I_x = (-6, 0), (1, 0) \quad I_y = (0, -3)$

l) $I_x = (-1, 0), (4, 0) \quad I_y = \left(0, \frac{4}{5}\right)$

m) $I_x = \left(\frac{25}{2}, 0\right) \quad I_y = \left(0, \frac{5}{2}\right)$

n) $I_x = (3, 0) \quad I_y = (0, 12)$

o) $I_x = (-8, 0) \quad I_y = (0, -8)$

p) $I_x = \left(\frac{6}{5}, 0\right) \quad I_y = \left(0, \frac{3}{2}\right)$

Parte I, capítulos III

1)

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -4 & -11 \\ -1 & -8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -2 \\ 11 & 8 & 1 & 0 \\ 26 & 23 & 12 & 3 \\ 47 & 44 & 39 & 16 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 12 & 4 & 4 \\ -1 & -4 & 27 & 9 \\ -1 & -4 & -9 & 48 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

g) $G = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 6 & 10 & 14 & 18 \\ 9 & 15 & 21 & 27 \end{pmatrix}$

2)

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 8.5 & 8.25 \\ 15 & 12.75 & 12 \end{pmatrix}$$

a_{12} precio unitario del short traído de China.

a_{11} precio unitario del pantalón traído de China.

a_{22} precio unitario del short traído de Italia.

a_{31} no existe este elemento ya que la matriz es de 2×3 .

3)

$$a = 1, \quad v = 0, \quad w = -1, \quad x = 4, \quad y = 7, \quad z = -3$$

4)

$$w = 1, \quad x = 2, \quad y = 4, \quad z = 2$$

Parte II, capítulos III

1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 13 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 0 & 0 \\ -24 & 6 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 10 & -25 \\ -5 & 17 \\ -37 & 20 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -21 \\ -7 & -38 \end{pmatrix}$

2.

a) $x = 2, \quad y = 3$

b) $x = -1, \quad y = 1, \quad z = 2$

c) $x = 2, \quad y = -2, \quad z = -1$

d) $u = 3, \quad x = 1, \quad y = -3, \quad z = -2$

3.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 14 & 5 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

b) No se puede realizar.

c) No se puede realizar.

e) $\begin{pmatrix} 3 & 11 & -3 \\ 3 & 4 & 19 \\ 10 & 16 & 9 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -17 & 20 & 12 \\ 0 & 35 & 20 \\ 22 & 40 & 3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 6 & 40 & -32 \\ 5 & 17 & -15 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} -6 & 15 & 1 \\ -84 & 26 & 92 \\ -18 & 25 & 45 \end{pmatrix}$

o) No se puede realizar.

q) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

s) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 24 & -5 \\ 48 & -15 \end{pmatrix}$

u) No se puede realizar.

w) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

y) $\begin{pmatrix} -3 & -14 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 10 & 28 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

j) No se puede realizar.

l) No se puede realizar.

n) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 11 & 2 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

r) No se puede realizar.

t) No se puede realizar.

v) No se puede realizar.

x) No se puede realizar.

z) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4.

a) $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -9 & 7 \\ 3 & 1 & 19 \\ 12 & 6 & -10 \end{pmatrix}$

c) $A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ -29 & -10 \end{pmatrix}$

e) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 23 & 15 & -4 \\ 8 & 2 & 27 \\ 23 & 1 & 13 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -10 & 15 & -5 \\ 15 & -5 & 10 \\ 5 & -15 & -10 \end{pmatrix}$

f) $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -14 & -12 & -10 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

g) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -11 & -8 \\ 16 & -12 & -15 \\ -11 & 3 & -24 \end{pmatrix}$

h) $A = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -10 & -13 \\ 29 & 19 \end{pmatrix}$

5.

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{3} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{3} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}$$

Matriz de probabilidad.

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{23}{36} & \frac{7}{36} & \frac{1}{6} \\ \frac{37}{72} & \frac{17}{72} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de probabilidad.

6.

a) $A = \begin{pmatrix} 700 & 1500 & 500 \\ 225 & 105 & 100 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $AB = \begin{pmatrix} 9200 \\ 950 \end{pmatrix}$

d) \$10150

7.

a) $A = (0.5 \quad 0.75 \quad 0.5 \quad 0.85 \quad 0.95)$

b) $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $AB = (15.6)$

Parte III, capítulos III

1. $\begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

3. $f: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -120 \end{pmatrix} \quad p: \begin{pmatrix} 18 & 0 & 24 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -120 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$5. \quad f: \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -56 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 112 \end{pmatrix}$$

$$p: \begin{pmatrix} -112 & 0 & 0 & -112 \\ 0 & 112 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & -56 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 112 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parte IV, capítulos III

$$7. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$11. \quad E^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 10 & 1 & -15 \\ 14 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$13. \quad G^{-1} = \frac{1}{123} \begin{pmatrix} 10 & -16 & -30 & 19 \\ -29 & 71 & -36 & 31 \\ -4 & 31 & 12 & 17 \\ 36 & -33 & 15 & -30 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad B^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

10. D^{-1} no existe.

$$12. \quad F^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -2 & -10 & 9 \\ 13 & -1 & -9 \\ 8 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$14. \quad H^{-1} = \frac{1}{97} \begin{pmatrix} -7 & 9 & -27 & 31 \\ -26 & 75 & -31 & 32 \\ 17 & 8 & 24 & -6 \\ 28 & -36 & 11 & -27 \end{pmatrix}$$

Parte V, capítulos III

$$1. \quad x = \frac{27}{19}, \quad y = -\frac{1}{19}$$

$$3. \quad x = -2, \quad y = 7, \quad z = 9$$

5. Sin solución.

$$7. \quad w = 3, \quad x = 1 \\ y = 2, \quad z = 4$$

$$2. \quad x = 4, \quad y = -3$$

$$4. \quad x = 2, \quad y = 5, \quad z = 7$$

$$6. \quad x = \frac{-2z + 65}{17}, \quad y = -\frac{17z + 36}{17}$$

$$8. \quad w = \frac{290}{49}, \quad x = \frac{117}{49} \\ y = \frac{353}{49}, \quad z = \frac{137}{49}$$

Parte VI, capítulos III

1. $|A| = -1$

3. $|C| = -6$

5. $|E| = 0$

7. $|G| = 14$

2. $|B| = -26$

4. $|D| = 78$

6. $|F| = -69$

8. $|H| = 56$

Parte VII, capítulos III

1. $|A| = 18$

3. $|C| = 4$

5. $|E| = -36$

7. $|G| = 30$

2. $|B| = -46$

4. $|D| = 0$

6. $|F| = 33$

8. $|H| = 12$

Parte VIII, capítulos III

1. $|A| = 4$

3. $|C| = -40$

5. $|E| = 234$

7. $|G| = -22$

2. $|B| = -27$

4. $|D| = -30$

6. $|F| = -18$

8. $|H| = -123$

Parte IX, capítulos III

1. $x = -4, \quad x = 4$

3. $x = 0, \quad x = 1$

2. $x = -2$

4. $x = 1 - \sqrt{7}, \quad x = 1 + \sqrt{7}$

5. $x = -\frac{3}{2}$

7. $x = -1, \quad x = -\frac{2}{7}$

6. $x = -1, \quad x = 0$

8. $x = \frac{1}{2}$

Parte X, capítulos III

1. $|A| = 4$

3. $|C| = -34$

5. $|E| = -78$

7. $|G| = 117$

2. $|B| = -57$

4. $|D| = -9$

6. $|F| = 2$

8. $|H| = -96$

Parte XI, capítulos III

a) $|A| = 0$

c) $|C| = 0$

e) $|E| = 0$

b) $|B| = -335$

d) $|D| = 168$

f) $|F| = 286$

Parte XII, capítulos III

1. $x = -14, \quad y = -13$

3. $x = 8, \quad y = -4,$

5. $x = -\frac{129}{17}, \quad y = \frac{100}{17}, \quad z = \frac{75}{17}$

7. Sin solución.

2. $x = \frac{26}{7}, \quad y = \frac{20}{7}$

4. $x = -\frac{29}{7}, \quad y = \frac{9}{7}, \quad z = \frac{36}{7}$

6. $x = -1, \quad y = 0, \quad z = 2$

8. $w = \frac{290}{49}, \quad x = \frac{117}{49}$

$y = \frac{353}{49}, \quad z = \frac{137}{49}$

Referencias bibliográficas

- **1a:** Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). Karl Friedrich Gauss [en línea]. Recuperado de <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/g/gauss.htm> el 15 de enero de 2023.
- **2a:** Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). Gabriel Cramer [en línea]. Recuperado de <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/cramer.htm> el 16 de enero de 2023.
- **3a:** Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). Pierre Sarrus [en línea]. Recuperado de <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/s/sarrus.htm> el 16 de enero de 2023.
- Grossman S. (2008), Algebra Lineal. México, McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S. A. de C.V.
- Haeusseler E., Paul R. & Wood R. (2008), Matemáticas para administración y economía. México, Pearson Educación.
- Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. (13 de abril de 2021). Matemáticas y simplicidad (por J.J. Sylvester y Sylvester S.). <https://institucional.us.es/blogimus/2021/04/matematicas-y-simplicidad-por-j-j-sylvester-y-sylvester-s/>
- Navarro M., Tortosa L. & Vincent J. (2020). Precálculo matemáticas para el cálculo. España, Publicaciones de la Universidad de Alicante.
- Stewart J., Redlin L. & Watson S. (2020). Las matrices y sus aplicaciones. México, Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Bibliografía complementaria

- Aufmann R. & Lockwood J. (2013). Álgebra elemental, México, Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Este texto es como un cimiento de conocimientos básicos e importantes en la matemática, debido a que el desarrollo de las clases ha sido un poco acelerado, es de suma importancia que los estudiantes, repasen conocimientos los cuales serán de suma importancia para la comprensión de los contenidos desarrollados en este texto, está compuesto por once capítulos entre los que se pueden destacar, operaciones aritméticas con los números reales, expresiones algebraicas y operaciones con las mismas, solución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros, para los cuales cuenta con una diversidad de ejercicios resueltos y problemas propuestos, con sus respectivas soluciones.

- Larson R. (2012). Precálculo, México, Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Este texto es muy útil para reforzar contenidos desarrollados en el material de texto propuesto, tales como funciones y sus gráficos, funciones exponenciales y logarítmicas y matrices, los cuales están desarrollados de forma muy ilustrada, con ejercicios resueltos, además de ejercicios propuestos con sus respectivas soluciones.

- Haeusseler E., Paul R. & Wood R. (2008), Matemáticas para administración y economía. México, Pearson Educación.

Aparte de reforzar contenido, descrito en el material realizado este texto, proporciona contenido que será de utilidad para los estudiantes, tales como el límite de una función, la derivada y las integrales, al igual que los otros textos citados, este cuenta con una diversidad de ejercicios resueltos y ejercicios propuestos con sus respectivas soluciones.

Anexo 3: encuesta de aceptación del material de texto



Encuesta sobre la aceptación del material escrito de la asignatura matemática I, Facultad de Ciencia Económicas de la Universidad de El Salvador



Población: Estudiantes de los grupos teóricos GT-09, GT-13 y GT-15 que cursan la asignatura de Matemática I en ciclo I-2023.

Objetivo: Conocer la aceptación del material de texto de la asignatura matemática I por parte de los estudiantes de los grupos teóricos GT-09, GT-13 y GT-15 de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de El Salvador.

Indicaciones: En los ítems del 1 al 9, califique con una nota del 1 al 10, siendo 10 la calificación máxima, es decir que el material es excelente, y la de 1, significa que se requieren mejoras. Y los ítems del numeral 10 al 13 responda según considere pertinente.

1. La estructura del material escrito es adecuada.
2. La redacción del material escrito es adecuada.
3. El material escrito te motiva al estudio de la asignatura matemática I.
4. La cantidad de ejercicios resueltos en el material escrito es adecuada.
5. Los pasos de la resolución de los ejercicios desarrollados son claros.
6. La construcción de los esquemas facilita comprender la resolución de los ejercicios.
7. Las notas colocadas al costado izquierdo del material facilitan la comprensión de los contenidos.
8. Los procesos colocados al costado izquierdo del material facilitan el desarrollo de la solución de los ejemplos.
9. Las operaciones colocadas al costado izquierdo del material facilitan el desarrollo de la solución de los ejemplos.
10. Escriba un comentario sobre el material escrito de Matemática I.
11. ¿En promedio cuántas horas semanales dedica al estudio del material escrito de la asignatura Matemática I?
12. Mencione dos aspectos que considera que están bien en el material.
13. ¿Qué aspectos considera Ud. que deben mejorarse del material escrito? ¿Por qué?

Adaptada de “*Mediación pedagógica en la elaboración de materiales didácticos escritos en Geometría Euclídea I, en la modalidad de educación a distancia de la Universidad de El Salvador*” Ramos J. (2023). [tesis maestra, Universidad de El Salvador]

Anexo 4: Fernández Bravo (2010)

Cuando se presenta en el aula la redacción de una situación problemática, el alumno toma como modelo lingüístico lo que se expresa, lo retiene y lo asocia posteriormente con el contenido resolutorio de la situación. El rigor, la precisión y la claridad del lenguaje que se presenta al alumno son de exagerada importancia. Los problemas que se leen a lo largo de la actividad escolar son muchos. Y son muchos los que contienen incorrecciones semánticas, sintácticas y matemáticas en sus enunciados. Se lee, tanto lo que está bien como lo que está mal redactado, y las interpretaciones no se sujetan tanto al sentido de su expresión, sino a la intuición de ese sentido. La fijación de ideas claras no puede tener un carácter fragmentario, sino un carácter sistémico, integral. Hay que elevar a una magnitud prioritaria la correcta formulación verbal del problema, poniendo excesivo cuidado en la presentación de su información (p. 42).

En ocasiones, se han llevado a cabo revisiones de libros de texto de matemáticas. El premio Nobel de física Feynman (1987), al describir su experiencia en este sentido, relata lo encontrado en un libro en el que se decía que la matemática estaba relacionada con la ciencia, y, a modo de ejemplo, se proporcionaba la temperatura aproximada de diversas estrellas, y se pedía a los niños hallar la temperatura global de un conjunto de estrellas.

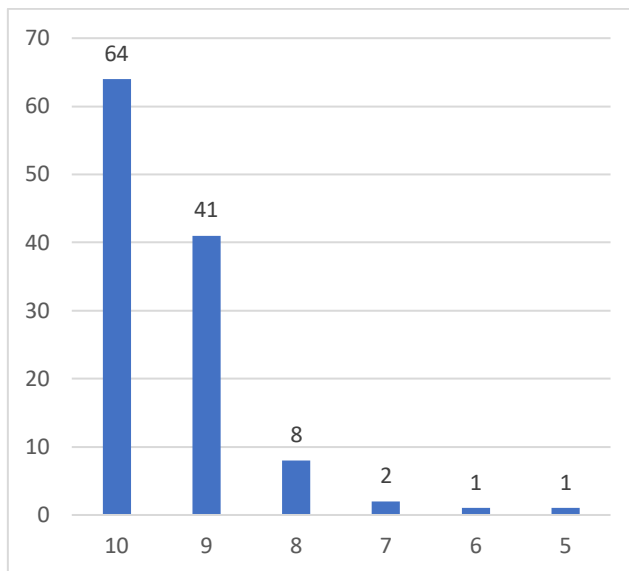
Y yo reviento horrorizado (...). ¡El absurdo perpetuo! Hallar la temperatura total de dos estrellas es algo falto por completo de sentido. ¡Nadie suma la temperatura de las estrellas, salvo tal vez para calcular la temperatura media de un grupo de estrellas, pero jamás para hallar la temperatura total! ¡Era horrible! Todo era una historieta para hacer sumar al niño; los autores no tenían ni idea de lo que hablaban. Era como ir leyendo frases con unos cuantos errores tipográficos, y entonces, de pronto, aparece una frase entera escrita al revés, de fin a principio. Así eran las matemáticas. ¡No había remedio! (p. 340--341).

En relación con los libros, Muntean (2011) se plantea esta pregunta: “¿Por qué los errores de los libros de texto se parecen tanto?”, y continúa: “Los autores de los libros de texto acuden a otros libros de texto, que a su vez se inspiran en otros y así sucesivamente, una práctica favorecedora de la reproducción de errores” (p. 51), sin embargo, el autor no aporta ningún dato que avale dicha hipótesis.

Anexo 5: resultados de pregunta 1

1. La estructura del material escrito es adecuada.

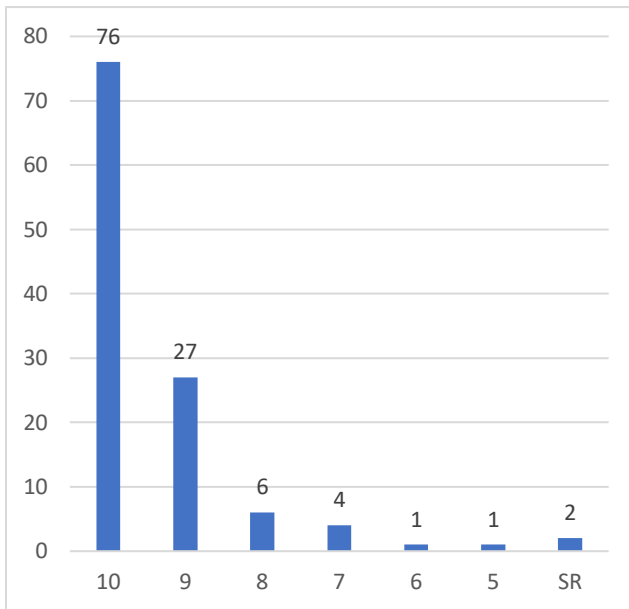
Nota	Cantidad de alumnos	%	
10	64	0.55	640
9	41	0.35	369
8	8	0.07	64
7	2	0.02	14
6	1	0.01	6
5	1	0.01	5
	117	1.00	1098
	Promedio		9.4



Anexo 6: resultados de pregunta 2

2. La redacción del material escrito es adecuada.

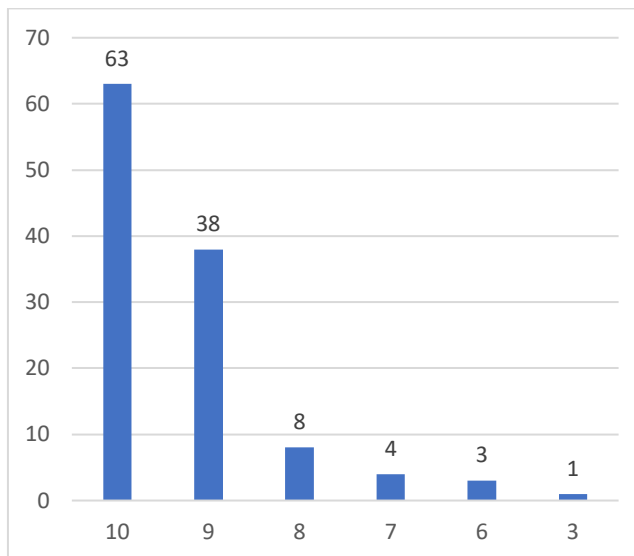
Nota	Cantidad de alumnos	%	
10	76	0.65	760
9	27	0.23	243
8	6	0.05	48
7	4	0.03	28
6	1	0.01	6
5	1	0.01	5
SR	2	0.02	
	117	1.00	1090
	Promedio		9.3



Anexo 7: resultados de pregunta 3

3. El material escrito te motiva al estudio de la asignatura matemática I.

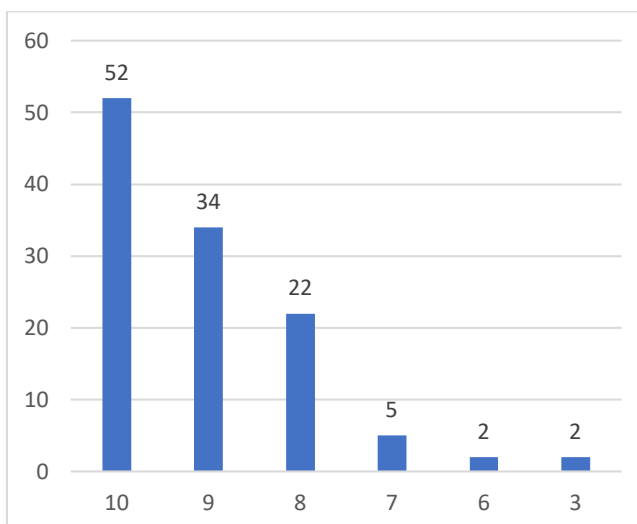
Nota	Cantidad de alumnos	%	
10	63	0.54	630
9	38	0.32	342
8	8	0.07	64
7	4	0.03	28
6	3	0.03	18
3	1	0.01	3
		1.00	1085
		Promedio	9.3



Anexo 8: resultados de pregunta 4

4. La cantidad de ejercicios resueltos en el material escrito es adecuada.

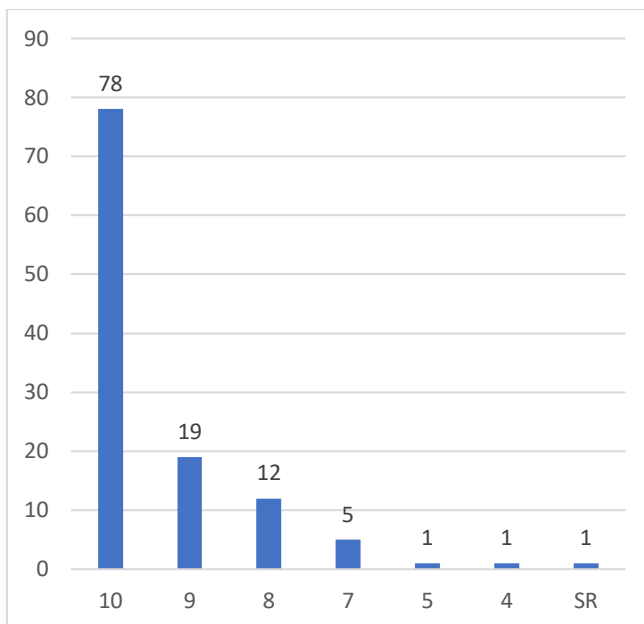
Nota	Cantidad de alumnos	%	
10	52	0.44	520
9	34	0.29	306
8	22	0.19	176
7	5	0.04	35
6	2	0.02	12
		1.00	1055
		Promedio	9.0



Anexo 9: resultados de pregunta 5

5. Los pasos de la resolución de los ejercicios desarrollados son claros.

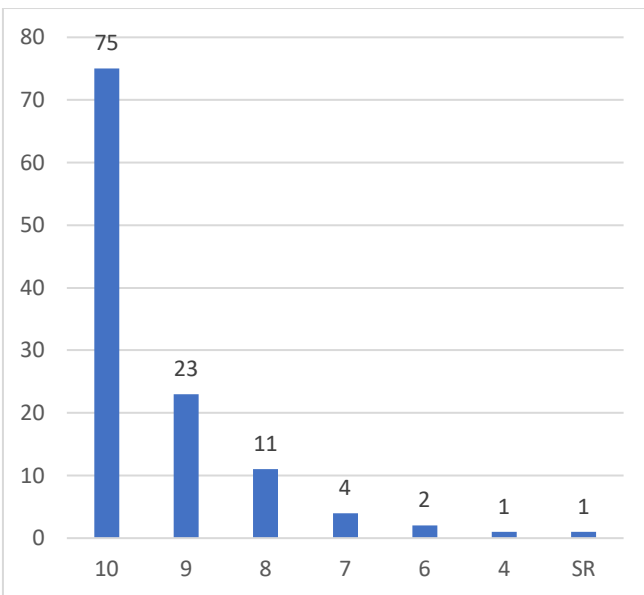
Nota	Cantidad de alumnos	%	
10	78	0.67	780
9	19	0.16	171
8	12	0.10	96
7	5	0.04	35
5	1	0.01	5
4	1	0.01	4
SR	1	0.01	
	117	1.00	1091
	Promedio		9.3



Anexo 10: resultados de pregunta 6

6. La construcción de los esquemas facilita comprender la resolución de los ejercicios.

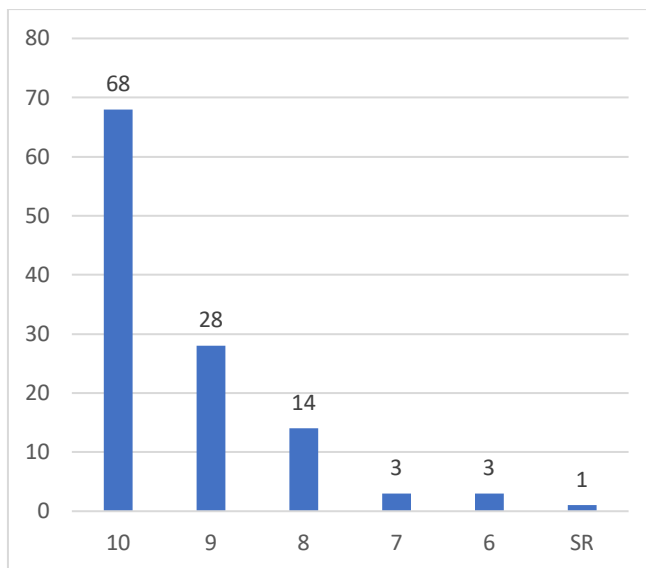
Nota	Cantidad de alumnos	%	
10	75	0.64	750
9	23	0.20	207
8	11	0.09	88
7	4	0.03	28
6	2	0.02	12
4	1	0.01	4
SR	1	0.01	
	117	1.00	1089
	Promedio		9.3



Anexo 11: resultados de pregunta 7

7. Las notas colocadas al costado izquierdo del material facilitan la comprensión de los contenidos.

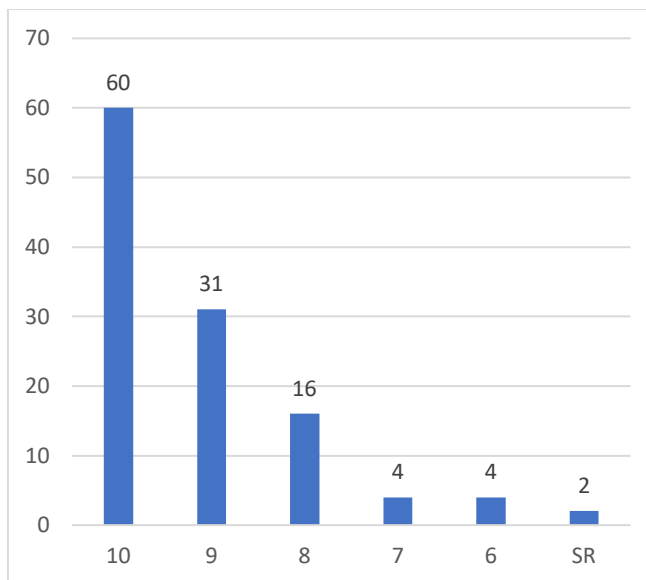
Nota	Cantidad de alumnos	%	
10	68	0.58	680
9	28	0.24	252
8	14	0.12	112
7	3	0.03	21
6	3	0.03	18
SR	1	0.01	
		1.00	1083
		Promedio	9.3



Anexo 12: resultados de pregunta 8

8. Los procesos colocados al costado izquierdo del material facilitan el desarrollo de la solución de los ejemplos.

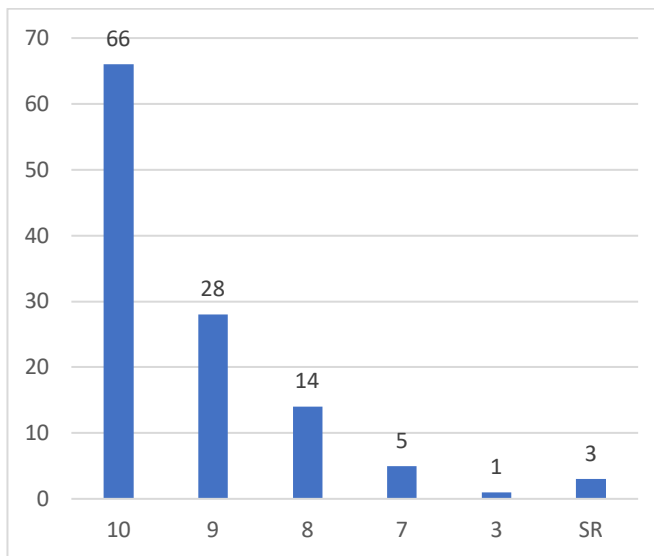
Nota	Cantidad de alumnos	%	
10	60	0.51	600
9	31	0.26	279
8	16	0.14	128
7	4	0.03	28
6	4	0.03	24
SR	2	0.02	
		1.00	1059
		Promedio	9.1



Anexo 13: resultados de pregunta 9

9. Las operaciones colocadas al costado izquierdo del material facilitan el desarrollo de la solución de los ejemplos.

Nota	Cantidad de alumnos	%	
10	66	0.56	660
9	28	0.24	252
8	14	0.12	112
7	5	0.04	35
3	1	0.01	3
SR	3	0.03	
	117	1.00	1062
	Promedio		9.1



Anexo 14: resultados de pregunta 10

10. Escriba un comentario sobre el material escrito de Matemática I.

me gusta que haya una guía sobre los temas y esta bien ordenado pero se me dificulta mucho entender la explicación
además de ser útil a la hora de desarrollar ejercicios, e de gran utilidad para poder estudiar en horas que no son de clases
esta muy bien
es un material, muy preciso y claro y sobre todo muy dinámico, lo cual facilita el aprendizaje y comprensión
El material escrito está bien elaborado en el cual se puede comprender de manera muy clara y precisa los temas y ejercicios de cada unidad
Esta bien argumentado y sus ejemplos están bien explicados
Es una buena guía de ejercicios explica los ejercicios y es ordenada
Es muy bueno, facilita mucho la comprensión del contenido.
Esta bien porque explica muy bien cada tema
Muy bueno

Me ha ayudado mucho y motivado a resolver ejercicios y a entenderlo mejor.
Me parece muy bueno y ayuda para mejorar
Centrado y especificado, Ayuda a comprender los contenidos
Esta muy bien elaborado y bien explicado
El material pues esta bien explicado y se entiende
Muy interesante al respecto de la explicación a los ejercicios
materiales se comprende
Es una materia donde día podemos aprender de nuestro maestro y tener una mejor comprensión de temas que aun no conocíamos
Está bien entendible para comprender y resolver problemas sencillos, pero es muy difícil aplicar lo aprendido cuando el mismo tema se torna muy complejo.
se comprende en su totalidad, ademas el material al costado es una excelente técnica que merece crédito para el autor
Me parece muy buena la manera que esta ordena y explica cada uno de los procedimientos se entiende claramente
La verdad es bastante interesante, llama la atencion el hecho de como se desempeñan cada ejercicios
El material esta muy organizado y entendible
el material es bueno, no tengo ninguna queja con el
Facilita el análisis el contenido
El material me parece, muy practico y esencial para comprender matemática
Está muy bien la resolución de los ejercicios y ejemplos, lo único que pienso que en algunos hay demasiados ejercicios.
esta muy bien pero es dificil entendes las explicaciones de algunos temas
El documento es coherente y facilita el aprendizaje con todo lo que que lleva.
Es un material el cual esta bien explicado y entendible que facilita al resolver los problemas.
esta muy bien hecho y todo pero se ve que son muy pocos ejemplos de ejercicios o si lo hay pero son iguales y en evaluaciones aparecen muy distintos
el material me parece bastante completo desde la explicación teórica de los problemas hasta el desarrollo de los ejemplos
El material me parece muy interesante ya que explica y se compre de la mejor manera para poder practicar después de la clase.
El material esta muy bien estructurado y eso hace mas interesante las clases.
Es muy ordenado y bonito el material se nota el empeño que le a puesto para desarrollarlo y todo es muy claro lo que facilita la comprensión
Muy ordenado y entendible
Es un material muy bien elaborado para el aprendizaje de nosotros como estudiantes, ya es bastante completo.

el orden en como se presentan los procedimientos es muy claro y me gusta como se refleja las tablas, las gráficas bien realizadas.
Excelente
Se entienden bien los temas
Buen material
Me gusta como el licenciado prepara el material, me cuesta algo mate, pero me motiva a estudiarlo.
Está demasiado explicado y lo mejor de todo es que está hecho por el licenciado eso nos hace ver un poco mejor las cosas.
Muy bueno esta excelente muy elaborado y bien organizado.
Muy explicado y facil de comprender
Me parece un material muy completo, de fácil comprensión.
Esta excelente para la comprensión
Esta muy llamativo por parte de las ilustraciones y facilita a la comprensión del estudiante, preferiblemente se podrían desarrollar un poco más de ejercicio seria mejor.
Los temas estan interesante.
Esta muy bien explicado y muy informativo muy importante todo el material para la realización de algún ejercicio
Me parece que esta bien redactado y así facilita la comprensión de los contenidos y los esquemas que han sido agregados me arece una excelente idea.
Me parece muy bien desarrollado y bien detallado lo que me facilita la comprensión
Me parece bastante bien , nos ayuda a entender mejor EXCELENTE .
Después de revisar el material de Matemática I, debo decir que me impresionó la forma en que se abordaron los conceptos matemáticos complejos. El autor logró desglosar los temas en secciones fáciles de entender y presentó muchos ejemplos prácticos para ilustrar los conceptos. Sin embargo, me pareció que el tamaño de la fuente era un poco pequeño y tuve que hacer zoom para leer el texto. En general, creo que el material es un recurso valioso para aquellos que buscan mejorar su comprensión de los conceptos matemáticos, siempre y cuando se tomen en cuenta algunas mejoras en el formato y la revisión del contenido.
Esta muy bien elaborado, ya que esto me ha ayudado bastante a entender muchas cosas que no comprendia
Un material muy explicativo con mayor facilidad comprension
es claro y se comprende bastante bien
el material es claro y ayuda para poder comprenderse de una manera mas facil
.Me parece algo regulares las explicaciones que tiene el material , solo que ojala tuviera más explicación como videos
Es un material muy ordenado y claro para trabajar la asignatura

tiene u excelente desarrollo y organizacion en cuanto a los temas, y contiene pequeños detalles que ayudan un poco mas a la comprension de los ejercicios
Está muy bien detallado
El material es bueno y ordenado , se comprende algo
Creo que es una buena base para podernos apoyar para los trabajos y el aprendizaje
Pues hasta el momento me parece super didáctico y bien explicado además que la explicación del licenciado ayuda mucho mas a comprender los temas
Que este material es de mucha importancia porque ayuda a comprender los procesos matematicos que conlleva cada ejercicio de cada tema
Es bastante ordenada y no cuesta coprenderlo, pero sí hay que poner atención a las explicaciones para entender de mejor manera, igual las notas del costado izquierda son una gran ayuda a la hora de repasar.
es comprensible
Me parece muy buena explicación en el material , ya que al costado izquierdo podemos encontrar fórmulas para poder desarrollar los ejercicios y tener una mayor comprensión a la hora de aplicarlas
Para mi es un buen material, aparte de ser muy ordenado, facilita la comprensión de los estudiantes, ya que en la explicaciones del material son detalladas y esquematizadas.
Este material es de mucha ayuda ya que nos facilita comprender los temas con facilidad
El material es necesario ya que nos ayuda a comprender de forma mas compleja la solución de los ejercicios y nos especifica cada proceso.
me parece muy bueno esta bien explicado y claro y será de mucha ayuda para nosotros como estudiantes
Me parece estupendo el que tenga ejercicios de practica con ejemplos resueltos
Pues sinceramente esta muy detallado todo lo que se quiere dar a entender y a ejemplificar de acuerdo al tema y demasiado entendible cada paso que se da en el ejemplo
Me gusta mucho el material y cada tema que plantea sobre los ejercicios
Me parece muy fácil de comprender y de estudiar en solitario sin necesidad de una guía del docente
Es super entendible y facilita a lo hora de repasar a la hora de estudiar
Desarrollado claramente
Es un material muy ordenado, completamente entendible, si se tiene una duda, al consultar el material uno puede resolver la duda de manera fácil
El material de Matemática I es muy practico y comprensible ya que tiene ejercicios adicionales y de practica para el mejoramiento y entendimiento de ellos, facilitando la comprension en cada uno de los temas expuestos.
Está redactado adecuadamente facilitado la comprensión de los temas
Me parece un buen libro de estudio y da ayuda a resolver algunas dudas del tema
Considero que es de gran ayuda ya que se resume la explicación de los ejercicios de una manera adecuada y comprensiva, tiene varios ejercicios para practicar

El documento se muestra completo en base a los temas por estudiar
Me parece una buena herramienta de trabajo y estudio ya que un libro facilita mas la comprensión tanto de ejercicios como de la lectura y esta muy bien estructurado
Excelente para los estudiantes, para el aprendizaje y resolucion de ejercicios
Presenta todos los temas por estudiar
El material de Matemática 1 es bastante claro, ayuda a entender los temas por si solos, con la ayuda de las notas del lado izquierdo la comprensión de los ejercicios y temas se vuelve mas clara, considero que es de gran ayuda las notas del lado izquierdo, y los esquemas ayudan mucho a visualizar y tener una mayor comprensión de los temas en que orden van etc... Considero que el material esta muy bueno y claro.
Sirve de ayuda para estudiar, solamente hay algunos temas que deberían de poner mas ejemplos ya que se dificulta un poco la comprensión
es muy claro y motiva a desarrollar los contenidos
Que el Contenido esta bien explicado y ordenado
Me gusta mucho
Las temáticas expuestas son claras al momento de leerlas y las anotaciones ayudan a la comprensión de como resolver los ejercicios que se nos presentan a los estudiantes.
Me parece que las explicaciones son claras y eso facilita la comprensión de cada tema, podemos entender rápidamente cada paso de los procedimientos gracias al material claro.
Bueno yo siento que es una ayudad y es lo mejor
Que es de gran ayuda para sacar de dudas
Muy bien resumido a manera de entenderse
Esta todo excelente y es comprensible
considero que el material se ve ordenado y es entendible para su uso, tambien me parece la idea de las formulas porque son utiles.
Es un buen material para un mejor aprendizaje, ya que ayuda a que estudiemos con una mejor comprensión
Esta muy bueno, muy ordenado.
los procedimientos de explicación fueron muy importantes, se entiende a la perfección
El material esta bien explicado, con su teoría, los ejemplos así como la resolución de los ejercicios, nomas que me cuesta muchas veces comprender perfectamente los ejercicios.
Muy bien Muy ordenado todo
Me parece muy bien explicado y ayuda bastante a entender mejor los temas
Lo hemos visto medio, ya que usted nos enseñó rápido, pero me imagino que es como el primer material, la verdad era muy comprensible
el material es muy ordenado, por ende facilita la comprensión

Está bien lo único es que creo que falta más ejercicio de diferentes opciones,es decir hay ejercicios en la guía que uno no sabe cómo hacerlos y no hay un ejercicio que uno se pueda ir guiando
Es excelente ordenado y fácil de comprender
Me parece que es un material que ayuda de mucho, ya que este esta redactado de una manera que hace fácil su comprensión, así como también posee ejercicio de todo tipo para poder practicar.
Me parece un material muy completo y fácil de entender
Es una ayuda material que aporta mucho y sirve de mucha ayuda, si por cada tema que veamos, se pongan las formulas y un ejemplo de ejercicio donde este detallado como se resuelve, por si se nos olvida un detalle de como se resuelve, y conceptos básicos importantes de manera principal.
Es un material que puede servir de ayuda para que nos guíemos a la hora de entender los temas que estamos viendo.
Me parece muy bien, bastante explicado
Sentí q muy pocos ejercicios venían en el parcial XD
El material es bueno pero en lo personal yo trabajo y no pude guiarme en la solución de ejercicio ya que falte a esa clase por lo demás todo bien

Anexo 15: resultados de pregunta 12

12. Mencione dos aspectos que considera que están bien en el material.

el orden de los temas y el echo de tener el material como una guia
los esquemas y las operaciones que estan colocadas a los lados del material
facilita el aprendizaje, mejor comprensión
sus detalles y sus esquemas
El orden e información bien detallada
Los ejemplos y las operaciones de los costados
Material bien redactado,buena explicación en los ejemplos
Su estructura y su contenido.
La explicación de cada tema Es objetivo en cada ejercicio
El desarrollo y los esquemas
1.su explicación 2. Sus guías para practicar
Los pasos y definiciones que brinda tambien.
Las graficas ayudan a comprender el tema

La creatividad del materias es llamativa y tiene variedad de ejercicios para seguir aprendiendo
Esta muy bien explicado, y se entiende muy bien
Las formulas y la explicaciones.
la presentación y el tiempo
Esta bien explicado y ordenado.
Primero las respuestas y aclaraciones de la izquierda y segundo la resolución de ejercicios en las graficas.
los ejercicios resultan fáciles por la teoría, esta muy ordenado
los pasos para la resolucion de los ejercicios es muy buena y ordenada y que motiva a aprender mas, ya que algunos materiales son largos y aburridos en cambio este material te motiva mas
los ejercicios bien explicados, y los materiales de cada día
Los ejercicios estan muy explicados Las explicaciones estan muy organizadas
la explicación de los ejercicios, y que es muy entendible a la hora de leer
Es muy claro y ordenado, ayuda a comprender de mejor forma
1- La facilidad que explica los temas he implementa los ejercicios. 2- Los aporte que ponen en la parte de la izquierda, ya que nos ayuda recordar temas, que quizás hayamos olvidado.
Resolución de ejercicios y explicación.
buena redaccion y orden de temas
Los ejemplos y la explicacion de ellos
la explicación y Diseño
la presentación y el orden de los contenidos
la explicación de los problemas, desarrollo de ejemplos y aclaración de futuras dificultades que se pueden encontrar al realizar próximos ejercicios
1. La forma en que están explicados los ejercicios. 2. La esquematización y procesos de análisis que se hacen al costado izquierdo para mayor comprensión.
El orden y los ejercicios al final, ya que nos sirven de ayuda para practicar y repasar.
los gráficos, los ejercicios o ejemplos todo en realidad por que se comprende
Las operaciones y las indicaciones
La parte de los ejercicios para practicar y los gráficos
1- Considero que esta bien agregar ilustraciones graficas. 2- me gusta que el procedimiento sea bien especifico y detallado a la hora de realizar las operaciones.
Esquemas y desarrollo de ejercicios

1. Da ejemplos para comprender bien los temas 2. Define bien los temas
Ejercicios con su respuesta, buena explicación
Como está planteado y cómo fue realizado
Yo siento que en general está bien todo pero e específicamente los
Todo esta bien para mi
El orden y la estructura
Las notas que estan de lado y los procedimientos son facil de comprender
Los pasos, ejemplos
Los esquemas están muy bien estructurados.
La información al lado izquierdo ayuda en la comprensión del contenido.
Los temas que se abordan y la resolución de estos mismos temas.
los diagramas y los ejemplos en el costado izquierdo
Los esquemas, puntos importantes que tenemos que tener en cuenta.
Ejemplos por qué me ayuda a comprender y poner en práctica, teórico por qué de ahí nos facilita los pasos
1- Orden 2-Claridad
1) Organización: El material está bien organizado en secciones y subsecciones claras y lógicas. Los temas se presentan en un orden lógico, lo que hace que sea fácil de seguir y entender la progresión de los conceptos matemáticos.
2) Ejemplos prácticos: El autor ha incluido muchos ejemplos prácticos en el material, lo que ayuda a los lectores a comprender mejor los conceptos matemáticos. Estos ejemplos también ayudan a los lectores a ver cómo se pueden aplicar los conceptos en situaciones de la vida real, lo que hace que el material sea más relevante y útil.
La explicacion y la elaboracion del material
La gráfica de los ejercicios y detallando los pasos
la solución de los ejercicios está bien detallada los datos de las formulas son de mucha ayuda ya que aparecen en orden
claridad y facil de entender
los esquemas y las explicaciones del lado izquierdo.
Ejemplos claros y diversidad de dificultad Información precisa y concreta
la estructura del documento y el diseño que le da una mejor compresion en los ejercicios y la teoria.
Los esquemas y que está todo en orden
-Es muy complejo -creativo

Los apunte que tiene a su costado ya que ayudan a poder entender mejor el desarrollo
El desarrollo de los ejercicios y las notas que facilitan la comprensión del tema
1- Que tiene diversidad de ejercicios 2- Que se detalla con claridad cada ejercicio que da por cada tema
El orden y las notas colocadas al lado izquierdo.
facil de entender las formulas detalladas ayudan a desarrollar mas facil los ejercicios
Las fórmulas al costado izquierdo Los ejercicios muy detallados , paso a paso
1. los esquemas de los contenidos muy coloridos 2. Las explicaciones detalladas
Que están bien detallados los temas a comprender y tienen varios ejemplos de solución
Los ejercicios ordenados y contenidos de apoyo.
la explicaciones de los ejercicios y procedimientos que están en los costados
Los ejercicios y ejemplos
Los ejercicios bien desarrollados y entendibles y el concepto del tema bien definido a lo que va hacer
La portada y la estructura del material
Los gráficos son muy comprensibles y el apoyo de incorporar las fórmulas a utilizar ayuda bastante
orden y es comprensible
Ejercicios desarrollados claramente
Explicación de cada ejercicios fáciles de entender
Su estructura, la forma de separar los contenidos
-Los ejemplos en cada tema -La informacion corta y directa
El planteamiento de los ejercicios y la explicación de los temas
Paciencia para realizar cada tema y nos permite que nos equivoquemos para corregirnos
La explicación de los temas y la graficación de los puntos en el plano cartesiano ya que a mí me cuesta un poco ubicar los puntos
El uso de gráficas cuando se necesitan para la comprensión
El desarrollado de los ejercicios y las ilustraciones de las graficas
Los ejercicios, conceptos y definiciones
el uso de ejemplos gráficos
los esquemas los ejercicios con sus respuestas, para que podamos practicar de forma personal
Los ejemplos están bien elaborados, y se comprenden mejor

los ejemplos de cada ejercicio el desarrollo de cada uno de los ejercicios
1.Ejercicios bien explicados con su proceso. 2. Material ordenado
La portada y la estructura del material
El apoyo con notas sobre formulas y procesos para cada tema.
1. La estructura del texto, ya que facilita su comprensión y asegura un aprendizaje mayor. 2. Los ejemplos explicados paso por paso.
Esta bien redactado y se le entiende
El orden y lo fácil de entender
La facil comprencion y los ejercicios desarrollados
La explicación de los ejercicios y la Teoría por cada ejercicio
el orden y las formulas
Cada ejercicio y la explicación que nos ayuda a que hay que hacer
Ninguno
la explicación y el orden
La redacción del material La resolución de los ejercicios
En lo personal la separación de temas a comparación de otros libros y archivos que he visto.
las explicaciones al costado izquierdo y los esquemas
Los esquemas, los procesos, la explicación de cada uno de los temas
la resolución de ejercicios y el orden de los contenidos
La manera en que explica los ejercicios de manera ordenada Y en lo que coloca las tabla y las gráficas de manera bonitas y entendibles
Es comprensible y muy participativa
Las notas al lado izquierdo del material, ya que hay procedimientos o términos que ayudan a comprender mejor el tema. También los ejemplos de cada tema.
Los procedimientos y graficas
1- Aporta mucho a estudiar desde el inicio los temas para los parciales y practicas de ejercicios, destacando las ideas principales y secundarias. 2- Los ejercicios que nos deja en la guía ayudan para estudiar, y se aclaran mejor las dudas con las formulas puestas en el material.
El orden que tiene cada tema y los ejemplos de cada uno.
Las explicaciones a un costado me parecen muy bien y los esquemas
La manera en la que explica y la paciencia que tiene
Las notas al lado izquierdo y la explicación

Anexo 16: resultados de pregunta 13

13. ¿Qué aspectos considera Ud. que deben mejorarse del material escrito? ¿Por qué?

como dije se me dificulta mucho y me gustaria que hubiera una forma mas clara de explicar porque siempre busco videos en youtube para estudiar
en mi opinión todo esta mu bien
para mi no tengo ningún problema, el material es claro, comprensible y bien dinámico
Colocar unos dos ejemplos más al material para así poder comprender mucho mejor cada tema
La explicacion
Un poco más de ejemplos de ejercicios
Podría ser que sean un poco más visible la separación de los contenidos, para encontrar un contenido en específico de manera más fácil.
Ninguno está bien cada ejercicio muy bien explicado
Más ejemplos
Para mí, nada todo está bien
Considero que esta bien
Nada que comentar
Considero que el material está bien elaborado y por mi parte no hay nada que mejorar
Ninguno porque esta bien explicado
Mejorar un poco la explicación.
asta hora todo bien
Ninguno todo se comprende a la perfección
E
los esquemas principales de la unidad
quizás poner ejemplos complicados, porque a veces sucede que ponen ejemplos faciles en clases y en parciales ponen los mas difíciles y no sabemos como realizarlos ya que no tuvimos algo parecido en clases
pues no siento que tenga que mojarar algo, la verdad esta bien detalladamente y todo en regla.
No el material esta muy bien organizado y con ejercicios muy bien explicados
por el momento he quedado satisfecha con el material
En mi opinión así esta bien, somos nosotros quienes debemos dedicar más tiempo
Si es posible, me gustaría que hubiera un poco más de ejercicios de ahí, me parece perfecto

como lo he visto sinceramente esta muy bien, por el momento no tendría nada que agregarle
mejor explicacion del tema y los temas
quisas un poco mas de ejemplos, para poder comprender mas variedades de problemas.
para mi todo esta bien
los ejercicios que nos presenta ya que a veces son muy idénticos tal vez que podrían ser del mismo contenido pero diferentes
considero que el materia es bastante completo pero si hay oportunidad de mejorar algún aspecto seria ideal abarcar una mayor diversidad de ejemplos distintos y con mayor dificultad de cada tema abordado en el material
Por el momento no considero que se deba mejorar el material, ya que se comprende de la mejor manera.
Colocar más ejercicios de explicación en cada tema, ya que así entenderíamos de una mejor manera.
quizás nada, porque para mi todo esta bien del material.
Todo muy bien, no creo que haya de mejorar nada
Ampliar mas lo teórico y reforzarlo en fundamentos.
Un aspecto que considero es en aumentar un poco el tamaño de letra de las notas del lado izquierdo.
Da muy poca información de cada tema, para comprender lo mejor
Más ejemplos
Realmente no mucho, me gusta como está hecho el material
Para mi punto de vista ningún aspecto hay que mejorar
Que en vez de poner los resultados al final estén en la siguiente pagina del tema
Los ejercicios tienden a ser algo diferentes a los ejemplos
Mas ejemplos con dificultad como en parciales y mas opciones de preguntas en el parcial para poder tener mas posibilidades de pasar el parcial.
Más ejercicios desarrollados.
Dar mayor detalles a los procedimientos.
No de mi punto de vista lo veo muy interesante
Pues personalmente todo esta muy claro en el material no veo necesidad de mejorarlo.
Para mí punto de vista está bien, me parece de mucha utilidad
Que cada tema que vemos este ahí un ejemplo para podernos guiar y aprender mejor .
1) Uso de gráficos y visualizaciones: Aunque el autor presenta muchos ejemplos prácticos, en algunos casos, el uso de gráficos y visualizaciones podría haber mejorado la claridad de los conceptos matemáticos presentados. Las visualizaciones pueden ser una

herramienta poderosa para ayudar a los estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos y hacer que el material sea más accesible para aquellos que tienen habilidades de aprendizaje visual.

2) Revisión de errores de gramática y ortografía: Aunque el contenido en sí es sólido, encontré algunos errores de gramática y ortografía en el texto que podrían confundir a los lectores. La revisión cuidadosa de la gramática y la ortografía ayudaría a asegurar que el material sea más fácil de leer y comprender para los estudiantes, evitando confusiones innecesarias.

para mí el material está muy bien elaborado, ya que se entiende todo.

A mi punto de vista está muy bien detallado y no está necesario mejorar

más ejemplos de ejercicios

la teoría en los casos que se necesite

Pienso que podría tener un bonus más de explicación como videos donde se pueden dar ciertos ejemplos para ayudarnos en la comprensión, ya que sería una buena manera tener muchos ejemplos de ejercicios

No encuentro algún aspecto que tenga que mejorarse

la estructura de la explicación de los últimos temas, debido a que es un poco confuso en la manera en que se explica, ya que se pasa de una parte a otra y eso complica un poco para entenderlo mejor el desarrollo del tema

Más ejemplos de los ejercicios para comprender mejor los procesos

Yo pienso que no es el material el que debe cambiar sino que yo como estudiante empezar a dedicarle más tiempo y estudiar más el material para poder mejorar

Sinceramente ninguno ya que está bien explicado y super claro

Debe de contener un poco más de ejercicios para tener un amplio de como se elabora los ejercicios

El aspecto del material es bastante agradable, hasta la paleta de colores usada, así que hasta el momento tal vez solo revisar si todo está donde debería de estar y no existan errores ortográficos o gramaticales.

más ejercicios resueltos

En lo personal, me parece bien, podría ser agregar más ejercicios en los temas más complicados

Tal vez, poner diferentes variedades ejemplos de cada tema.

Si. colocar un poco más de ejercicios.

Por el momento no considero que el material necesita mayor mejora.

no siento que se le deba mejorar algo, está bastante bien el material es claro y bien explicado.

Mayor detalle al explicar fórmulas porque ayudaría mucho a los estudiantes cuando esas fórmulas se utilizan en ejercicios diferentes no solo en uno

Pues yo en mi punto de vista nada así con ese material puede entender los ejercicios y ejemplos quizás que vengan más ejemplos difíciles para que podamos resolverlos juntos en clases
Todo bien
No veo nada malo, es muy buen material
para mi ninguno todo esta bien
Todo esta ordenado y bien desarrollado.
Dejar algún espacio para poder resolver los ejercicios
El color del material considero que el fondo del material influye mucho ya que es como visualizamos el material
Ningún aspecto
Ninguno me parece bien
Creo que todo en el material está bien, es de gran ayuda, y tal vez podría añadir otros dos o tres ejemplos de ejercicios de aplicación, en lo personal ese tipo de ejercicios me cuesta un poco
Clasificación por colores del tipo de información presentada
considero que el material esta muy completo, ya que el desarrollo y desempeño dependen del estudiante y el libro es una herramienta muy esencial
Quizas más ejercicios
coordinación de colores
el material escrito es muy claro y entendible, el diseño también es muy agradable. Pero me gustaría agregar quizás 1 ejercicio cuando se explican los temas
Dar un poco mas de ejemplos
en dar mas explicaciones con ejemplos porque se podría guiar de mejor manera para realizar los ejercicios
No tengo comentarios todo esta bien en el material.
Todo bien
Ningún aspecto. Considero que los aspectos que contiene el material están acordes con las temáticas presentadas y no son confusas al momento de leerlas o intentar resolverlas.
El material está bien estructurado, sin embargo desearía una mayor cantidad de ejemplos explicados para poder practicar de la mano con el libro de manera más sencilla y así identificar las áreas de mejora viendo los pasos de cada ejercicio.
ninguno todo esta bien
Por mí esta bastante bien
Nada, el material esta bien explicado, ordenado y entendible
Colocar mas ejercicios comprensibles que sean mas comprensibles para el estudiante con respecto al tema que se enseña
podria mejorarse colocando las soluciones despues de los ejercicios para que al final no sean tantas soluciones juntas.

En realidad nada. Todo está muy claro y se entiende muy bien
No ninguno, esta todo muy bien.
para mi persona el material esta bien redactado. Ya que se muestra todo de una manera clara.
Para mi todo esta bien, nada mas yo tengo que poner de mi parte para comprender bien el material.
Por el momento ninguno todo esta bien en el material
a mi criterio todo esta bien
Yo siento que está bien así
ninguno, todo me parece claro y facil de comprender
Colocar más ejercicio que considere que le costará a los estudiantes a realizar con respecto al tema que se ha dado o se dará
Ningún aspecto es material es comprensible y muy fácil de entender
Realmente no encontré algún aspecto a mejorar, el material esta bien redactado y organizado.
Considero que el material esta bastante completo y no
Considero que se debe tomar en cuenta un pequeño ejercicio abajo de las formulas por cada tema ¿por que? por que así se detalla como se resuelve cada uno, por si nos genera alguna duda o confusión u olvido y para que sea mas dinámico el material, un link de video sobre el tema visto, el video es una sugerencia, nada mas.
no sabría responder ya que no mire el material a detalle
Todo bien
Ehh considero q ninguno :/
A mí me costó un poco más saber las soluciones a cada ejercicio ya que me confundí un poco más en eso

Anexo 18: nube de palabras de pregunta 12

