UES BIBLIOTECA CENTRAL
INVENTARIO: 10123437

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

DOS ASPECTOS DE GEODESIA, TRIANGULACION Y SISTEMA DE COORDENADAS LAMBERT

TESIS

PRESENTADA POR

RODOLFO MORALES

PREVIA A LA OPCION DEL TITULO

DE

DOCTOR EN INGENIERIA CIVIL

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR BIBLIOTECA CENTRAL DEPTO. DEPOSITO

SAN SALVADOR EL SALVADOR CENTRO AMERICA

DICIEMBRE 1959

T
620.33
M82d
1957
Ej. 1

068733

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Rector:

Dr. Napoleón Rodríguez Ruiz.

Secretario

Dr. Roberto Emilio Cuéllar M.

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA

Decano:

Ing. Baltasar Perla R.

Ing. José Santos Villatoro H.

Secretario:

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
SAN SALVADOR, C. A.

DECANATO

San Salvador, de de 195

No._____

NOS. LOS ABAJO FIRMANTES, DECANO Y VOCALES DEL TRIBUNAL DE EXAMEN EN LA FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA; UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR:

En cumplimiento del mandato del Señor Decano de la Escuela, registrado en este expediente a fojas sesenticinco, hemos procedido a examinar por espacio de tres horas al señor Bachiller Rodolfo Meléndez Morales, en las materias que el Plan de Estudios determina y designa para el Primer Exámen General Privado de Doctoramiento en la Facultad de Ingeniería y Arquitectura.

Habiendo interrogado sobre las materias correspondientes al candidato, quien se retiró del local de exámen, y recogida la votación lo hemos:

Aprobado por Unanimidad.

En testimonio de lo cual firmamos la presente, en San Salvador a los veintisiete días del mes de julio de mil novecientos cincuenta y seis.

J. G. Valdivieso
Decano

Ing. Edwin Nuila Macay

Ing. Oscar René Salegio

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR FACULTAD DE ING. Y ARQ. Secretaría SAN SALVADOR

Ing. José Santos Villatoro

FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
SAN SALVADOR, C. A.

DECANATO

San Salvador, de de 195

No._____

NOS LOS ABAJO FIRMANTES, DECANO Y VOCALES DEL TRIBUNAL DE EXAMEN EN LA FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA; UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR:

En cumplimiento del mandato del señor Decano de la Escuela, registrado en este expediente a fojas sesenta y ocho, hemos procedido a examinar por espacio de tres horas al señor Bachiller Rodolfo Meléndez Morales, en las materias que el Plan de Estudios determina y designa para el Segundo Examen Privado de Doctoramiento en la Facultad de Ingeniería y Arquitectura.

Habiendo interrogado sobre las materias correspondientes al candidato, quien se retiró del local de examen, y recogida la votación lo hemos:

Aprobado por unanimidad

En testimonio de lo cual firmamos la presente, en San Salvador a los once días del mes de septiembre de mil novecientos cincuenta y seis.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR FACULTAD DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA DECANATO SAN SALVADOR

J. G. Valdivieso
Decano

Ing. Alfredo Guillén Ch.

Ing. José Tomás Ugarte

A. Minasi

Ing. Antonio Minasi

A mi querida Madre

A mi querida Esposa

A mis Amigos

DOS ASPECTOS DE GEODESIA, TRIANGULACION Y SISTEMA DE COORDENADAS LAMBERT

Impreso en los Talleres de la Editorial Universitaria "José B. Cisneros".

INDICE

	Pagina
Introducción	*17*
Generalidades Sobre Astronomía	*19*
Mapas	*24*
La Proyección Cónica Conforme Lambert	*29*
Triangulación	*38*
Ajustes de Triangulación	*49*
Cálculo de Posiciones Geográficas	*52*
Apéndice Matemático	*56*
Tablas	*85*

INTRODUCCION

Antes de comenzar mi trabajo sobre Proyección Lambert y Triangulación, considero necesario tratar algunas cosas de Geodesia y Astronomía Elemental.

La explicación de estos conceptos preliminares además de servirme de introducción, ayudarán a esclarecer el objeto principal de mi Tesis.

La Geodesia es una ciencia matemática, cuyo objeto es determinar las dimensiones y figura del Globo Terrestre o parte de él, y construir los mapas correspondientes.

Los problemas matemáticos que se presentan son de difícil solución y requieren un buen conocimiento del cálculo infinitesimal. Por ejemplo, todos comprendemos que la medida Física de toda la Tierra es imposible, y que de la deducción de la medida de un pedazo de arco, es el medio del que se vale la Geodesia para determinar los Ejes del Mundo. Esta deducción no es más que la solución de una ecuación diferencial.

Felizmente, en la práctica de los problemas corrientes, la solución está a nuestro alcance debido al trabajo de grandes matemáticos como Mercator, Laplace, Lambert y otros. Actualmente existen ya las fórmulas, tablas y procedimientos de cálculo de fácil aplicación.

Naturalmente, no propongo que para toda medición terrestre usemos los métodos de la Geodesia y que entonces nos olvidemos de la Topografía, ya que la idea principal es saber discernir con buen criterio, cuando conviene aplicar uno u otro sistema de medida.

Es importante pues, comprender el campo de acción de cada una.

En la Topografía suponemos que la Tierra es plana, sabiendo todos que eso es falso, pero esa idea no nos hace daño cuando la medición es pequeña o el error cometido no tiene mucha significancia.

Supongamos que se requiera medir una finca, trazar una carretera, determinar los detalles de un terreno, etc., por supuesto, que aquí aplicamos la Topografía plana más sencilla y no necesitamos ser Ingenieros para hacerlo.

Pongamos ahora el problema de otra manera. Necesitamos el Plano Regulador de una ciudad, el trazado de una frontera o la medición de una Hacienda grande. Si en la solución de estos problemas aplicáramos solamente Topografía, se fracasaría lamentablemente, ya que los errores tienen ahora mucha significancia. Expliquemos esto más claramente·

Plan Regulador de una Ciudad con sólo Topografía.

Se divide la ciudad en zonas o barrios A, B, C, D, etc... Debido a la magnitud del trabajo, se ataca por aparte cada zona y es así cómo se compensan los

polígonos, se dibujan las hojas y todas las demás cosas correspondientes. Terminada una zona se pasa a otra y así sucesivamente.

Se requiere ahora armar todo el conjunto y luego se nota que las hojas no coinciden, que cierto eje de calle de la zona A no llega como debería hacerlo en un punto de la zona C; en fin, existen discrepancias, lagunas y sobreposiciones propias de la acumulación de los errores de todo trabajo humano.

Comienza ahora a culparse a los Topógrafos, Calculistas y Dibujantes. Se pasa a revisar los levantamientos, cálculos y dibujos, y todo se encuentra satisfactorio. Se decide llevar una poligonal de un punto de A, a otro de D y todo esto se hace con cuidado, pero no concuerda con las medidas sacadas a través de las otras zonas. Ya cansados, se decide disimular y callar la cosa.

Otra sería la situación del caso, si se precaviera en situar en la periferia y dentro de la ciudad, algunos puntos de control básicos con todas las reglas de Triangulación y Mapas.

Entre estos puntos básicos saliendo de unos y llegando a otros, sí se puede trazar las poligonales usando la topografía elemental sin ningún riesgo. Estas poligonales, hay que comprenderlo, tienen buena labor parcial o de relleno.

Aquí sirve recordar que si una persona quiere dibujar una cara, muy bien puede trazar los ojos, la nariz, la boca, etc., y al final resultarle nada parecido. Pero si primero se traza un cuadriculado, o algún esquema que le ayude a proporcionar y a situar ciertos elementos de la cara, el resultado es otro y muy satisfactorio.

Entonces no hay que olvidar que en estos casos debe de irse de lo grande hacia lo pequeño y es del Todo que deben disgregarse las Partes.

Trazado de una Frontera.

Aquí es obvio que debido a la transcendencia Política y fundamental para una Nación, el trazado debe de ser preciso y exacto, ya que nadie aceptará más o menos una Frontera.

La Medida de una Hacienda Grande.

Debido a los muchos errores acumulados no debe usarse como Básica una poligonal corriente, lo correcto como en el caso de las ciudades, sería colocar una red de triangulación. (En la parte correspondendiente a la Triangulación, detallo más razones y puntos de vista).

Seguidamente y con la ayuda de algunos esquemas, presento algunas distinciones entre Geodesia y Topografía, así:

1) *Distinción en los ángulos.*

Cuando nivelamos nuestro Teodolito, colocamos el plano de medida angular en el Horizonte tangente a la Tierra. (fig. 2). Por esta razón, si medimos los ángulos en A,P,B, (fig. 1) el triángulo determinado por esos puntos es Esférico y la suma de sus tres ángulos debe ser 180 grados más el exceso esférico. El exceso angular es directamente proporcional al área encerrada por el triángulo.

2) *Distinción en las longitudes.*

La distancia real entre dos puntos A y B (fig. 1), es el arco de círculo máximo entre ellos. En Geodesia la distancia es este arco y es conocida como línea Geodésica.

3) *Distinción en los Azimutes.*

En la Topografía plana, el Azimut inverso de una línea es igual al directo más 180 grados.
En Geodesia todo azimut inverso es el directo más 180 grados, más una cantidad angular llamada convergencia.
Dos puntos A y B (Fig. 1) tienen sus respectivos meridianos P,A,N y P,B,M los cuales convergen en el polo P. Observando los mismos puntos en la figura 3 en un esquema más aumentado, se notará que debido a la convergencia de los meridianos en los polos, los azimutes a y a' Geodésicos no difieren en 180 grados como los Topográficos b y b'.
También es importante notar que si en una visual dirigida desde A hacia B, se interpusiera algún objeto, como el árbol de la fig. 3, al dibujarse ese accidente en un Mapa, se representaría como la curva y no como la recta de A hacia B.
Al correrse una poligonal Geodésica de precisión, debe de considerarse la suma total de las convergencias de cada línea para obtenerse el cierre correcto en azimut.
La fórmula que permite encontrar la convergencia total entre dos puntos de posiciones conocidas es la siguiente:

Convergencia en segundos = El seno de la latitud media por la diferencia de longitud en segundos.

$$\triangle a = \operatorname{sen}\phi \; m \times \triangle\gamma$$

Cuando la posición de cierre está al Este del punto inicial, la convergencia es positiva y cuando está al Oeste es negativa.
La deducción de esta fórmula la destino al Apéndice Matemático.

EL GLOBO TERRESTRE

El término Geodesia viene de la palabra Geoide, la cual significa un sólido donde la superficie siempre es Normal a la gravedad.

En la Geodesia una cuestión importante es la figura matemática de la Tierra.

Ya desde antiguos tiempos (500 a 600 A. C.), filósofos como Tales y Pitágoras, tenían el concepto de que el mundo era redondo. Por supuesto, épocas de gran oscurantismo e ignorancia como es La Edad Media, en que se imaginaban a la Tierra plana, Mares tenebrosos, etc., necesitaron la demostración de la realidad por los navegantes Colón, Caboto y otros.

La figura adoptada actualmente es el Elipsoide de Revolución.

Comprendida por todos la figura del Mundo, el siguiente gran problema fue el de determinar las medidas del mismo.

Hay tres Elipsoides principales, que son: el de Bessel 1841, el de Clarke 1866 y el de Hayford 1909.

El Elipsoide de Bessel se determinó por medidas en Europa, y por adaptarse mejor a la curvatura de aquellos lugares, es el que se considera oficial en la Europa Continental.

Al principio el Coast Survey, adoptó en América el de Bessel, pero como su uso iba propagando mucho los errores, hubo de cambiarse al de Clarke que es el que define mejor la curvatura de nuestro continente.

La Asociación Geodésica Internacional en su tercera reunión verificada en Madrid, aceptó las dimensiones derivadas por John F. Hayford en 1909, por lo que se denomina el Esferoide Internacional de Madrid.

No está demás mencionar que como resultado del año Geofísico Internacional y con gran ayuda de los famosos Satélites Artificiales se determinará la forma más precisa de la Tierra.

Esperamos ese resultado.

El procedimiento usado anteriormente para calcular las dimensiones del Elipsoide, es así: se mide la distancia entre dos puntos de un mismo meridiano por medio de Triangulación precisa, y se determinan también las respectivas latitudes. Conocida la longitud del arco y la deflexión central, se deducen facilmente los ejes.

A continuaaión las medidas de dos de los Elipsoides:

	BESSEL 1841	CLARKE 1866
Semi-eje Mayor = a =	6 377 397.154	6 378 206.400
Semi-eje Menor = b =	6 356 078.962	6 356 583.800
Excentricidad = e =	0.081 696 831	0.082 271 805

Todas las distancias son referidas al nivel del Mar. Como puede apreciarse, el Elipsoide de Bessel es menos achatado en los Polos que el de Clarke.

Debido a que los distintos esferoides oficiales no tienen en sus dimensiones, las verdaderas de la Tierra, siempre habrá una discrepancia en los distintos puntos para los valores de Latitud, Longitud y Azimut. (De las Astronómicas con las Geodésicas).

Una Estación de Triangulación en la cual se computan las observaciones Astronómicas y Geodésicas, se denomina ESTACION DE LAPLACE.

En las determinaciones Astronómicas de Latitud, Longitud y Azimut, se toma como línea de referencia la de la Plomada y en las deducciones Geodésicas la Normal al Esferoide Oficial. Por comparación de los datos Astronómicos y Geodésicos, se determina la deflexión de la Plomada a la Normal del Esferoide.

Si llamamos ϕa, γa, Aa la Lat., Long., Az., Astronomic.
ϕg, γg, Ag la Lat., Long., Az., Geodésicos.

se tiene:

$$\cos \phi g \ (\gamma a - \gamma g) = - \cot \phi g \ (A_a - A_g)$$

o

$$(A_a - A_g) + \operatorname{Sen} \phi g \ (\gamma a - \gamma g)$$

o

$$A_g = \operatorname{Sen} \phi g \ (\gamma a - \gamma g) + A_a$$

Estas relaciones son conocidas como ecuaciones de LAPLACE, en honor del que las usó primero.

A continuación me permito presentar un recordatorio de Astronomía Elemental.

Diferentes sistemas de Coordenadas.

En la determinación de la posición de un punto se necesitan círculos y puntos de referencia, así:

1—Un círculo fundamental (arbitrario sobre la esfera).
2—Los polos de este gran círculo.
3—Grandes círculos secundarios.
4—El origen, un punto arbitrarioen el círculo fundamental.

Sistema del Horizonte.

La plomada señala en su dirección los polos Zenit y Nadir. Perpendicularmente en el medio está el círculo fundamental del Horizonte (plano en que está el plato de nuestro Teodolito después de nivelarlo).

Los círculos verticales secundarios son los que pasan por el Zenit y Nadir.

El círculo vertical que contiene a los polos de la Tierra se denomina Meridiano.

Las coordenadas de este sistema son el Azimut y la altitud h.

Azimut es el ángulo medido en el sentido del reloj y sobre el Horizonte desde el punto Norte hasta el círculo vertical que pasa por el otro punto o estrella.

Altitud es la distancia angular medida hacia arriba y sobre el círculo vertical desde el horizonte hacia la estrella·

El sistema del Horizonte es local y varía de un punto a otro. (Ver figura 1).

SISTEMA DEL ECUADOR

Círculo fundamental, El Ecuador; y los Polos, los mismos de la Tierra.

Los círculos secundarios son los que pasan por los Polos y se llaman Horarios.

El origen es el punto ♋ o intercepción del Meridiano y el Ecuador.
Ecuador desde el punto ♋ al pie del círcul ángulo hora) y la declinación ∂.

Las coordenadas son L.H.A· (Locatancia angular hacia el Oeste y sobre el
El L.H.A. ángulo horario es la dislo horario de la estrella.

La declinación ∂ es la distancia angular medida sobre el círculo horario desde el Ecuador y la estrella.

Estas coordenadas no son constantes debido al movimiento diurno.

Sistema de los Equinoccios y Solsticios.

Círculo fundamental, el Ecuador.

El origen, el punto *γ* (Equinoccio vernal) intercepción del plano de la Eclíptica y el Ecuador alrededor de marzo 21.

BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

Coordenadas, la Ascención Recta a y la Declinación ∂.

Ascensión Recta es la distancia angular medida sobre el Ecuador en el sentido de Oeste a Este, desde el Equinoccio Vernal al círculo horario de la Estrella.

La Declinación ∂ la misma que en el sistema del Ecuador.

Coordenadas Geográficas.

Círculo fundamental el Ecuador.

Origen, la intercepción del Meridiano de Greenwich y el Ecuador.

Coordenadas, La Latitud ϕ y la Longitud y.

La Latitud es el ángulo entre la dirección de la Plomada o Normal del Esferoide y el plano del Ecuador; la Latitud se llama Norte o Sur según esté arriba o abajo del Ecuador.

Longitud y es la distancia angular medida sobre el Ecuador Terrestre desde su intersección con el meridiano de Greenwich hasta el pie del meridiano del observador. La Longitud es positiva hacia W y negativa hacia el Este.

Distancia Zenital Meridiana. (Latitud Norte)

Cuando una estrella pasa por el meridiano de un observador, en ese instante, la altitud h es la mayor, y la distancia zenital z la menor.

Relación entre la latitud del observador, declinación de una estrella y su distancia zenital meridiana.

En la fig. 6 se puede apreciar que:
para un observador de Latitud Norte

$$Zm = \phi - \partial \quad \text{(Estrella al Sur del Zenit)}$$
$$Zm = \partial - \phi \quad \text{(Estrella al Norte del Zenit)}$$

Debe de recordarse que la latitud y la declinación tienen el mismo signo cuando son del mismo nombre(ambas Nortes o Sures) y signo contrario, cuando sus nombres son distintos.

El Triángulo Astronómico.

En la mayoría de los problemas prácticos, se necesita pasar de un sistema de coordenadas a otro. Para esto se presenta la solución del triángulo esférico.

Hagamos que A, B, C sean los ángulos y
que a, b, c los lados opuestos a ellos.

Principales fórmulas trigonométricas:

$$\text{Ley de senos } \frac{\text{sen a}}{\text{sen A}} = \frac{\text{sen b}}{\text{sen B}} = \frac{\text{sen c}}{\text{sen C}}$$

Ley de cosenos $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C \cos A$

Relación entre dos ángulos y tres lados:

$$\operatorname{sen} a \cos B = \operatorname{sen} c \cos b - \cos c \operatorname{sen} b \cos A$$

Relación de senos $\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-b)\ \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c}}$

en donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Solución del Triángulo Astronómico.

Principales fórmulas:

(1) $\dfrac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}(90°-h)} = \dfrac{\operatorname{sen} Z}{\operatorname{sen}(90°-\partial)}$

(2) $\operatorname{sen} t \cos\partial = \cosh \operatorname{sen} Z$

(3) $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\partial + \cos\phi \cos\partial \cos t$

(4) $\operatorname{sen}\partial = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen} h + \cos\phi \cosh \cos Z$

(5) $\cosh \cos Z = \cos\phi \operatorname{sen}\partial - \operatorname{sen}\phi \cos\partial \cos t$

(6) $\cos\partial \cos t = \cos\phi \operatorname{sen} h - \operatorname{sen}\phi \cosh \cos Z$

(7) $\operatorname{sen} \frac{1}{2} t = \sqrt{\dfrac{\cos(s+\phi)\ \cos(s+\partial)}{\cos\phi \cos\partial}}$

en donde $s = \frac{1}{2}[270° - (\phi+\partial+h)]$

(8) $\cos t = \dfrac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\partial}{\cos\phi \cos\partial}$

(9) $\operatorname{sen} \frac{1}{2} Z \sqrt{\dfrac{\cos(s+\phi)\ \cos(s+h)}{\cos\phi \cosh}}$

$S = \frac{1}{2}[270° - (\phi+\partial+h)]$

(10) $\cos Z = \dfrac{\operatorname{sen}\partial - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen} h}{\cos\phi \cosh}$

Localización de la Estrella Polar

La localización de la Polar es de importancia en los problemas de la determinación de la Latitud. Debe tenerse presente lo siguiente:

a) Su orientación es más o menos la de la Brújula.

b) Su altura sobre el Horizonte es igual a la latitud del lugar. Alrededor de 13° 40' en el centro y 14° 30' al Norte y 13º al Sur del País.

c) Es la estrella más brillante en esa región.

d) Describe un círculo de radio un poco menor que un grado alrededor del Polo.

e) Está en la cola de la Osa Menor.

f) Los punteros de la Osa Mayor señalan hacia ella.

Determinación de la Longitud.

Debido a que la longitud es una coordenada arbitraria puesto que el cero se localiza por el meridiano que pasa por Greenwich, la determinación de la longitud necesariamente se obtiene por comparación con otro lugar de longitud conocida. En El Salvador, existen gran número de puntos de control de posición conocida. La Dirección de Cartografía proporciona la descripción de cualquier punto de particular interés.

El método más sencillo de establecer la longitud, es por medio de la determinación del tiempo.

Procedimiento:

Se sitúa el Observador con su Teodolito, (Wild T-2, ó T-3) en el punto al cual se le conoce la longitud. Se observa a que hora el Sol cruza el meridiano y luego trasladándose al día siguiente al punto al cual se le quiere conocer la longitud, se repite el mismo procedimiento. Por supuesto que debe usarse el mismo cronómetro u otro sincronizado a él. La diferencia de tiempo es proporcional al arco de longitud descrita, esto es, cada hora tiene 15°.

La observación se puede hacer más precisa con dos observadores simultáneamente en ambos puntos con cronómetros sincronizados.

Determinación del cruce del Sol por el Meridiano.

Debido a que no se puede adivinar el instante preciso del paso del Sol por el Meridiano, se hacen repetidas observaciones momentos antes y después del mediodía, digamos, unos 10 minutos. Entonces en intervalos de cada minuto se toma la altitud y el tiempo correspondiente a cada posición.

Ya con la lista de los valores obtenidos se dibujan tomando como abscisas el tiempo, y como ordenadas, las distancias Verticales. El fenómeno dibujado tiene la forma de una parábola. Entonces haciendo pasar una curva, el vértice determinará el tiempo requerido.

Las determinaciones más exactas y las correcciones a las observaciones, no las considero debido a que ésto no es el objeto principal de mi trabajo.

MAPAS.

Un poco de historia.

Es de uso popular el de llamar Mapa a todo esquema que señala de una manera parecida los accidentes de la Tierra.

En un principio los Mapas eran dibujos más o menos proporcionados, en los que mucho jugaba la imaginación y el espíritu artístico del autor. El fin que perse-

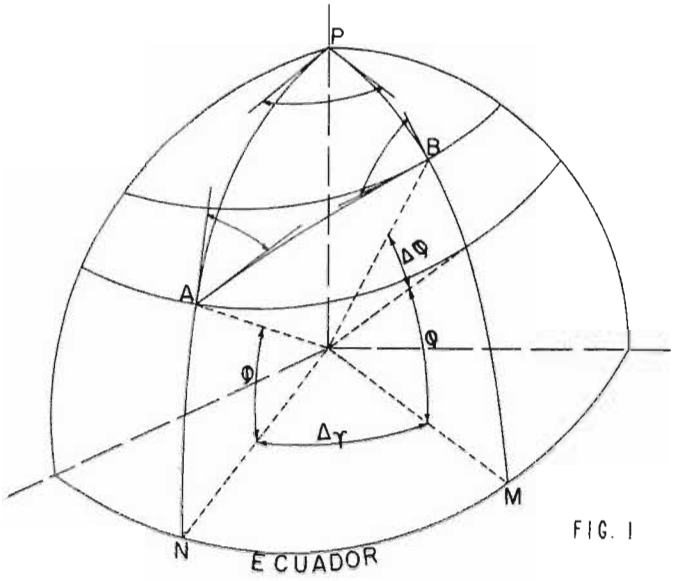


FIG. 1

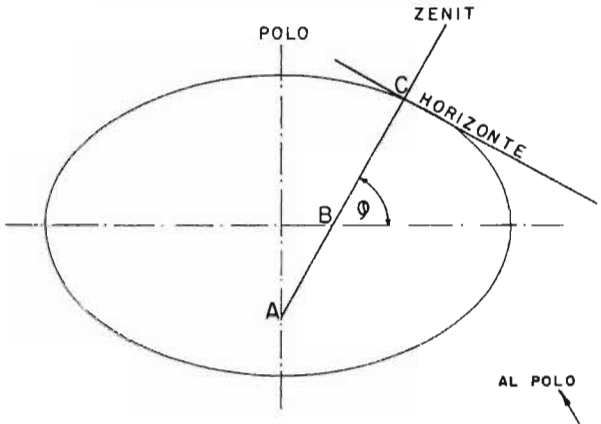


FIG. 2

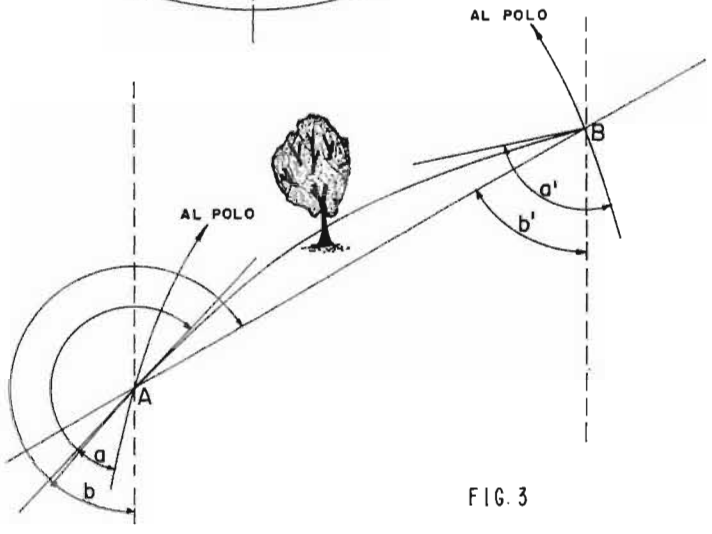


FIG. 3

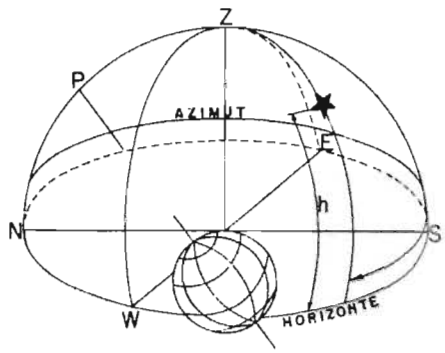


FIG. 1

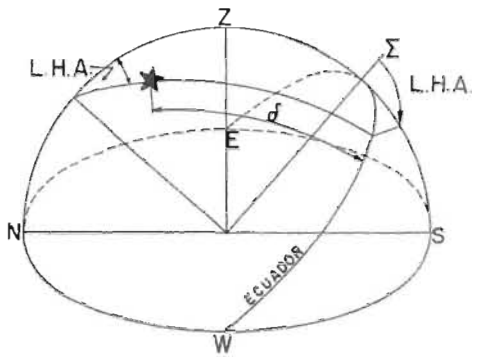


FIG. 2

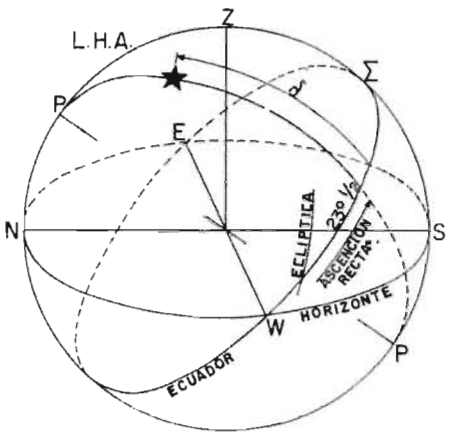
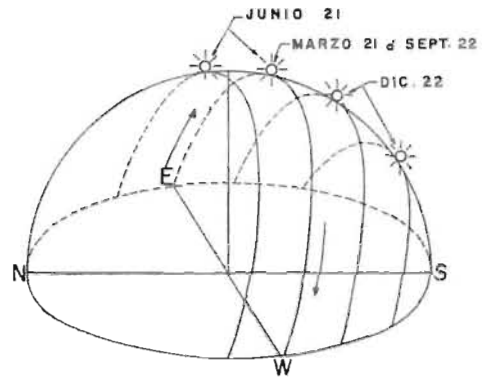


FIG. 3



TRAYECTORIAS APARENTES
DEL SOL

FIG. 4

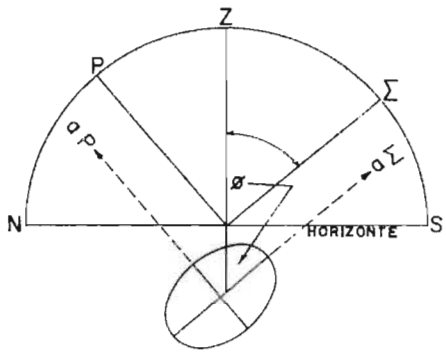


FIG. 5

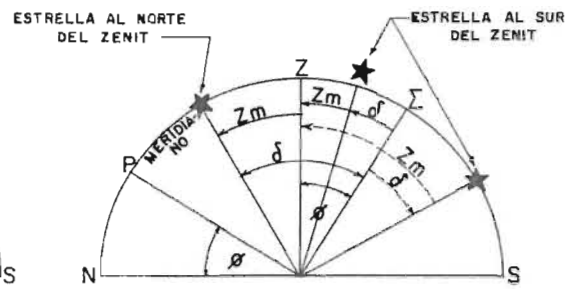


FIG. 6

FIG. 7 LOCALIZACION DE LA POLAR

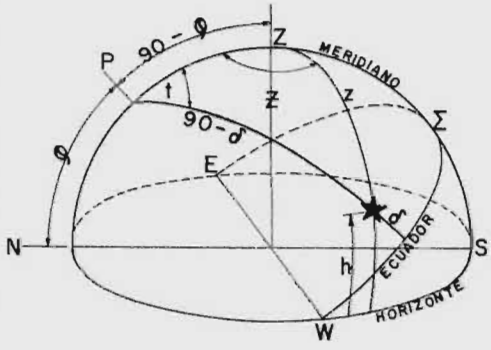


FIG. 8

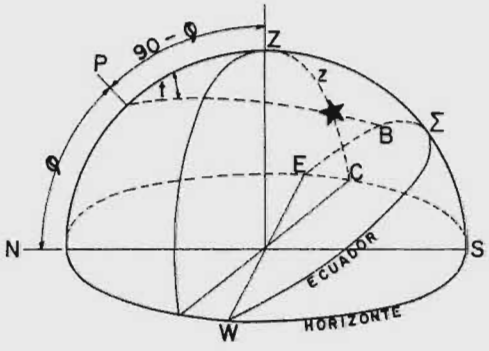


FIG. 9

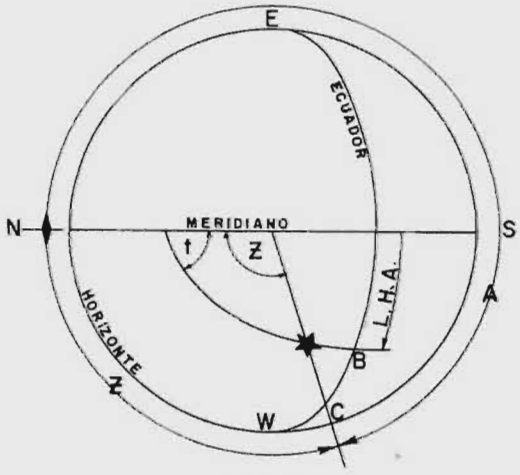


FIG. 10

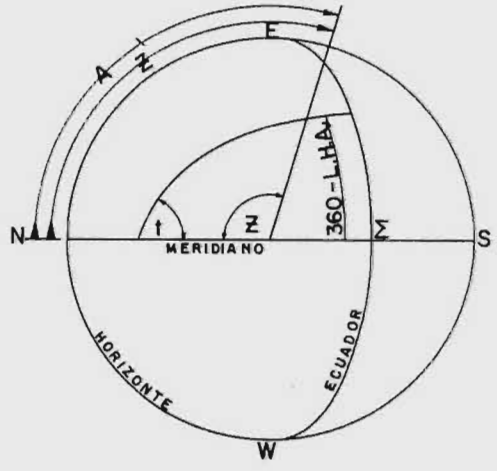


FIG. 11

guían era el de proporcionar a la gente o a los navegantes los detalles más característicos de una región. Se apuntaba en ellos los pueblos, caminos, los ríos y montañas.

Antiguamente los marinos navegaban bordeando la costa y siempre a vista de ella. Se sabía que se llegaba a cierto País, al doblar un cabo o pasar la desembocadura de un río.

Se necesitaba mucho arrojo y se admiraba por su audacia a quien se adentraba en el mar. La única luz segura era la Polar y su guía faltaba en las noches de niebla y tormenta. Se amarraba el timón durante el día para corregir de nuevo el rumbo al llegar la noche.

Al despertar el cálculo y más que todo como una inquietud matemática de quien resuelve un problema, se comenzó a trazar las primeras teorías de la proyección exacta. Gerhard Kremer, más conocido como Gerardus Mercator (1512-1594), publicó su carta del Mundo en 1569. Heinrich Lambert (1728-1777) fué el primer matemático que hizo investigaciones generales sobre el tema de las proyecciones.

Con seguridad se puede decir que no se ha agregado nada nuevo a estas teorías.

Francia fué el país que con sus necesidades de guerra (1914-1918), recordó y adoptó las proyecciones de Lambert.

Generalidades:

El problema principal en un Mapa, es el de representar en el plano del papel todos los detalles característicos de la superficie terrestre. La solución completa es imposible y a lo sumo se logran ciertas ventajas con el sacrificio de otras.

Un sólido se conoce como desarrollable, si al cortarlo de alguna manera especial se logra después extender su superficie sobre un plano, sin aumentarla o desgarrarla.

Se distinguen pues dos clases de superficies: las que son desarrollables o extensibles como el cilindro y el cono, y las que no lo son, como la esfera y los elipsoides. Nuestro Mundo tiene la forma de un esferoide y en eso reside la dificultad en la construcción de un Mapa.

Entonces, la única manera posible de representar con exactitud la superficie de la Tierra, es construyendo los Mapas sobre un globo.

El uso de los Mapas solamente es por conveniencia y ellos, dentro de sus limitaciones, solo sirven para la finalidad a que se les destina.

Para resolver la cuestión, lo que se hace es proyectar todos los puntos de la Tierra en una superficie hipotética tangente a ella. Esta superficie debe ser de la clase extensible ya que toda curva dibujada en ellas, muestra su verdadera forma y longitud después de su desarrollo.

Como es imposible conservar todas las propiedades en la proyección, es necesario sacrificar ciertas ventajas para lograr otras de más interés en la presentación. De aquí que existen diferentes clases de Mapas, y el entendido por el solo nombre conoce sus propiedades.

A continuación señalo algunas de las propiedades que se conservan:

1) Conservar las áreas a expensas de sacrificar la forma (proyección equiárea).

2) Conservar la forma de los menores caracteres geográficos, cabos, bahías, lagos, etc., a expensas del cambio de escala en todo el Mapa (proyección conforme).

3) Repartir todas estas condiciones tratando de que el error sea un mínimo cuando se considere la superficie y la forma.

4) Que las direcciones sean exactas tomadas desde el centro del Mapa y que las que se tomen en otros puntos tengan el error menor posible (proyección azimutal).

En todo Mapa, el problema fundamental es la de trasladar la correspondencia de los paralelos y meridianos para que sirvan de marco y poder plotear así entre ellos todos los demás detalles característicos. Así, en unos los meridianos son líneas paralelas, en otros son líneas convergentes o líneas curvas, etc.

Solamente trataré dos clases de proyecciones, a saber: El Mercator y la proyección conforme de Lambert.

Antes de entrar en los detalles de estas Proyecciones, es conveniente tratar ciertos conceptos básicos sobre las mismas.

Definición de Proyección.

Es un dibujo sistemático de líneas que representan Meridianos y Paralelos en un plano.

La situación y forma de meridianos y paralelos se logra por medio de Tablas calculadas a propósito, según la clase de proyección.

Una cuestión importante es, que en todo Mapa conocida la latitud y longitud de un punto sobre la Tierra, debe situarse exactamente en el plano de la carta, y viceversa, a que todo punto dibujado en él, se le determinen sus coordenadas geográficas.

Deformación.

Se comprenderá que todo Mapa tiene distorsiones y que solamente debe de buscársele utilidad al objeto que se le destine.

Las deformaciones de una carta de ninguna manera son errores.

Es importante pues, conocer las distintas clases de proyecciones y con el solo nombre determinar sus conveniencias y ventajas.

Por ejemplo, al Censo le interesan las áreas exactas; a la navegación, los rumbos; a la milicia, un Mapa de uso general que permita los errores en un mínimo.

Clases de Mapas.

Hay un centenar de proyecciones, y por sus propiedades las más importantes son: Equiáreas, Conformes, Azimutales y Métodos Comunes de Perspectiva.

Por su clase: Proyección Cilíndrica y Proyección Cónica.

Concepto sobre el Cono y el Cilindro.

Estos dos sólidos, solamente sirven para ayudar a visualizar o comprender la clase de solución que se le busca a una representación terrestre. Las proyecciones se basan en el estudio de estos sólidos y ya comprendido esto, no se les vuelve usar.

Si nuestro Mundo fuera un cilindro, los meridianos serían rectas paralelas, y los paralelos, círculos iguales que serían líneas rectas una vez desarrollados. Por eso, a todo Mapa en que los meridianos y paralelos, son rectas paralelas, se le llama de proyección cilíndrica.

Si en cambio, el Mundo fuera un Cono, los meridianos serían rectas convergentes, y los paralelos, círculos de distinta curvatura que se mostrarían como círculos una vez desarrollados.

Línea Loxodrómica o de Rumbo.

Si una nave se moviera sobre la Tierra de tal manera que cortara a los meridianos en un rumbo constante, la trayectoria es una Loxodrómica y se diría que navega en la Loxodrómica. Esta línea no es la distancia más corta entre dos puntos.

Línea Ortodrómica o Geodésica.

Se le llama así, al arco de círculo máximo entre dos puntos y por lo tanto constituye la distancia más corta.

Al proyectarse la ortodrómica, se muestra como una curva, y no como la recta entre dos puntos.

El Mapa en que ésta línea sigue siendo una recta, es la Gnomónica y esa es su única importancia. Se hablará más de ésto en la parte de la proyección Mercator.

Definición del término "Conformidad".

Antes de definir, me parece bien recordar un ejemplo matemático por todos conocido. Este ejemplo es, *el Momento de Inercia.*

La definición del momento de Inercia solamente es posible de una manera diferencial. Se le conoce como la multiplicación de un área pequeña o elemental por una distancia al cuadrado. Se cometería un error grave si no se especificara que el área debe ser diferencial. Se obtiene el resultado concreto por medio de la integral, hallándosele luego múltiples aplicaciones.

Se verá que esto es una propiedad importante del *Todo,* pero su fundamento y explicación está en la *parte.*

Una cosa parecida sucede en una representación conforme. Supongamos que existe una superficie y que en ella hay dibujado un triángulo infinitesimal y que luego examinamos otro triángulo elemental en otra distinta superficie. Si hay correspondencia en la longitud de los lados y en la abertura de los ángulos, se dice que la representación es conforme o que se ha dibujado un "mapa".

Este principio es de un uso importante en distintass ramas matemáticas de la ingeniería.

Y como se comprende que los ángulos se conservan, se define mejor diciendo que a un haz ortogonal en una superficie, corresponde otro haz también ortogonal en otra.

Fácilmente se deduce que en una proyección conforme, los meridianos deben de cortar a los Paralelos en ángulos rectos, y por este simple hecho se puede decir si un mapa es conforme o no.

Si dos líneas de vista en la Tierra se cortan en un ángulo, en el mapa lo harán lo mismo sus ortodrómicas.

En una representación conforme, pues, se conservan los ángulos y las longitudes de las figuras pequeñas o elementales. Por supuesto que existen discrepancias en el *Todo* y correspondencia en las *partes*.

Ejemplos de Mapas conformes son Mercator y Lambert.

Proyección Gnomónica

Hablaré brevemente sobre esta clase de Mapas y me decido a mencionarla porque complementa en mucho a la Mercator.

El principio en que se funda la Gnomónica es, en proyectar desde el centro del Esferoide hacia un plano tangente, todos los puntos sobre la Tierra. Se comprenderá que todos los círculos máximos aparecen aquí como líneas rectas y en esto reside su única y capital importancia.

Para la navegación es de gran utilidad el poder determinar la ruta más corta, pues basta unir el punto de partida y el de llegada con una línea recta y se aprecia fácilmente si en la ruta hay interferencias, como son: islas, malas corrientes, sitios de poco fondo, etc... Desdichadamente esta representación no sirve para un buen uso general en áreas, rumbos y distancias.

Proyección Mercator.

El nombre de esta proyección proviene del nombre latino usado por su inventor Gerhard Kramer, nacido en Flandes en 1512.

En 1569 Mercator publicó su carta del Mundo y se basó en fórmulas aproximadas. Después y con el despertar del cálculo y ya en 1599, Edward Wright señaló los errores de Mercator y publicó un sistema más exacto, dando las tablas correspondientes.

También es bueno mencionar que Mercator fué el que bautizó con el nombre de Atlas, los Mapa Mundi.

El dijo, que lo que hacía era hallar una mejor disposición para los meridianos y los paralelos, pues a ningún marino le gustaba navegar con dos meridianos curvos y convergentes.

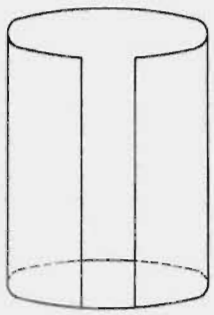
La proyección es de la clase "Conforme". Antes de hablar sobre sus ventajas, mencionemos su principal defecto.

Para los fines de la explicación, aceptemos que la Tierra es redonda.

Siendo todos los meridianos iguales, se comprenderá que todos los arcos de un grado de latitud son iguales en cualquier sitio Sur ó Norte. En cambio, los círculos paralelos no son lo mismo y varían cuando varía la latitud.

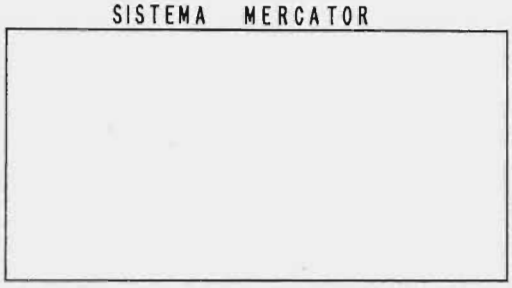
Por ejemplo: Si en el Ecuador tomamos un cuadrado de un grado de latitud y un grado de longitud, luego en el paralelo 60 grados consideramos otro cuadrado de un grado de latitud y un grado de longitud, observaremos lo siguiente: que de Norte a Sur miden lo mismo, y que en cambio de Este a Oeste mide la mitad que en el Ecuador, entonces su área será un medio. En la proyección Mercator a los 60 grados de latitud la distancia entre paralelos es el doble y por lo mismo su escala. Como resultado se representa una área 4 veces mayor.

P R O Y E C C I O N E S

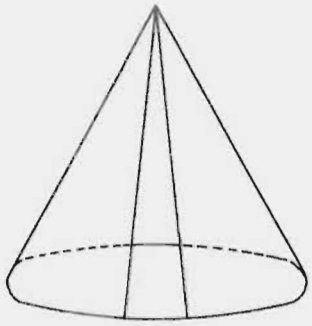


SUPERFICIE CILINDRICA CORTADA DE BASE A BASE.

SISTEMA MERCATOR

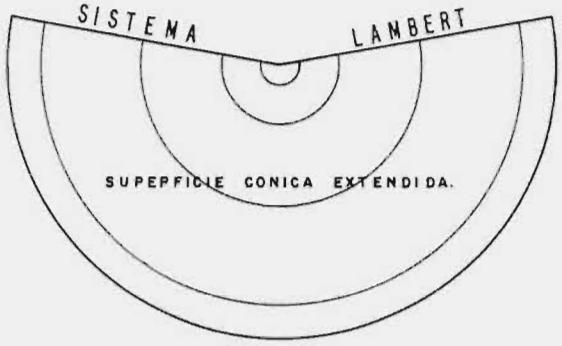


SUPERFICIE CILINDRICA EXTENDIDA.

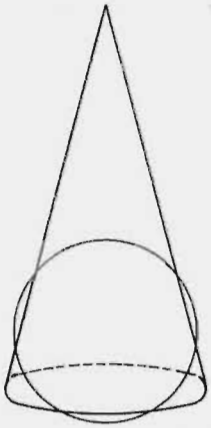


SUPERFICIE CONICA CORTADA DESDE LA BASE AL VERTICE.

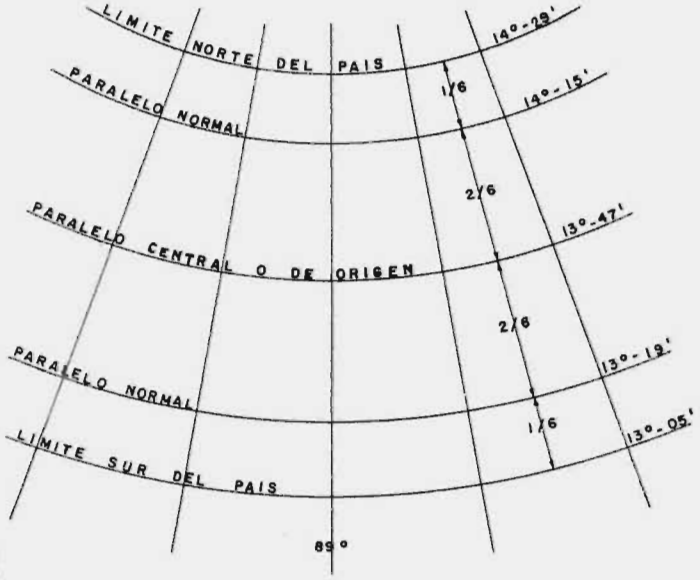
SISTEMA LAMBERT



SUPEPFICIE CONICA EXTENDIDA.



ESQUEMA QUE MUESTRA LA PROPORCION ENTRE EL MUNDO Y EL CONO SECANTE.



En el paralelo 80 grados ya el área es unas 36 veces, y en el 86 grados unas 3000 veces mayor. Luego la proyección resulta exagerada hacia los Polos.

Hay que recordar que en los comienzos de nuestros estudios en Geografía, tenemos la impresión de que Groenlandia es mayor que la América del Sur, siendo que al revés la segunda es 9 veces mayor que la primera. La proyección no es buena en la latitud 80 grados, necesitándose en este caso, otra clase de mapas circumpolares.

En los Mapas Mercator no se puede aplicar ningún procedimiento gráfico para trazar meridianos y paralelos.

No sirven para un uso general.

Aquí es bueno mencionar, que los Mercator no son el resultado de proyectar en un cilindro tangente como comunmente se supone, sino que son representación conforme y que la disposición entre paralelos solamente se logra por cálculo y con la ayuda de las Tablas correspondientes.

Ventajas.

1) Es la principal de las proyecciones cilíndricas, la más antigua y aceptada al través de los siglos por los navegantes.
   La más internacional.
2) Existen tablas que facilitan su cálculo en todo el Mundo.
3) Sus puntos son resultado de igualdades matemáticas y por lo mismo los Mapas se añaden y sobreponen, cosa que no sucede en la generalidad de las proyecciones.
4) Conocida la latitud y longitud de un punto, las tablas permiten la localización exacta en el Mapa.
5) Por ser los meridianos, verticales y paralelos, permiten leer con un transportador el rumbo en cualquier sitio.
6) Con ayuda de un Mapa Gnomónico, se puede trazar la línea ortodrómica (Círculo máximo) y navegar por la ruta más corta.

LA PROYECCION CONICA CONFORME LAMBERT

Esta proyección fué ideada por Johann Heinrich Lambert y publicada en el tercer volumen de su "Beiträge Zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung", Berlín, 1772.

Haciendo honor a la memoria del gran matemático Lambert, es justo reseñar un breve bosquejo sobre su vida.

Nació en Mülhausen, Alsacia, en el año 1728, de origen humilde, solo y sin la ayuda de nadie, logró superarse de tal manera que mereció favores de Federico el Grande quien lo nombró miembro de la Real Academia de Ciencias de Berlín en 1764.

Su costumbre regular era dedicar 17 horas diarias al estudio de las matemáticas. A la edad de 16 años hizo cálculos para el cometa de 1744, llamados Teoremas de Lambert.

Entre sus muchos trabajos pueden citarse los siguientes: introducción de las funciones hiperbólicas a la Trigonometría, demostración de la inconmensurabilidad de π, sus teoremas sobre las cónicas que llevan su nombre, y así tantos otros. Fué Físico, Matemático y Astrónomo.

Pero lo principal, donde se le debe homenaje a Lambert, es en su aportación a la Cartografía.

Fué el primero que realizó investigaciones generales sobre el problema de Cartografía. Antes de él, las soluciones se limitaban a métodos sencillos de proyección ortogonal y perspectiva. Lambert concibió desde un punto de vista superior la representación de la esfera sobre un plano, estableciendo las condiciones que debe de llenar toda proyección Cartográfica, esto es, la conservación de los ángulos o conformidad y la igualdad de las áreas o equivalencia.

Inició una nueva era en la ciencia Cartográfica, y el principio de conformidad es de gran importancia en las matemáticas puras.

Aunque él no perfeccionó la teoría, expuso claramente las ideas originales que fueron punto de partida para Lagrange y después para Gauss quien depuró totalmente el sistema y por lo mismo, a veces se llama con su nombre a esta proyección.

Finalmente, Lambert murió a los 49 años en 1777.

Generalidades sobre el Sistema de Lambert.

Esta es una proyección de la clase cónica, en que los meridianos son rectas convergentes fuera del papel del Mapa y los paralelos círculos concéntricos cuyo centro común es la intersección de los meridianos.

El concepto de la proyección reside en lograr la representación de los diferentes puntos de la superficie terrestre en un gran cono tangente al mundo. La proyección se logra por medio de equivalencias matemáticas (diferenciales en la representación conforme), logrando obtenerse fórmulas y tablas especiales para la determinación de las coordenadas en los distintos puntos del Mapa.

Debe de quitarse la idea errónea de que existe algún punto de fuga de donde parten las proyecciones. Tanto en el sistema de Lambert como el de Mercator, la proyección es matemática.

El ángulo del vértice del cono tangente es variable y depende de la latitud del sitio de tangencia.

En el Mapa de Lambert como toda representación conforme, las líneas que representan los meridianos deben de cortar a los círculos paralelos en ángulos rectos.

En los distintos puntos del mapa existen errores, mejor dicho, deformaciones de escala. Si se quisiera obtener mejor exactitud hay también diferentes constantes de escala.

Esta proyección es conveniente para los países en que su extensión predominante es de Este a Oeste, en cambio en los lugares en que la extensión mayor es de Norte a Sur, el sistema no es muy apropiado debido a la convergencia en el cono.

En un Mapa de Lambert, tanto la línea ortodrómica o círculos máximos y las líneas losodrómicas o de rumbo, no se representan en la carta por medio de rectas, aunque la desviación relativa es poca, pues en una distancia de 3.200 millas Marinas existe una desviación de 16 millas marinas en la línea recta del Mapa.

A simple vista puede creerse que los meridianos y paralelos son líneas rectas paralelas, pero puede apreciarse la convergencia de los meridianos en el margen y esquina superior derecha del Mapa Oficial de El Salvador en escala 1:200000.

En la parte de mi Tesis, correspondiente a las Tablas, presento las necesarias para el cálculo de los diferentes elementos del Mapa en coordenadas Lambert.

Las constantes son tomadas del folleto del Servicio Geodésico Interamericano elaboradas especialmente para El Salvador. El nombre de la publicación es: PROYECCION LAMBERT PARA EL SALVADOR.

El sistema de la representación se hace por medio de coordenadas rectangulares y la solución del problema se presenta así:

a) Conocida la latitud ϕ y la longitud γ, por medio de las tablas se calculan las correspondientes abscisas y ordenadas.

b) Al revés, a cualquier punto tomado del mapa o que se le conozcan sus coordenadas rectangulares Lambert, las tablas permiten el cálculo de la latitud y longitud geográfica.

El procedimiento de hacer un mapa es el representar los meridianos y los paralelos en el plano del papel para que sirvan como referencia para el ploteo de todos los puntos interiores. Decidido el intervalo entre Meridianos y Paralelos, se calculan las coordenadas rectangulares de las esquinas de cuadrícula, resultando luego fácil su dibujo.

Ya había mencionado que en la proyección Lambert se considera un cono tangente a la Tierra y que eso introducía errores de escala en los diferentes paralelos de latitud, exceptuando naturalmente, el paralelo en el punto de tangencia.

Para mejorar las características de escala, es decir, para repartir y disminuir estos errores, lo que generalmente se hace en esta proyección es usar un cono secante en lugar del tangente antes mencionado. Obviamente, el cono secante cortará al esferoide en dos paralelos los cuales reciben el nombre de paralelos convencionales. La escala será la verdadera en estos dos paralelos y se encontrará que dentro de ellos la escala se reduce y que afuera aumenta. Para la distribución igual de los errores de escala, los paralelos convencionales se sitúan a un sexto y cinco sextos del meridiano que se quiere representar.

Distintas ventajas y conveniencias del uso de la Proyección Lambert, especialmente para El Salvador.

a) *Sistema oficialmente establecido en nuestro País.*

Con esta clase de coordenadas está dibujado nuestro Mapa y por lo tanto, todos los diferentes puntos de control existentes tienen como dato este sistema. La Dirección de Cartografía proporciona al que lo desea la información necesaria para cualquier punto que se necesite.

b) *Coordenadas rectangulares para la cuadrícula.*

Esto representa una ventaja decisiva en el uso de este sistema, pues cualquier poligonal corriente puede llevarse de un punto a otro sin ninguna dificultad técnica, como lo sería conocer solamente las coordenadas geográficas de latitud y longitud.

Todos conocemos el famoso estribillo de "usar las coordenadas del Mapa".
Si sucediera el caso, y ello es lo más corriente, de tener un trabajo calculado en base a cualquier sistema de coordenadas asumidas, siempre las podremos con-

vertir mediante el uso de las fórmulas de Transformación de Coordenadas de la Geometría Analítica elemental.

c) *Precisión matemática del Sistema*

Siendo que la proyección Lambert se basa en relaciones matemáticas exactas y que además la Dirección de Cartografía tiene ajustadas las medidas, se puede por lo tanto, ajustarse a este sistema con la confianza de que las distintas hojas de un trabajo calzarán bien sin lagunas y sobreposiciones.

d) *El Sistema es Conforme.*

Por ser la base de la Teoría de nuestro Mapa la "Conformidad' es decir, la conservación de los ángulos y de las distancias sin importar su azimut (dirección) de las partes pequeñas o elementales, siempre podemos poseer datos suficientemente exactos en todas las medidas corrientes. Hay que recordar en nuestro caso, que el *Todo* es la República de El Salvador y que la Colonia Centro América, La Escalón, etc., son simplemente diferenciales.
Sin embargo, si se quisiera lograr una exactitud extrema, existen para el caso las correspondientes constantes de escala en los diferentes paralelos de Latitud.

e) *La principal extensión de nuestro País es de Este a Oeste.*

Ya se expuso en las generalidades del sistema, que la Proyección Lambert es apropiada para los países que se extienden en Longitud.

f) *Facilidades en la Computación.*

Existen tablas especiales elaboradas para El Salvador por El Instituto Geodésico Interamericano.
Los cálculos se pueden efectuar ya sea por logarítmos o por el uso de una máquina de calcular.

g) *La Defensa Efectiva de la Nación.*

Los meridianos cortan correctamente a los paralelos, y siempre se puede determinar la exactitud en rumbo y distancia, obteniendo así, una mejor efectividad en el tiro.
Aquí vale recordar que Francia (1914) tenía antiguamente su Mapa basado en la representación de Bonne y eso ocasionó que en un principio el enemigo gozaba de relativa seguridad en sus colinas. Por eso se debió que los aliados recordaran al Sistema Lambert y lo usaran en el resto de su campaña.

Deducciones y consideraciones Generales de los elementos del desarrollo.

Consideraciones.

Ya se ha explicado que el Mapa es el resultado de la proyección matemática conforme de todos los puntos de la Superficie Terrestre sobre un Cono Secante Hi-

potético. Por lo tanto, los Meridianos se transforman en líneas rectas convergentes a un punto fuera del plano del Mapa, y los Círculos Paralelos, en círculos Concéntricos del distinto radio con centro común en el vértice del cono, el mismo de la intersección de los Meridianos.

También, que el cono tiene la propiedad de que cualquier figura dibujada en él, no sufre deformación alguna después del desarrollo.

Tenemos lo siguiente:

a) Los puntos sobre el esferoide ya han sido proyectados sobre el cono, y éste, ya se tiene extendido en el plano del papel.
b) Un Meridiano y un Paralelo Central de origen, escogidos arbitrariamente como ejes centroidales de nuestro País (Paralelo 13° 47', Meridiano 89° Oeste).
c) Que sea P cualquier punto, CP su correspondiente círculo Paralelo con radio R=AP=AC con centro en A, y θ el ángulo de convergencia de su meridiano AP. Estos valores de R y θ son funciones de la latitud y longitud, resultados del cálculo de la proyección conforme (Tabla I).
Debe notarse que se ha verificado una transformación de coordenadas, pues de los parámetros ϕ y γ geográficos se ha pasado a los polares con el polo en A, radio vector R y ángulo polar θ.
d) El punto 0 lo escogemos como origen de la zona, siendo sus coordenadas polares R_o, θ_o y sus coordenadas geográficas ϕ_o γ_o (13°47', 89° Oeste).
e) Que para evitar coordenadas rectangulares negativas se hace uso de una abscisa falsa FE y una ordenada falsa FN.
A la abscisa falsa FE se le atribuye un valor de 500,000, múltiplo de 100,000 por facilidad de cálculo. En cambio, no hay ventaja en hacer que FN tenga un valor exacto, y es más conveniente que la suma R_o+FN, sea un múltiplo de 100,000 debido a que es una constante importante en el cálculo de las coordenadas.

f) Los valores constantes en el cálculo para El Salvador son:

Paralelos convencionales o Normales	13° 19' Norte
	14° 15' Norte
Paralelo central o de origen	13° 47' Norte
Meridiano Central	89° 00' Oeste

Radio Vector de Origen R_o= 26 004 190.816 metros
Abscisa falsa 295 809.184 metros (FN)
R_o+FN = 26 300,000 metros
Factor de escala en el origen K_o= .99996704
sen ϕ o = .23825 09560

Deducción de los elementos.

El valor de R dependiente de la latitud ϕ se obtiene directamente de las tablas.

De la figura se deduce que Y' = R_o + FN — R.

Siendo que el valor de R_o + FN es la constante 26300000, el valor de Y' depende de R y por lo tanto de ϕ.

En la tabla I se dan los valores de las funciones de la latitud ϕ, como son: R, Y' y el factor de escala K.

La convergencia de los Meridianos θ varía en función del incremento de longitud Δy. En la tabla II se dan los valores naturales de sen θ, tan θ, tan $\frac{\theta}{2}$ con sus respectivas diferencias Tabulares para un segundo. Cuando un Meridiano está al Este del meridiano del central, Δy es positivo y al Oeste es negativo.

Por ejemplo:

para $y = 88°40'$ se tiene $\Delta y = + 20'$
para $y = 89°20'$ se tiene $\Delta y = - 20'$
Del triángulo ABP, $X' = R \text{ sen } \theta$

$$\text{BCP, } Y'' = X' \tan \frac{\theta}{2}$$

Ahora, la abscisa X será $= FE + X'$
la ordenada Y será $= Y' + Y''$

y con esto termina el cálculo de las coordenadas rectangulares Lambert de un punto, cuando se le conocen sus geográficas ϕ, y.

Cálculo de las posiciones geográficas de un punto en función de sus coordenadas rectangulares Lambert.

Este es el camino inverso a la deducción anterior. También es el más común en la práctica, pues lo corriente es tener las expresiones rectangulares de los distintos puntos de una poligonal.

Deducción de las fórmulas:

$$X' = X - FE$$

$$\tan \theta = \frac{X'}{Ro + FN - Y} = \frac{X'}{Y'''}$$

con el valor de tan θ, se busca el valor de Δy en tabla II y a la par se deduce tan $\frac{\theta}{2}$ en la misma tabla.

La diferencia por curvatura $Y'' = X' \tan \frac{\theta}{2}$
y ahora se deduce $Y' = Y - Y''$

con el valor de Y' se busca en la Tabla I y así se deduce la latitud ϕ.

Para obtener la longitud y, se suma Δy a la longitud 89° del meridiano central, siendo el signo de esta suma + si está al Oeste y — al Este.

Por ejemplo:

Para $X = 436000 < 500000$, Δy es +
para $X = 566000 > 500000$, Δy es —

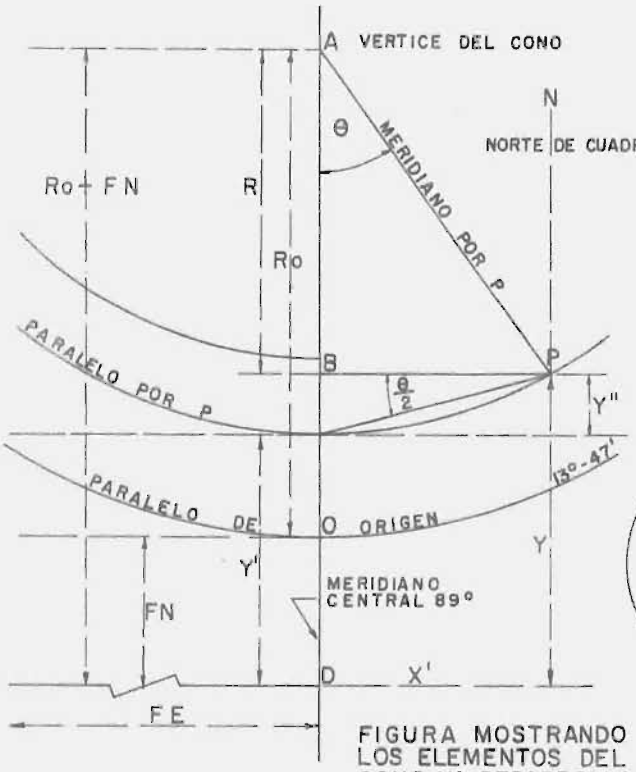


FIGURA MOSTRANDO LOS ELEMENTOS DEL CONO YA DESARROLLADO

FIG. A

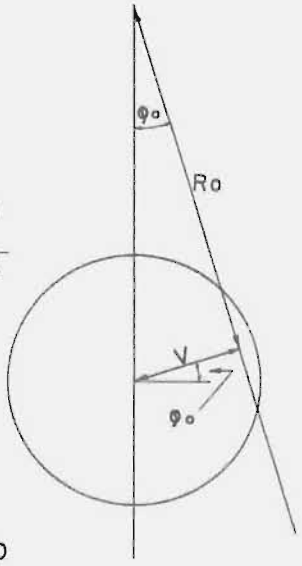


FIG. B

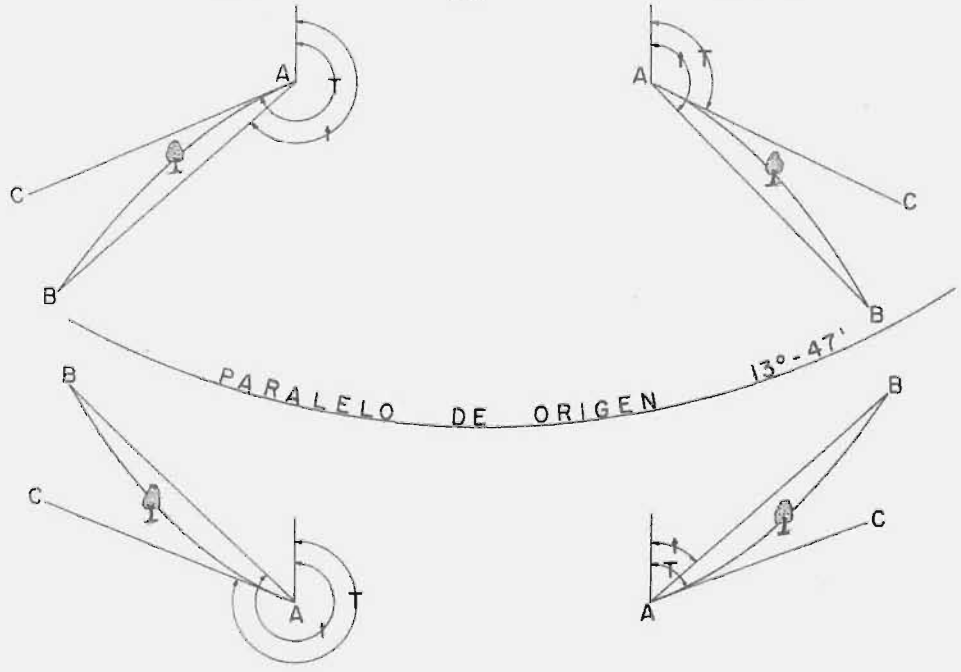


FIG. C

Consideraciones generales sobre los Azimutes y Reducción de Largura.

Una expresión muy importante en el cálculo de los azimutes y factores de escala es, la longitud de la Normal al Esferoide que termina en el eje menor. En el Apéndice matemático doy la deducción de la fórmula.

Llamamos v la longitud de la Normal.

Entonces:

$$v = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}$$

En la figura B se puede ver la longitud de R^o es:

$$R^o = v^o \cot \phi^o$$

Se obtiene un valor de R^o más exacto al multiplicar esta expresión por su factor de escala $K^o = .99996704$.

Entonces $R^o = K^o v^o \cot \phi^o$

Los Azimutes en la Proyección Lambert.

Existen cuatro clases de azimutes los cuales son: el Astronómico, El Geodésico, el Geodésico proyectado y el de Cuadrícula.

El azimut Astronómico es el que resulta de las observaciones astronómicas con referencia a la dirección de la plomada.

El Azimut Geodésico es el computado con referencia a la Normal del Esferoide de Clarke 1866.

En una proyección Lambert, la trayectoría más corta entre dos puntos A y B sobre el Esferoide, no se representa como la recta, sino como la curva de A hacia B. Si colocáramos nuestro Teodolito en A y sucediera que al dirigir la línea de vista hacia B, algún obstáculo como el árbol de la figura C se interpusiera en la visual, indudablemente no se vería B. Pero al dibujarse en la proyección los tres puntos, aparentemente el árbol no se interpone por no estar en la recta de A hacia B.

La diferencia entre la curva y la recta de la proyección, se puede ignorar cuando su longitud es corta, pero cuando las visuales son mayores de un kilómetro y medio, ello puede tener alguna significancia.

Entonces: Azimut Geodésico proyectado es el ángulo en el sentido horario desde el Norte de cuadrícula hasta la tangente a la curva ortogrómica (tangentes AC en la figura C).

También debe tomarse en cuenta que el caso de las visuales largas es el mismo de las poligonales abiertas, pues el azimut de cierre es la suma de las distintas deflexiones en las diferentes líneas, al azimut de partida. La correción, la cual se llama rectificación, debe de hacerse en el azimut de cierre.

La curva ortodrómica entre dos puntos, es cóncava hacia el paralelo de origen. Figura C. Siendo mayor la curvatura en las líneas de Este a Oeste y menor en las Norte-Sur, también es menor cerca del paralelo de Origen, creciendo a medida se aleja de él.

El azimut geodésico proyectado puede obtenerse del Geodésico con solo agregar la convergencia θ. El signo de la convergencia es positivo al Este del Meridiano

central, y negativo al Oeste. Es importante recordar que el azimut Geodésico se mide a partir del Sur, y que el proyectado, es decir, el que se usa en la proyección, es con referencia al Norte de cuadrícula. La diferencia real angular entre dos líneas de vista, es la diferencia entre sus azimutes Geodésicos proyectados. Este es el ángulo que se mide en el campo con el teodolito.

La convergencia θ se puede establecer por medio de las tablas, en que ya se ha calculado este valor en función de la longitud, Tabla II ó por medio de la siguiente fórmula:

$$\theta = \text{sen } \phi o \ \Delta\gamma$$

en que senϕo es sen $13°47' = 0.23825096$

y $\Delta\gamma$ es la diferencia en longitud con 89° expresada en segundos.

El azimut de Cuadrícula es el ángulo en el sentido horario desde el norte de cuadrícula hasta la línea recta entre la proyección de dos puntos. Aparentemente la distancia más corta.

Designemos con T el Azimut Geodésico proyectado y con t el de cuadrícula.

El Azimut T es una cantidad física real y su importancia estriba en que es el medido por el Teodolito.

El Azimut t es una cantidad originada en el cálculo corriente de la topografía. Con t se computan las direcciones, proyecciones y coordenadas de las distintas líneas y vértices de una poligonal. Indudablemente resulta más cómodo su uso y es el que corrientemente se conoce como Azimut.

Entonces, en cuanto azimut, podemos establecer dos cosas importantes: una, que en la realidad se mide con T, y otra que en la Oficina calculamos con t. Se necesita pues, la corrección T—t (rectificación).

En general esta corrección no tiene importancia, salvo en trayectos muy largos o en trabajos muy importantes.

La comodidad de las coordenadas Lambert, es que son de la clase rectangular y así se prestan con facilidad al uso corriente del cálculo y compensación de una poligonal abierta o cerrada. Basta considerar las verdaderas Lambert en vez de algunas asumidas cualquiera, para gozar después de todas las ventajas técnicas como son: conocer la posición Geográfica de algún punto, verdadero rumbo y distancia entre puntos y sobre todo que las hojas de planos sean exactas al coincidir, etc...

El único inconveniente de las rectangulares es en su corrección del Azimut el cual se tiene que determinar por la fórmula:

$$t-T = \frac{X_2-X_1}{6Po\nu o \text{sen } 1''Ko^2} (2Y_1+Y_2-3FN)$$

Aquí Po,νo, Ko son el radio de curvatura, la longitud de la Normal y la constante de escala en el origen.

Tenemos: $6Po\nu o \text{sen } 1''Ko^2 10^{-8} = 11.7619$ lo que es una constante para la zona de El Salvador.

También $3FN\ 10^{-4}$ es una constante de la zona y es igual a 88.7428

Entonces:

$$t - T = \frac{(X_2 - X')(2Y' + Y_2 - 88.7428)}{11.7619} \quad \text{(en segundos)}$$

Lógicamente al azimut de arranque no se le necesita hacer corrección, pues tanto al azimut como al primer ángulo de lectura se le hace rectificación, de aquí que una anula a la otra.

El Azimut t es fácilmente deducible de las coordenadas por la fórmula:

$$\tan t = \frac{X_2 - X'}{Y_2 - Y'}$$

Reducción de Largura.

El factor de Escala, puede muy bien interpolarse, usando para ello la latitud media entre dos puntos y haciendo uso de la Tabla I.

Si se quisiera determinar la distancia exacta sobre la Tierra entre dos puntos a los cuales se les conocen sus coordenadas rectangulares Lambert, se usará la siguiente fórmula:

$$K = Ko + C'Y_m^2 + C_2 Y_m X_m^2 + C_3 \triangle Y^2$$

X_1, Y_1, X_2 Y_2 son las coordenadas de los dos puntos.

$$X_m = \frac{X_1 + X_2}{2} - FE \qquad Y_m = \frac{Y_1 + Y_2}{2} - FN$$

$$\triangle x = X_2 - X_1 \qquad \triangle Y = Y_2 - Y_1$$

$$C_1 = \frac{1}{2KoPovo} \qquad C_2 = \frac{to(2 - n_o^2)}{4K^2o(Povo)^{3/2}} \qquad C_3 = \frac{1}{24KoPovo}$$

siendo $n^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \phi o$

los valores c', c_2, c_3 son constantes para El Salvador

$$10^{12}C_1 = + 0.0123653 \qquad 10^{18}C^2 = - 0.0004755$$
$$10^2 C_3 = + 0.0010304$$

Entonces:

$$\overline{K} = Ko + 10^{12}C' (10^{-6}Y_m)^2 + 10^{18}C_2 (10^{-6}Y_m)(10^{-6}X_m) + 10^{12}C_3 (10^{-6} \triangle Y)^2$$

La distancia según la cuadrícula:

$$d = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle Y)^2}$$

La verdadera distancia será $= \dfrac{d}{\overline{K}}$

A continuación y para finalizar calculo algunos ejemplos de cálculo de proyección Lambert.

TRIANGULACION

ESPECIFICACIONES PARA EL CONTROL HORIZONTAL.

	Primer Ord.	*Segundo Ord.*	*Tercer Ord.*
Resistencia de Figuras: Límites deseables entre Bases de Σ Rl	80	100	125
Límites Máximos entre Bases de Σ Rl	110	130	175
Límites deseables de Rl para una figura	15 (R2=50)	25 (R2=80)	25 (R2=120)
Error de cierre en Distancia en el lado calculado y la Base Medida o Lado conocido	1:25,000	1:10,000	1:5,000
Error de cierre angular en los triángulos: Error promedio	1 segundo	3 segundos	5 segundos
Error máximo menor que	3 segundos	5 segundos	10 segundos
Comprobación de los lados de un cuadrilátero: Diferencia máxima entre el logaritmo de los lados en función para la dif. tabular para un segundo del ángulo más pequeño	2 veces	4 veces	
Número usual de observaciones para una dirección	16 posiciones	8 posiciones	4 posiciones
Medida de la Base	1:300000	1:150000	1:75000
El error probable de la Base no debe exceder	1:1000000	1:500000	1:250000
La discrepancia entre dos medidas de una sección no debe exceder	$10mm\sqrt{k}$	$20mm\sqrt{k}$	$25mm\sqrt{k}$
El error probable del Azimut Astronómico	0.3 seg.	0.5 seg.	2.0 seg.

PARA LAS POLIGONALES.

	Primer Ord.	*Segundo Ord.*	*Tercer Ord.*
Error de Cierre	1:25000	1:10000	1:5000
Error angular por estación	1.5 seg.	3.0 seg.	6.0 seg.
Error probable del Azimut Astronómico	0.5 seg.	2.0 seg.	5.0 seg.

TRIANGULACION.

Se le llama así al sistema de usar triángulos en cualquier medida sobre la Tierra.

Cuando la extensión del terreno es grande debe de adoptarse una cadena de figuras formadas con triángulos, para lo cual, escogemos al cuadrilátero como más consistentes.

El principio se funda en la simple solución de triángulos en los cuales se conocen los ángulos y por medio de ellos se deducen los lados.

El arranque de una red de triangulación se hace de la medida de un lado llamada línea Base o bien de dos vértices conocidos de una triangulación anterior.

Se dice que este sistema es fuerte en ángulos y débil en los lados y que las poligonales, por el contrario, fuertes en la longitud lineal, y débil en las angulares. Pero para que compita una poligonal con ventaja, se necesita que sea una geodésica de precisión, lo que resulta demasiado compendioso en la práctica del campo por redundar en la elevación del costo por motivo de los Cadeneros, la brecha, el transporte, más duración del tiempo, etc...

La Triangulación es de fácil realización de campo y de más complicación de Oficina, pero esto es a todas luces preferible porque se evitan muchas de las dificultades apuntadas en las poligonales.

En nuestro país, la Dirección General de Cartografía ha establecido una red de Triangulación la cual abarca todo el territorio y casi con seguridad se puede decir que no hay sitio de donde no se divise algún vértice conocido.

Por lo general la triangulación no se hace cerrar al mismo sitio ya que esto no se necesita, puesto que la experiencia de muchos años de los Matemáticos ha desarrollado métodos que hacen este sistema tan preciso como se quiera. Cuando la longitud a medir es demasiado grande, se hace la comprobación de cierre en otra base; como por ejemplo, la red que sale de la Base en la recta de San Miguel, se ha comprobado en la Base de San Salvador que une el parque Beethoven en la Colonia Escalón y el Edificio de la Compañía de Café.

Por todo esto, cuando se mida una Hacienda de regular extensión, es imprescindible hacerlo por triangulación.

Se puede tener la idea equivocada de que por medio de poligonales simples se pueden obtener los mismos resultados, pero no hay que olvidar que por mucho cuidado con que se efectúen las observaciones de los ángulos y las medidas de los lados, es imposible que se obtengan buenos cierres y se eviten o compensen los errores, ya que son factores decisivos: el exceso esférico, curvatura y además el gran número de medidas. Por supuesto, se entiende en una medida grande como de 30 caballerías o más.

El fin de las Poligonales simples es el de servir de una labor de relleno, saliendo de un vértice y llegando a otro.

Las ventajas en el sistema de Triangulación además de las descritas, son las siguientes:

a) Se establecen las posiciones geográficas de los vértices. Esto determina legal y seguramente los linderos y establece la situación de la Hacienda en el Mapa de El Salvador.

b) En las fincas de café donde la brecha es prohibitiva. (Con el uso de torres de madera y otras elevaciones del terreno).
c) Como una base para la Fotogrametría.
El sistema moderno de la Fotografía Aérea necesita puntos de control en las zonas básicas de las fotos, esto lo facilita la Triangulación o poligonales cortas basadas en los mismos vértices. Luego se obtienen planos con múltiples detalles y precisas curvas de nivel cada 2 metros por ejemplo.
d) La Triangulación es una labor que también tiene mucho de patriótica ya que ésta puede servir muy bien a ulteriores trabajos y además, completar más la red existente en el país.

Expuestas las ventajas, pasemos ahora a desarrollar el procedimiento seguido desde que se comienza en el campo, hasta que se termina en la Oficina.

Antes diré, que la experiencia en este ramo ha establecido normas y formas de cálculo que se llevan de una manera mecánica y por lo mismo de fácil realización.

Se puede considerar la Triangulación dividida en los aspectos siguientes: Localización, Observación y Cálculo.

LOCALIZACION

El Localizador o Reconocedor es la persona encargada de determinar en el campo los sitios más convenientes para los vértices de la Red. De ser posible, resulta de gran utilidad un previo examen de las fotografías aéreas de la zona, decidiendo sobre las mismas los sitios de más ventaja para identificar esos lugares después en el campo. Los implementos que deben acompañar al Reconocedor son: la brújula, Telémetro, nivel de barómetro aneroide y señales, como son, espejos o banderas.

El sistema de la Localización es el de efectuar una especie de levantamiento rudimentario de las elevaciones y demás sitios posibles de los vértices por triangular.

El Localizador al llegar a un cerro toma con ayuda de la brújula las direcciones y con el telémetro las distancias a las otras elevaciones del terreno y así sucesivamente hasta poder armar el esquema completo. Las precauciones que se deben de tomar en esta parte del trabajo son: anotar los detalles característicos como son árboles de mango, cercos de piedra, edificios, etc., y en el caso de que el cerro no sea reconocible a distancia, se deja una bandera como señal. (No hay que olvidar que un cerro presenta distintas formas desde diferentes lugares que se le mire). Tener el cuidado de desechar las visuales que pasan sobre fábricas y aquellas muy rasantes con los edificios por motivo de la refracción. Desechar también las visuales que formen con las otras direcciones, ángulos menores de 15 grados.

También y con ayuda del nivel de barómetro, se anotan las elevaciones para evitar la interferencia entre estaciones.

De todo esto se puede apreciar que no siempre el sitio más elevado es el conveniente, sino aquel en que las direcciones sean libres y formen buenas figuras.

Pasamos ahora a explicar el único cálculo que hace el Localizador y es la computación de la resistencia de las figuras.

CALCULO DE LA RESISTENCIA DE LAS FIGURAS.

La unidad de figura más resistente es el Triángulo.

RESISTENCIA DE FIGURAS

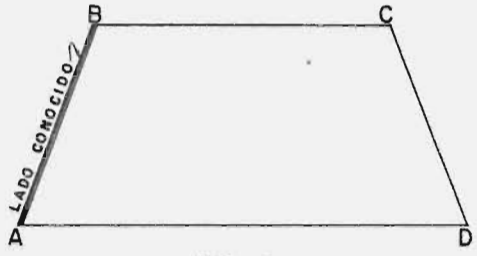


FIG. 1

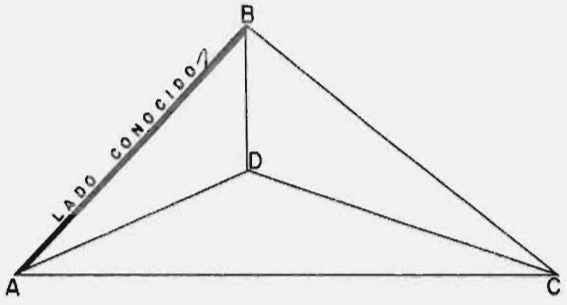


FIG. 2

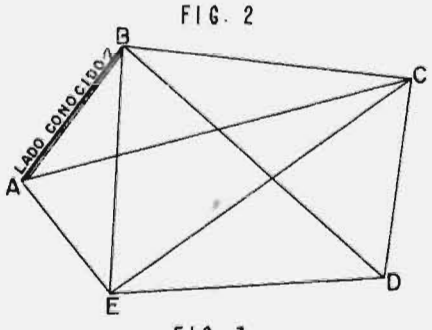


FIG. 3

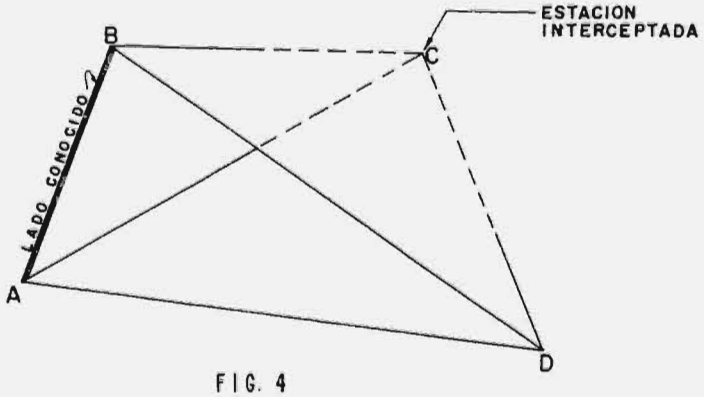


FIG. 4

Un cuadrilátero sería fácilmente deformable si no le ponemos sus diagonales. Entre una serie de triángulos o de cuadriláteros, unos son más resistentes que otros, dependiendo ello, de la proporción angular de sus lados.

En la resolución de un triángulo cualquiera, al computar el valor de los senos de los ángulos opuestos, se hace necesario el uso de las diferencias tabulares correspondientes y como se puede apreciar en toda Tabla de Funciones Naturales o de Logarítmos de los mismos, las diferencias son más grandes cuanto más pequeños son los ángulos. Por eso es que más influyente es un error cometido en un ángulo agudo.

Las figuras de Triangulación, como toda figura matemática, tiene sus condiciones indispensables que cumplir, por ejemplo en todo triángulo esférico, la suma de sus tres lados debe ser igual a 180° + el exceso esférico.

Analizando el cuadrilátero, se ve que sus condiciones de ángulo son tres ya que al cerrar tres triángulos, se asegura el cierre del cuarto. En lo referente a la condición de lado, en el cuadrilátero solamente es una, puesto que un lado solamente se comprueba en dos caminos distintos.

Examinando el cuadrilátero de la figura I, tenemos: si los triángulos ABC, ACD y ABD cierran bien, el restante triángulo BCD lo tendrá que ser también. De aquí se deducen tres condiciones de ángulo.

Supongamos conocido el lado AB, (Línea Base o lado conocido de una Red anterior) y queremos determinar la longitud del lado CD. Esto lo podemos hacer de dos únicas maneras: una, resolviendo los triángulos ABC y ACD lo que constituye un camino, y otro, resolviendo los ABD yBCD. Entre los dos debe haber un cierre admisible para CD.

También debe notarse que alguna de las maneras conduce a un mejor valor del lado pedido, es decir, el menos resistente. Esto constituye una condición de lado.

Ya explicado el concepto de la Resistencia, pasemos al cálculo teórico de la misma.

Usaremos la siguiente nomenclatura:

L^1= Líneas observadas en una dirección.
L^2= Líneas observadas en ambas direcciones.
L^t= Total número de líneas.
E^o= Estaciones ocupadas.
E^t= Total número de estaciones.
D = Número de nuevas direcciones.
C^t= Total número de condiciones.
C^a= Condiciones de ángulo.
C^l= Condiciones de lado.

Antes de proseguir se hace necesario explicar un poco de estos conceptos.

Supongamos que una línea AB ha sido observada en las estaciones A y B, entonces este lado tendrá dos direcciones, una de A hacia B y otra de B hacia A. Si solamente ha sido ocupada A, entonces solamente tendrá la dirección AB.

En las líneas de nuevas direcciones no se incluyen las del lado conocido o línea Base.

Se entiende por estaciones ocupadas, a las que se ha llegado físicamente. No sería el caso en una estación inaccesible, la que se tomaría por intersección de las otras.

El número de condiciones geométricas Ct siempre es igual a las condiciones de ángulo más de lado, esto es:

$$Ct = Ca + Cl$$

La fórmula que nos da la resistencia de un triángulo es

$$R = \frac{D-C}{D} \Sigma \ (\triangle^2 a + \triangle a \ \triangle b + \triangle^2 b)$$

En todo triángulo tenemos un lado conocido y otro que se quiere conocer y hacemos uso de los senos de los ángulos opuestos. Entonces $\triangle a$ y $\triangle b$ son diferencias tabulares de los logarítmos de los senos para un segundo tomados a seis cifras decimales.

El cálculo de este factor dependiente de las dif. tab. (el cual se basa en la teoría de los mínimos cuadrados) se verifica fácilmente haciendo uso de la Tabla, teniendo el cuidado de poner en el tope superior el ángulo más pequeño.

Las fórmulas para Ca y Cl son las siguientes:

$$Ca = L2 - Eo + 1, \quad Cl = Lt - 2Et + 3$$

A continuación daré unos ejemplos para el cálculo del factor $\frac{D-C}{D}$:

En un cuadrilátero completo. Fig. 1.

$Ca = 6 - 4 + 1 = 3$

$Cl = 6 - 8 + 3 = 1$ Luego $\frac{D-C}{D} = \frac{10-4}{10} = 0.60$

$C = 4$

$D = 10$

Es importante recordar el factor del cuadrilátero por ser su uso de mucha frecuencia.

En un triángulo con estación central, Fig. 2.

$Ca = 6 - 4 + 1 = 3$

$Cl = 6 - 8 + 3 = 1$

$C = 4$

$D = 10$ igual que el cuadrilátero 0.60

En un pentágono completo, Fig. 3.

$$\begin{array}{l} Ca = 9 - 5 + 1 = 5 \\ Cl = 9 - 10 + 3 = 2 \\ \hline C = \quad = 7 \\ D = 16 \end{array} \quad \text{Luego} \quad \frac{D - C}{D} = \frac{16 - 7}{16} = 0.56$$

En un cuadrilátero con una de las estaciones localizadas por intersección. (Vértice inaccesible). Fig. 4.

$$\begin{array}{l} Ca = 3 - 3 + 1 = 1 \\ Cl = 6 - 8 + 3 = 1 \\ \hline C = \quad = 2 \\ D = 7 \end{array} \quad \text{Luego} \quad \frac{D - C}{D} = \frac{7 - 2}{7} = 0.71$$

Como conclusión, se puede decir que el mejor camino es el menos resistente, (menor valor de R). Para el cálculo de un lado se escoje el valor del mejor par de triángulos, a los cuales se les llama R1. Al otro par se les denomina los R2.

Según las especificaciones para una figura singular.

Para primer orden	$R^1 < 15$, $R^2 < 50$
Para segundo orden	$R^1 < 25$, $R^2 < 80$
Para tercer orden	$R^1 < 25$, $R^2 < 120$

OBSERVACION EN EL CAMPO.

Es llevada a cabo por el observador con su anotador y los guardaluces, siendo los primeros los que verifican las mediciones angulares, y los segundos, los que cuidan del buen funcionamiento de las luces o señales.

El instrumento indicado para esta clase de trabajo es el Teodolito Wild T—3 o T—2.

El sentido en que se miden los ángulos es el azimutal (sentido del reloj), tomando como luz inicial la situada más a la izquierda. Según como se indican en la hoja de especificaciones, deben de medirse estos ángulos o tomarse las posiciones, 16 veces para primer orden, 8 y 4 respectivamente para segundo y tercer orden.

Debe tomarse en cuenta que para compensar los errores de graduación del Limbo, debe de hacerse uso de todo el plato cuando se efectúen las medidas. Como la graduación de los segundos es a 60, se procura cada cuatro posiciones leer alrededor de 10—25—35—50. segundos sucesivamente.

Las desviaciones angulares se leen en ambas posiciones del aparato, directo e inverso, lo que hace un total de 32 lecturas para cada vértice. Como al dividir 360 grados entre las 32 posiciones da 11.25 grados, lo que se hace para evitar la fracción es que en cada 4 posiciones, se agrega un grado más.

Se considera una posición completa, cuando leída la inicial se va efectuando la lectura en cada vértice sucesivamente hasta llegar a la luz más a la derecha, (hasta aquí hay media posición), luego se hace vuelta de campana regresando siempre y leyendo cada vértice hasta cerrar en la inicial. La medida angular de un vértice, es su lectura menos la inicial.

Para mejor indicación, doy a continuación un cuadro, indicando las lecturas de salida y llegada.

POSICION	SALIDA CIERRE	GRADOS	SEGUNDOS, ALREDEDOR DE:
1		00 180	10
2		191 11	25
3		22 202	35
4		213 33	50
5		45 225	10
6		236 56	25
7		67 247	35
8		258 78	50
9		90 270	10
10		281 101	25
11		112 292	35
12		303 123	50
13		135 315	10
14		326 146	25
15		157 337	35
16		348 168	50

Una serie de lecturas consta de 16 posiciones, teniendo cada una su correspondiente lectura, directa e indirecta para evitar el error de colimación.

El valor angular de una serie es la media aritmética entre 16 posiciones. Se considera una posición como buena, si su valor no es mayor que la media +

4 segundos, o menor que la media — 4 segundos. Si sucediera que alguna posición se saliera de estos límites, su valor se desecha y en el caso que no quedaran en toda la serie por lo menos 12 posiciones buenas, deberá repetirse el trabajo de leerse de nuevo toda la serie.

El trabajo del Observador es el de obtener por lo menos 2 series buenas y que cumplan también el requisito que la diferencia entre las medias de ambas, no difieran en más de segundo y medio.

También debe de hacerse un cálculo rudimentario de los cierres angulares y lineales de los triángulos, pues es costoso retornar al campo por una mala medida. Asi mismo, es necesario tener una clave de comunicación entre Observador y Guardaluces, para lo cual el alfabeto Internacional Morse es el más indicado.

CALCULO EN LA OFICINA.

Es la parte de la Triangulación de más complicación técnica, pues requiere el uso del cálculo más especializado y a la par, más laborioso. Ya antes he mencionado que las mediciones por este sistema son sencillas en el campo y de menos duración, lo cual redunda en el menor costo operativo en la práctica.

A continuación señalaré los pasos sucesivos del cálculo de Oficina con algunos comentarios.

a) *Lista de Direcciones.*

Esta parte es un resumen de las distintas medias aritméticas presentadas por el Observador.

b) *Selección de las Direcciones.*

Aquí el calculista escoje los mejores valores angulares que le permitan obtener el cierre de los triángulos con los menores errores posibles.

c) *Cálculo de los triángulos.*

Computación preliminar de la solución trigonométrica de las figuras, por medio de pasos ya establecidos que hacen este trabajo de una manera mecánica y fácil.

d) *Cálculo de las Posiciones Geográficas de los Vértices.*

Si el fin de la Triangulación es de importancia y amerita grandes precisiones como lo sería una red base para el Plan Regulador de una ciudad, el establecimiento fronterizo entre dos países, la medida de una gran hacienda (100 caballerías), la medida de un meridiano etc., las posiciones geográficas deben calcularse en base a los cuadriláteros ajustados. Si en cambio la importancia no es mucha, se puede continuar sin el ajuste del cálculo de triángulos.

e) *Paso de Posiciones Geográficas a Coordenadas Lambert.*

Si se requiere precisión, es indispensable el ajuste de los cuadriláteros. Los pasos de todo ajuste son:

a) Planteo de las ecuaciones de condición;
b) Correlativas;
c) Normales;
d) Solución de las ecuaciones Normales;
e) Solución para atrás;
f) Corrección de las Direcciones;
g) Cálculo del cuadrilátero Ajustado.

Después de haberse ajustado los cadriláteros, se continúa con los pasos de computación de Geográficas y Lambert.

Formada ya una idea del cálculo de Oficina, pasaré ahora a la explicación detallada a la par de efectuar las distintas operaciones del cuadrilátero que he escogido como ejemplo.

En el año de 1951 cuando formaba parte del cuerpo de Observadores de la Dirección General de Cartografía, se nos encomendó la Triangulación del área de Demostración. Un cuadrilátero, parte de esa red, es el que ahora me sirve de ejemplo.

En ese entonces no se ajustó la red y además no se siguieron los mismos valores que yo sigo en mi demostración.

En el esquema adjunto se puede apreciar la extensión de terreno que comprende el cuadrilátero. Las distancias están con una precisión igual al decímetro. Todo esto solamente con la Triangulación se puede lograr.

En primer lugar se establece la lista de direcciones así:

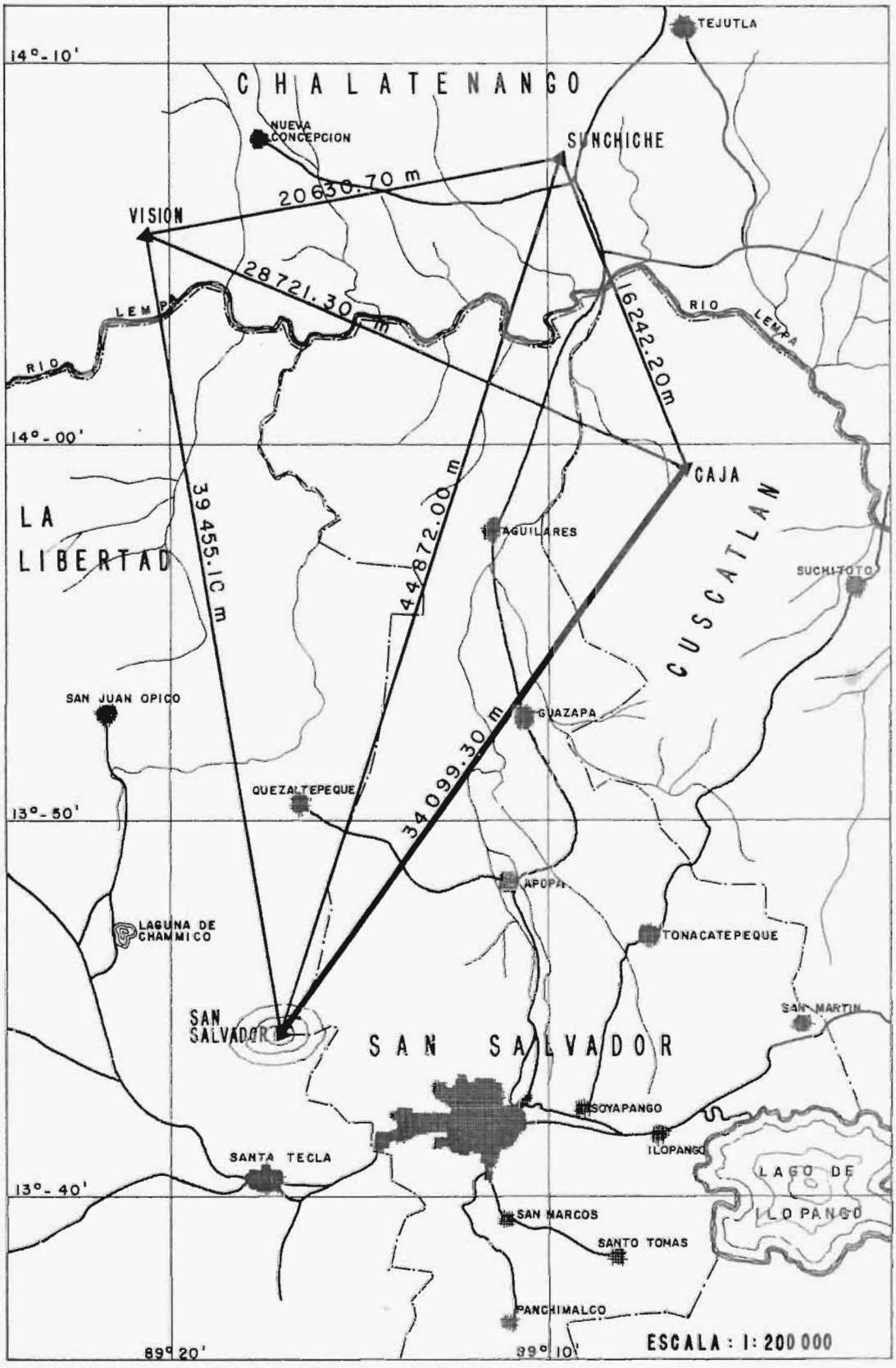
Estación: La Visión — Observador: R. Morales
Instrumento: Wild T—3 Nº 12199

Sunchiche	00°	00'	00.00"
Caja	33	37	48.90
			49.83*
			51.93
Tunas	67	49	07.78
			07.33
			10.87
San Salvador	91	05	47.63
			49.38*

Solamente hubo una inicial: Sunchiche

Estación: La Caja — Observador: R. Morales
Instrumento: Wild T—3 Nº 12199

San Antonio	00°	00'	00.00"
Sunchiche	49	46	11.16
			11.43
Tunas	00°	00'	00.00"
San Antonio	44	29	11.34
			10.98
Manzano	196	28	14.07


14°-10'
CHALATENANGO
TEJUTLA
NUEVA CONCEPCION
SUNCHICHE
20630.70 m
VISION
28721.30 m
16242.20m
RIO LEMPA
RIO LEMPA
14°-00'
CAJA
LA LIBERTAD
39 455.10 m
44 872.00 m
AGUILARES
CUSCATLAN
SUCHITOTO
SAN JUAN OPICO
GUAZAPA
34099.30 m
QUEZALTEPEQUE
13°-50'
APOPA
LAGUNA DE CHAMMICO
TONACATEPEQUE
SAN SALVADOR
SAN SALVADOR
SAN MARTIN
SOYAPANGO
ILOPANGO
SANTA TECLA
LAGO DE ILOPANGO
13°-40'
SAN MARCOS
SANTO TOMAS
PANCHIMALCO
89°20'
89°10'
ESCALA : 1: 200 000

San Antonio	00°	00'	00.00"	
Manzano	151	59	02.02	

Visión	00°	00'	00.00"	
Sunchiche	44	42	29.94	
			24.38	

San Salvador	00°	00'	00.00"	
Visión	77	17	26.26	
			24.31*	
Sunchiche	121	59	48.09*	
			46.30	

Hubo cinco iniciales (San Antonio-Tunas-SanAntonio-Visión-San Salvador).

Estación: San Salvador — Observador: R. Quevedo
Instrumento: Wild T—3 Nº 12770

Visión	00°	00'	00.00"	
Caja	45	14	38.36)	
			38.90)	38.63 *

Sunchiche	00°	00'	00.00"	
Caja	17	52	37.03)	
			36.22)	37.02 *
			37.83)	

Hubo dos iniciales (Visión-Sunchiche).

Estación Sunchiche — Observador: L. Mayén
Instrumento: Wild T-3 Nº 12202

Manzano	00°	00'	00.00"	
La Caja	40	41	40.61	
			39.68	
Tunas	83	33	20.37	
			23.21	

La Caja	00°	00'	00.00"	
San Salvador	40	07	36.47*	
			38.19	
Visión	101	39	46.76)	47.22 *
			47.67)	

De las listas de direcciones se seleccionan los valores que permiten los mejores cierres en los triángulos. En este caso, he señalado con un asterisco los valores escogidos. Nótese que en algunos casos se ha tomado el valor medio entre las series, como se puede ver en la estación San Salvador y Sunchiche.

En las listas puede muy bien suprimirse las direcciones de las estaciones que no sirven para el ejemplo, como son: San Antonio, Tunas, Manzano, etc.

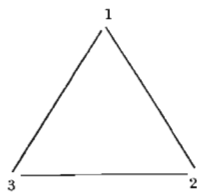
El objeto de haberlas incluido es que se note que en el tiempo que se efectuó ese trabajo, había más vértices de los que me ocupo ahora. No presento el cálculo y ajuste de los otros cuadriláteros por recortar el trabajo que de por sí ya resulta largo.

Paso ahora a explicar el mecanismo del cálculo de los triángulos. La computación la hago en las hojas impresas a propósito para esta clase de trabajo.

En la resolución de estos triángulos, siempre se conoce un lado (Línea Base o Lado de una red anterior) y los tres ángulos (medidos en el campo).

Supongamos un triángulo cualquiera y llamemos a sus vértices con los números 1, 2, y 3 en el sentido del reloj. También llamemos al lado conocido el 2-3.

Se tiene:



$$\text{lado } (1\text{-}3) = (2\text{-}3)\ \frac{\text{sen}_2}{\text{sen}_1}$$

$$\log (1\text{-}3) = \log(2\text{-}3) + \log \text{sen}_2 + \text{colog sen}_1$$

$$\text{lado } (1\text{-}2) = (2\text{-}3)\ \frac{\text{sen}_3}{\text{sen}_1}$$

$$\log (1\text{-}2) = \log(2\text{-}3) + \log \text{sen}_3 + \text{colog sen}_1$$

también:

$$\text{exceso esférico} = (1\text{-}3)\ (1\text{-}2)\ \text{sen}_1 \times m$$

$$\log \text{exceso esférico} = \log (1\text{-}3) + \log (1\text{-}2) + \log \text{sen}_1 + \log m$$

$$= \log (2\text{-}3) + \log \text{sen}_2 + \text{colog sen}_1 +$$

$$\log (2\text{-}3) + \log \text{sen}_3 + \text{colog sen}_1 +$$

$$\log \text{sen}_1 + \log m =$$

$$\log \text{exceso esférico} = 2 \log (2\text{-}3) + \text{colog sen}_1 + \log \text{sen}_2 + \log \text{sen}_3 + \log m$$

Ya vista la deducción del método, se comprenderá ahora la mecánica del mismo.

En la fila 2-3, se pone al final el log del lado conocido. En la fila 1 siempre se pondrá el cologaritmo seno del ángulo 1, y en las filas 2 y 3 se pondrán los senos de los ángulos 2,3.

Al comenzar el cálculo, en las filas 1, 2 y 3, se ponen las funciones de los ángulos con 5 cifras decimales.

Explicaré ahora los pasos sucesivos de esta resolución.

a) Se suman los tres ángulos del triángulo, lo que debe de ser igual a 180° + el exceso esférico, el cual no se conoce todavía.

MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS

Dirección General de Cartografía

VILLA DELGADO

El Salvador, C. A.

CALCULO DE TRIANGULOS

CALCULO DEL CUADRILATERO SAN SALVADOR-VISION, SUNCHICHE-CAJA

Nº	ESTACION	ANGULO OBSERVADO	CORREC.	Angulo Esférico	Exceso Esférico	ANGULO PLANO Y DISTANCIA	LOGARITMO	
2-3							4.532	7454
1	Visión	57 27 59.55	—.02	59.53	.81	58.72	0.074	1336
2	Caja	77 17 24.31	—.02	24.29	.82	23.47	9.989	2254
3	San Salvador	45 14 38.63	—.01	38.62	.81	37.81	9.851	3254
1-3							4.596	1044
1-2							4.458	2044
		180 00 02.49	—.05		2.44	00.00		
2-3							4.458	2044
1	Sunchiche	101 39 47.22	+.01	47.23	.28	45.95	0.009	0606
2	Caja	44 42 23.78	.00	23.78	.28	23.50	9.847	2491
3	Visión	33 37 49.83	.00	49.83	.28	49.55	9.743	3951
1-3							4.314	5141
1-2							4.210	6601
		180 00 00.83	+.01		0.84	00.00		
2-3							4.532	7454
1	Sunchiche	40 07 36.47	—.13	36.34	.40	35.94	0.190	7910
2	Caja	121 59 48.09	—.13	47.96	.40	47.56	9.928	4368
3	San Salvador	17 52 37.02	—.12	36.90	.40	36.50	9.487	0978
1-3							4.651	9732
1-2							4.210	6342
		180 00 01.58	—.38		1.20	00.00		
2-3							4.651	9732
1	Visión	91 05 49.38	+.12	49.50	.70	48.80	0.000	0796
2	Sunchiche	61 32 10.75	+.11	10.86	.69	10.17	9.944	0472
3	San Salvador	27 22 01.61	+.11	01.72	.69	01.03	9.662	4628
1-3							4.596	1000
1-2							4.314	5156
		01.74	+.34		2.08	00.00		

Calculado por:_____ Fecha_____

Comprobado por:_____ Fecha_____

b) Se suman dos veces la fila 2-3 más la 1, 2, 3 y el log. de m, el cual se puede tomar para nuestro país igual a 1.40662. Esto da el logaritmo del exceso. El antilog, es decir, el exceso, se anota al final de su columna. Su valor se divide en 3 partes, una para cada ángulo.
c) Ya conocido el exceso, se determina el error de cierre. Se anota en su columna y se divide en tres, una para cada ángulo (corrección).
d) El ángulo medido, más la corrección da el ángulo esférico. La suma de los esféricos debe de dar ahora 180° mas el exceso.
e) El ángulo esférico menos el exceso da el ángulo plano. Ahora si se anotan las funciones de estos ángulos planos con 7 cifras decimales.
f) La suma de las filas 2-3, 1, 2, dará el lado 1-3. La suma de las filas 2-3, 1, 3, dará el lado 1-2.
g) Ya resuelto el primer triángulo, ya se conoce el logaritmo del lado que servirá como conocido, es decir el 2-3, del siguiente triángulo. Y así sucesivamente.
h) Se notará que los dos primeros triángulos establecen un camino y que los dos últimos el otro.
i) Tomar en cuenta que la suma de los errores y de los excesos en los dos primeros, debe dar igual a las sumas de los segundos.

Hasta aquí el cálculo de un cuadrilátero.

Lo que sigue bien merece que se le considere como un capítulo aparte, y lo llamaremos...

AJUSTES DE TRIANGULACION.

Solamente expondré la compensación del mismo cuadrilátero calculado.

El sistema es el establecido por la Inter-American Geoditic Survey y es la corrección por las direcciones. Un ángulo está dado por su dirección derecha menos su izquierda.

Comenzaremos por nombrar con números cada dirección como lo muestra el esquema de la figura. Hay que recordar que cada lado tiene dos direcciones, según del vértice que se le mire.

Deducción de la ecuación de lado.

Polo en San Salvador.

Podemos establecer la siguiente ecuación:

$$\frac{\text{San Salv.-Visión}}{\text{San Salv.-Sunchiche}} \times \frac{\text{San Salv.-Sunchiche}}{\text{San Salv.-Caja}} \times \frac{\text{San Salv.-Caja}}{\text{San Salv.-Visión}} = 1$$

Pero se puede sustituir cada lado de un triángulo por el seno del ángulo opuesto.

$$\frac{\operatorname{sen}(-8+9)\operatorname{sen}(-4+6)\operatorname{sen}(-11+12)}{\operatorname{sen}(-10+12)\operatorname{sen}(-7+8)\operatorname{sen}(-4+5)} = 1$$

pasando a logaritmos, se tiene:

$$\log \operatorname{sen}(-8+9)+\log \operatorname{sen}(-4+6)+\log \operatorname{sen}(-11+12)= \\ =\log \operatorname{sen}(-10+12)+\log \operatorname{sen}(-7+8)+\log \operatorname{sen}(-4+5)$$

Por conveniencia en la computación se arregla esto en la manera tabular. También para evitarse esta deducción, se puede tener presente un esquema como en la figura y a la suma de las funciones de los ángulos marcados con círculo lleno, se le restarán las marcadas con círculo punteado.

Como cada ángulo posee un error, no es posible que las diferencias de las sumas de los dos grupos de cero. Pero sí podemos establecer que la suma de las correcciones más las diferencias tabulares para un segundo sumen cero.

Debe de recordarse que para la computación de un lado, siempre se tiene en cuenta las diferencias tabulares.

La formación de las condiciones de ángulo son de mas fácil explicación, puesto que la suma de los tres errores de un triángulo mas su corrección debe de dar cero. Entonces basta tomar tres triángulos cualesquiera, del cuadrilátero, como los que yo he tomado en mi ejemplo.

Cada dirección es una incógnita y por lo tanto en este caso tenemos 12 correcciones.

Sería una tarea imposible de realizar y parece que fuera magia el hecho de que exista un método que nos determine con exactitud estas doce correcciones desconocidas. Felizmente existe, y es el método de los mínimos cuadrados.

Explicaré a continuación los pasos sucesivos del ajuste.

a) *Cuadro de las Correlativas.*

Las correlativas son las mismas ecuaciones de condición. Solamente se anotan sus coeficientes sin el término constante.
Correspondiendo cada calumna a cada ecuación, y cada fila a las constantes de las direcciones.

b) *Planteo de las ecuaciones Normales.*

I Ecuación Normal.

Se toma como factor fijo los valores de la primera columna.

El coeficiente de C1 es la suma algebraica de las multiplicaciones por la primera columna.
El coeficiente de C2 es la suma algebraica de las multiplicaciones de la segunda columna.
El coeficiente de C3 es la suma algebraica de las multiplicaciones por la tercera columna.
El coeficiente de C4 es la suma algebraica de las multiplicaciones de la cuarta columna.

II Ecuación Normal.

Se toma como factor fijo los valores de la segunda columna.

Se repite el procedimiento.

El coeficiente de C1 suma de los productos por la primera
C2 segunda
C3 tercera
C4 cuarta

MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS

Dirección General de Cartografía

VILLA DELGADO

El Salvador C. A.

CALCULO DE TRIANGULOS

CUADRILATERO AJUSTADO

Nº	ESTACION	ANGULO OBSERVADO	CORREC.	Angulo Esférico Exceso Esférico	ANGULO PLANO Y DISTANCIA	LOGARITMO
2-3					4.532	7454
1	Visión	57 28 00.06		.81	59.25	0.074	1329
2	Caja	77 17 23.68		.82	22.86	9.989	2250
3	San Salv.	45 14 38.70		.81	37.89	9.851	3256
1-3						4.596	1034
1-2		02.44	0.00	02.44		1.458	2039
2-3						4.458	2039
1	Sunchiche	101 39 47.18		.28	46.90	0.009	0605
2	Caja	44 42 24.17		.28	23.89	9.847	2499
3	Visión	33 37 49.49		.28	49.21	9.743	3784
1-3						4.314	5143
1-2		00.84	0.00	00.84		4.210	6428
2-3						4.532	7454
1	Sunchiche	40 07 35.44		.40	35.04	0.190	7932
2	Caja	121 59 47.85		.40	47.45	9.928	4370
3	San Salv.	17 52 37.91		.40	37.51	9.487	1044
1-3						4.651	9757
1-2		01.20	0.00	01.20		4.210	6430
2-3						4.651	9757
1	Visión	91 05 49.55		.70	48.85	0.000	0795
2	Sunchiche	61 32 11.74		.69	11.05	9.944	0482
3	San Salv.	27 22 00.79		.69	00.10	9.662	4590
1-3						4.596	1034
1-2		02.08	0.00	02.08		4.314	5143

Comprobado por: _____ Fecha _____

Comprobado por: _____ Fecha _____

III Ecuación Normal.

Se toma como factor fijo los valores de la tercera ecuación.
Se repite el procedimiento.

IV Ecuación Normal.
Se toma como factor fijo los valores de la cuarta columna.
Se repite el procedimiento.

El término constante de las ecuaciones normales es el mismo de las ecuaciones de condición.

Se agrega una última columna nombrada con Σ y es la suma de los coeficientes de las normales más el término constante. Esta última columna nos servirá de comprobación.

Los términos debajo de la diagonal se omiten por la simetría.

SOLUCION DE LAS ECUACIONES NORMALES.

En el Apéndice Matemático expongo la teoría y demostración del ajuste por medio de los Mínimos Cuadrados. También explico que las ecuaciones Normales tienen como incógnitas ciertas constantes C_1, C_2, C_3, C_4, (Multiplicadores de Lagrange) por medio de las cuales se podrán determinar las correcciones con ayuda del cuadro de las correlativas.

La solución de las ecuaciones Normales consiste en la simple resolución por eliminación.

El Método de Doolitle tiene la ventaja de eliminar las operaciones supérfluas y además introduce la columna Σ que permite en cualquier momento la comprobación de la exactitud del trabajo. Este método es de mucha utilidad para todos los casos que necesiten resolver muchas incógnitas, como en el Slope Deflectión, Trabajo Mínimo, etc.

A continuación detallo los pasos sucesivos del método Doolitle.

a) Se escribe la primera ecuación Normal.
Enseguida se dividen todos los términos por el primero, teniendo el cuidado de cambiar el signo, se anotan ordenadamente en la fila siguiente, exceptuando en la primera columna donde se anota C_1. Esta fila da el valor de C_1 en función de los demás.

b) Se escribe la segunda ecuación Normal sin el primer término (debajo de la diagonal).

No hay operaciones en primera columna.
Se toma como factor fijo el segundo término de la primera fila para multiplicar por todos los términos de la segunda, anotando los productos en una siguiente. Se efectúa la suma algebraica de la 3 y 4 filas y se anotan en la Nº 5. Se dividen por el primer término de la 5 todos los demás de la misma y se escriben debajo, teniendo el cuidado de cambiar el signo, exceptuando el primero donde se pone C_2. La 6 da los valores de C_2 en función de C_3 y C_4.

c) Se escribe la tercera Normal (fila 7).
Se omiten los dos primeros términos y las operaciones en esos sitios.

Se toma como factor fijo el tercer término de 1 y se multiplican por los términos de la 2. Se anota en 8.
Se toma como factor fijo el tercer término de la fila 5 y se multiplica por los de la 6. Se anota en 9.
Se efectúa la suma algebraica de 7,8,9,= fila 10.
Se divide por el primer término de 10 todos los de la misma, recordando de cambiar el signo y exceptuando el primer lugar donde se anota C_3. Este da el valor de C_3 en función de C_4.

d) Se escribe la cuarta normal (fila 12).
Se omiten los términos y operaciones en las tres primeras columnas. Factor fijo el cuarto término de 1 y se multiplica por la 2. Fila 13.
Factor fijo el cuarto término de 5 y se multiplica por los de 6. Fila 14.
Factor fijo el cuarto término de 10 y se multiplica por los de la 11. Fila 15.
Se efectúa la suma algebraica de 12,13,14,15, y se anota en 16

Se dividen por el primer término de 16 todos los demás de la misma fila, teniendo cuidado de cambiar el signo.
Aquí está el valor exacto de C_4.

Debe notarse que la columna de comprobación Σ al final debe de llegar con el mismo valor de C_4 y dicho sea de paso, en cualquier momento el valor de esa columna debe ser exactamente igual a la suma de todos los términos de la fila.

SOLUCION PARA ATRAS.

No es más que ordenar en forma tabular la deducción de C^4 y C_3 y así sucesivamente todas las C.

Ya conocidos los valores de las constantes, se encuentra fácilmente el valor de las correcciones de las direcciones, con ayuda de la Tabla de Correlativas.

Habiendo hecho las correcciones, se determinan los verdaderos valores de los ángulos y se calcula un nuevo cuadrilátero el cual por estar ya ajustado, resulta sin error y con las verdaderas magnitudes de los lados.

Presento para comparación, el cálculo de los dos cuadriláteros.

CALCULO DE LA POSICION GEOGRAFICA DE VISION.

En este ejemplo los dos vértices conocidos son las estaciones de San Salvador y Caja (Triangulación de Primer Orden).

Por conocidas se comprenden las posiciones de Longitud y Latitud, logaritmo de la distancia y Azimut Directo e Inverso de la Línea.

Si no se conocieran estos datos, entonces habría la necesidad de efectuar las observaciones Astronómicas de Latitud y Longitud de ambos vértices y por medio del cálculo Inverso de posiciones, se determinarían los datos restantes.

A continuación se señalan los pasos en el cálculo de una posición geográfica.

a) Las hojas de esta clase de cálculo deben de ser parecidas al formato en que efectuó la computación. La forma del cálculo es producto de la experiencia en este ramo y ella de por sí, señala con sencillez los pasos a seguirse a través de todo el cálculo.

b) El triángulo que utilizo es Caja—San Salvador—Visión. Siendo el lado conocido (2—3), Caja—San Salvador, y el vértice Visión al cual llamamos 1.
c) Se colocan en la hoja los datos conocidos: los nombres de los espacios 1, 2, 3. El azimut directo 2—3 y el inverso 3—2.
La Latitud y Longitud de Caja y San Salvador. El Logarítmo de la distancia 2—3 en la fila 5.
d) Con ayuda de la tabla de *factores de posición geográfica* (Ver la parte correspondiente a las tablas), se calculan las constantes B,C,D, dependientes de la Latitud de Caja y San Salvador respectivamente. Se colocan estos valores en las casillas B,C,D.
e) Se colocan los valores del 2º y 3er. ángulo del triángulo y se suman respectivamente con los azimutes directo e inverso, lo que dará los azimutes directos de Caja—Visión y San Salvador—Visión.
Se calculan los sen a y cos a, colocando estos valores en las filas correspondientes.

Hasta aquí solamente se han colocado en su lugar los datos necesarios para las operaciones, y podemos distinguir en la computación y por su orden, los cálculos de Latitud, Longitud y azimutes.

CALCULO DE LA LATITUD.

a) Se obtienen los valores de s^2 y sen^2a y se ponen en su casilla.
b) Se suman S, Cos a, B, lo que da el primer término h. De inmediato se obtiene h^2.
c) Se suma h^2,D, lo que da el tercer término.
d) Se suman s^2, sen^2a, C, lo que da el segundo término.
e) Se suman algebraicamente (el signo del primer término es el de cos a) el 1º,2º, y 3º lo que da el valor en segundos de $\triangle\phi$ (antilogarítmos).
f) Se cambia el signo a este resultado y se agrega a la latitud anterior. Asi se obtiene la nueva Latitud de Visión.

Nótese que igual resultado de Latitud debe salir en los dos caminos con un error máximo de 3 milésimas. La Latitud de Visión es la media entre los dos.

CALCULO DE LA LONGITUD.

a) Se calcula la Longitud media de Caja—Visión y San Salvador—Visión, poniendo estos valores en sus casillas.
Se deduce el valor del seno de esta latitud media y se pone en su lugar correspondiente.
b) De la tabla de factores de posición Geográfica se deduce el valor de A_1 en función de la nueva Latitud.
También se calcula el log. secante de esta Lat. y se colocan las casillas $sec.\phi_1$.
c) Se suman s, sen a, A_1, $sec\phi_1$, lo que da el antilogarítmo de $\triangle$ latitud en segundos. El signo de este $\triangle$ es igual al de sen a.
d) El valor de esta última suma se agrega al seno de la media latitud y se obtiene el antilogarítmo de $-\triangle a$.
e) Igual que en el cálculo de Latitudes, los valores de las longitudes podrán tener una diferencia de 3 milésimas como máximo.

CALCULO DE LOS AZIMUTES.

a) Ya se habían obtenido los valores de $-\triangle a$, ahora se cambian de signo y se agregan a los azimutes anteriores.

b) Como comprobación, el azimut directo + el primer ángulo, debe ser igual al azimut inverso.

CALCULO INVERSO DE POSICIONES.

Se llama así la computación de la distancia y azimutes entre dos puntos, cuando se conocen sus respectivas Latitudes y Longitudes.

Supongamos que en el caso de mi ejemplo los puntos de partida San Salvador y Caja, pertenecieran a distintas redes de triangulación y que los únicos datos datos disponibles son las posiciones de ambos vértices, ante todo y para poder salir necesitaría un cálculo inverso de posiciones. Veamos como se hace:

a) Como siempre recomiendo usar la forma a propósito del Coast and Geodetic Survey.
La hoja ya señala de por si los pasos necesarios con mucha sencillez y claridad.

b) Se colocan datos conocidos.
No importa la estación que sea escogida como 1 ó 2. Se calculan los primeros pasos, esto es, las diferencias entre Latitudes y Longitudes.

c) Se escriben los datos de partida sin importar la estación que se escoja como 1 ó 2. Se encuentran las diferencias entre Latitudes y longitudes y las mitades de las mismas.

d) Se halla la latitud promedio ϕ m y se les encuentran sus valores de colog.Am, colog. Bm (tabla de factores Geod.), y las funciones log.sen ϕ m, log.cos ϕm, colocando todo en sus casillas correspondientes.

e) Se encuentran los logaritmos de $\triangle\phi$ y $\triangle\gamma$ (en segundos) y log. cos $\frac{\triangle\gamma}{2}$, log sec $\frac{\triangle\phi m}{2}$.

f) Se tiene el cuidado de ver si $\triangle\phi$ y $\triangle\gamma$ necesitan corrección consultando el reverso de la hoja.

g) Se suman log $\triangle\gamma$, log cos ϕm, colog $\triangle$m lo que nos da log S sen $(a+\frac{\triangle a}{2})$.

Se suman log $\triangle\gamma$, log cos ϕm, colog. Am lo que nos da log S sen $(A+\frac{\triangle a}{2})$

h) Se resta al log S sen $(A+\frac{\triangle a}{2})$ el log S cos $(A+\frac{\triangle a}{2})$ lo que dará log tg $(a+\frac{\triangle a}{2})$.

Se encuentra el ángulo $(A+\frac{\triangle a}{2})$, . el cual es una expresión del promedio de azimut. Ayuda hacer un ligero esquema.

Es importante recordar que los azimutes son a partir del Sur.

i) Se hallan los log sen $(a+\frac{\Delta a}{2})$, log cos $(a+\frac{\Delta a}{2})$ y se restan de los resultados del grupo f). Estos tendrán que dar el log de la distancia con una diferencia de dos unidades en la séptima cifra.

j) Se suman log $\Delta\gamma$, log sen ϕm, log sec $\frac{\Delta\phi}{2}$ encontrando así el logarítmo de la convergencia Δa.

Lo que sigue no necesita explicación.

Para la deducción de las fórmulas en el cálculo de posiciones Geográficas y posiciones Inversas, ver el apéndice Matemático.

Detalle del cálculo de la Lambert.

a) Se deduce el valor de R y de Y^1 con el uso de la tabla de estas funciones de la latitud.

b) Se deducen sen θ, tan $\frac{\theta}{2}$ las cuales son función de Δ longitud con 89°. El incremento de Δ longitud se toma con signo positivo, para los puntos antes de 89°, y con signo negativo, para los siguientes a este valor. ($\Delta\gamma$ es + al Este y $\Delta\gamma$ es negativo al Oeste).

c) Ya deducidos los valores de las funciones, se calculan X^1, (mismo signo que $\Delta\gamma$), X, Y^{11}, y finalmente Y.

Cálculo de las Coordenadas Lambert.

Estación: VISION.

ϕ =14 05 36.436 γ =89 20 27.145

R (minutos enteros de ϕ)=25 971 002.059 $\Delta\gamma$ (+al E / —al W) γ_o =89 00

Interpolación seg.	= 1 119.060		=— 20 27.145
	R =25 972 121.119	tan $\frac{\theta}{2}$ min $\Delta\gamma$	=0.00069 30440
Sen θ (Min. de $\Delta\gamma$)	= 0.00138 60874	interpolación	= 1 56773
Interpolación seg.	= 3 13545	tan $\frac{\theta}{2}$	=0.00070 87213
Sen θ	= 0.00141 74419	Y^1 para min. ϕ	= 328997.941
		interpolación	= + 1119.060
X^1= R senθ (mismo signo que $\Delta\gamma$)	=— 36 813 97	Y^1	= 330117.001
FE	= 500 000.00	$Y^{11}=X^1 \tan \frac{\theta}{2}$	= + 26.091
		$Y=Y^1+Y^{11}$	= 330143.092

Entonces las coordenadas son:
ordenada Y = 330,143.09
abscisa X = 463,186.03

DEDUCCION DE LAS FORMULAS GEODESICAS DE: DIFERENCIA EN LATITUD, DIFERENCIA EN LONGITUD, CONVERGENCIA EN LOS AZIMUTES

Nomenclatura.

ϕ La latitud conocida de A
ϕ' " " que se quiere conocer de B
y La longitud conocida de A
y' " " que se quiere conocer de B
a El Azimut conocida de AB
a' " " que se quiere conocer para BA
s La distancia en metros de AB, reducida al nivel del mar
S Valor angular central de AB
N La longitud de la Normal que termina en el eje menor
Los demás datos se pueden apreciar en la figura.

Determinación de la diferencia de Latitud·

De la Trigonometría Esférica se tiene:

$$\cos\ (90°-\phi') = \cos\ (90°-\phi)\ \cos S + \operatorname{sen}\ (90°-\phi)\ \operatorname{sen} S \cos\ (180°-a)$$

$$\operatorname{sen}\ \phi' = \operatorname{sen}\ \phi \cos S - \cos\ \phi\ \operatorname{sen} S \cos a$$

Pero $\operatorname{sen} S = S\ \frac{s}{N}$ y como el arco s es muy pequeño, se puede hacer que $\cos S = 1$

Entonces: $\operatorname{sen}\ \phi' = \operatorname{sen}\ \phi - \frac{s}{N}\ \cos\ \phi \cos a$

pero $\phi' = \phi + \Delta\phi$, $\operatorname{sen}\ \phi' = \operatorname{sen}\ (\phi + \Delta\phi) = \operatorname{sen}\ \phi \cos\ \Delta\phi + \cos\phi\ \operatorname{sen}\Delta\phi$

Sustituyendo y dividiendo por $\cos\phi$ resulta:

$$\tan\phi\ \cos\Delta\phi + \operatorname{sen}\Delta\phi = \tan\phi - \frac{s}{N}\ \cos a$$

También aquí se puede considerar $\cos\Delta\phi = 1$ y $\operatorname{sen}\Delta\phi = \Delta\phi$

Entonces:

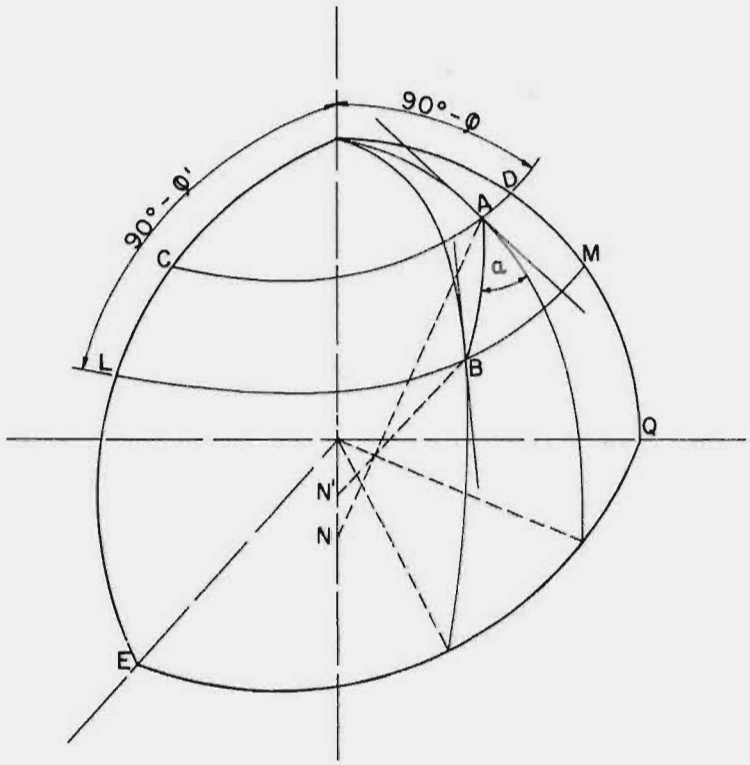
$$-\Delta\phi = \frac{s}{N}\ \cos a$$

Diferencia en Longitud.

De la misma manera, por Trigonometría:

$$\frac{\operatorname{sen}\ \Delta y}{\operatorname{sen} S} = \frac{\operatorname{sen}\ a}{\operatorname{sen}\ (90°-\phi')}$$

Como los ángulos Δy y S son muy pequeños, los senos los podemos sustituir por sus arcos. También se tiene que dividir por el arco de un segundo para poder expresar Δy en segundos.



CD PARALELO QUE PASA POR A
LM PARALELO QUE PASA POR B
EQ ECUADOR
AN LONGITUD DE LA NORMAL N
AN' LONGITUD DE LA NORMAL N'

tenemos: $\Delta y = \dfrac{s \text{ sen } a}{N' \cos\phi' \text{ arc } 1 \text{ segundo}}$

El valor de $\dfrac{1}{N' \text{ arc } 1''}$ se llama A', siendo el valor

de $N' = \dfrac{a}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi')}$ (también en Tabla final)

entonces $\Delta y = s \text{ sen } a \sec \phi' \text{ A}'$

(Ver el cálculo de una posición Geográfica en la parte de Triangulación).

Diferencia en los Azimutes.

En la solución del triángulo esférico:

$$\cot \tfrac{1}{2} (a' - 180° - a) = \tan \frac{\Delta y}{2} \frac{\cos \tfrac{1}{2} (90° - \phi + 90° - \phi')}{\cos \tfrac{1}{2} (90° - \phi - 90° + \phi')}$$

$$\cot [90° - \tfrac{1}{2} (180° + a - a')] = \tan \frac{\Delta y}{2} \frac{\text{sen } 1/2 (\phi' + \phi)}{\cos 1/2 (\phi' - \phi)}$$

Pero como $180° + a - a' = \Delta a$

$$\tan 1/2 \, \Delta a = \tan 1/2 \, \Delta y \frac{\text{sen } 1/2 (\phi + \phi')}{\cos 1/2 (\phi - \phi')}$$

Como Δa y Δy están en la misma relación que sus arcos y siendo que $\phi' - \phi = d\phi$ un ángulo muy pequeño, y llamando $1/2 (\phi + \phi') = \phi m$ la latitud media.

Consideraciones Generales sobre: las curvas planas, curvas y superficies en el espacio.

A todo punto perteneciente a una curva plana se le determina su posición por sus coordenadas x e y. Estas coordenadas se pueden hacer dependientes de una tercera variable t si expresamos la dependencia en una forma paramétrica, así:

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

Todo punto en el espacio debe tener sus correspondientes coordenadas x, y, z. Estas variables son dependientes cada una de alguna especial condición. Estas funciones de dependencia son las 3 siguientes:

1º) Si las tres variables son función de una constante, eso determina en el espacio un único punto.

2º) Si las tres dependientes son función de alguna otra variable t, ello representará una curva en el espacio. Curva en el espacio si: $x = f(t)$ $y = f(t)$ $z = h(t)$.

Una curva en el espacio puede degenerar en una curva plana, indudablemente, si alguna de las tres funciones se hace igual a cero.

3º) Si de las tres dependientes, por lo menos dos, son funciones de dos variables independientes, digamos u,v, eso significa que las funciones representan una superficie, siempre que su jacobiano sea distinto de cero, así:

$x = f(u,v)$ $\quad y = g(u,v)$ es una superficie así:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{diferente } 0$$

Como ilustración, pongamos de ejemplo el Esferoide.

Todo punto queda completamente determinado por medio de su latitud y longitud.

La ecuación de la superficie de la Esfera en función de ϕ y γ es:

$x = R\cos\phi\cos\gamma$ $\quad y = R\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\gamma$ $\quad z = R\,\mathrm{sen}\,\phi$

FIGURA 1.

La razón de la existencia de la superficie reside en que dos de las dependientes, en este caso x e y son función de ϕ y γ.

$x = f(\phi, \gamma)$ $\quad y = g(\phi, \gamma)$

y que el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \gamma} \end{vmatrix} \quad \text{diferente } 0$$

Si hacemos que γ permanezca constante, resultará que las tres dependientes serán solamente función de la única variable ϕ, obteniéndose una curva en el espacio la cual es el meridiano a través de P, figura 1.

Si ϕ es constante, ello determinará el paralelo que pase por P.

Consideraciones sobre el diferencial longitud y el ángulo entre líneas en el espacio.

El diferencial longitud ds es:

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

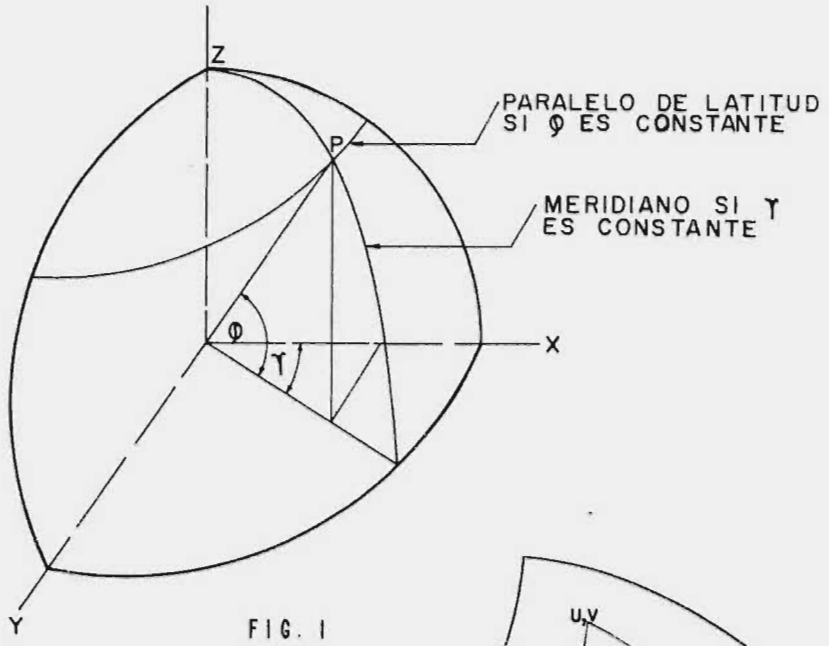


FIG. 1

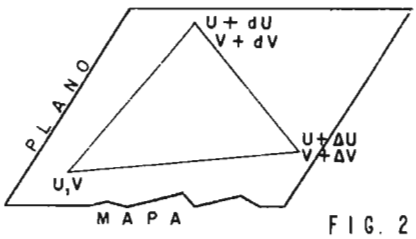
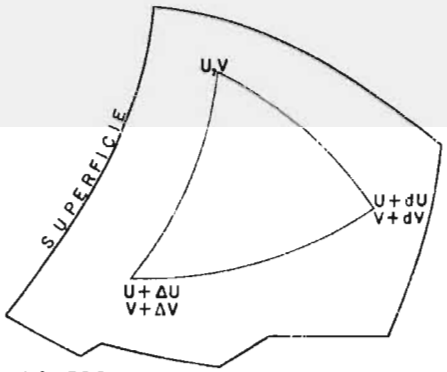


FIG. 2



LA POSICION RELATIVA DE LAS FIGURAS, NO INTERESA

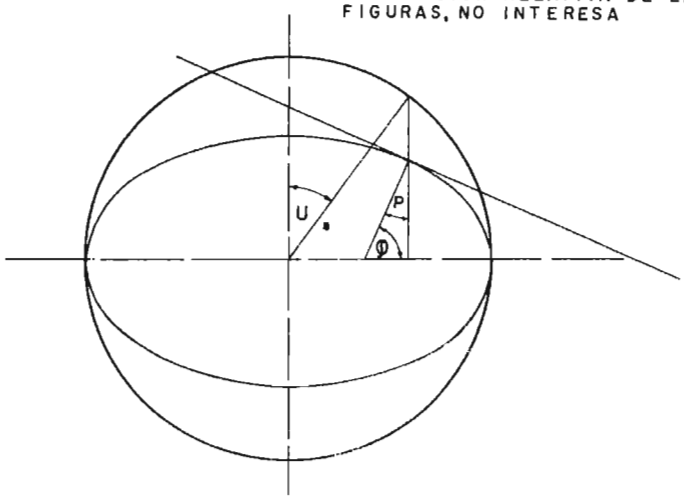


FIG. 3

pero si las dependientes x, y, z son funciones de los parámetros independientes u, v, (superficie espacial), el diferencial exacto de cada una es:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv$$

de donde sustituyendo y arreglando los términos en el diferencial longitud, resulta:

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right] du\,dv + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] dv^2$$

Para simplificar la expresión, llamemos E al primer corchete, F al segundo y G al tercero. Entonces:

$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$

Si se hace v constante, $dv = 0$ y $dsv = \sqrt{Edu}$

" " " u " $du = 0$ y $dsu = \sqrt{Gdu}$

También:

Si v es constante $dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du$ $dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du$ $dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du$

" u " " $dx = \frac{\partial x}{\partial v}\,dv$ $dy = \frac{\partial y}{\partial v}\,dv$ $dz = \frac{\partial z}{\partial v}\,dv$

Si a,b,c, son los cosenos directores de la curva cuando v es constante, se tendrá:

$$a = \frac{dx_v}{ds_v} \qquad b = \frac{dy_v}{ds_v} \qquad c = \frac{dz_v}{ds_v}$$

Así mismo, si u es constante, se tendrá:

$$a' = \frac{dx_u}{ds_u} \qquad b' = \frac{dy_u}{ds_u} \qquad c' = \frac{dz_u}{ds_u}$$

Escrito esto de otra manera:

$$a = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$a' = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \qquad b' = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v} \qquad c' = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v}$$

El ángulo entre dos líneas en función de los cosenos directores es: $\cos\theta = aa' + bb' + cc'$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Ahora, en un sistema ortogonal, y así sucede con los meridianos y paralelos, $\theta = 90^\circ$ y $\cos\theta = 0$

Entonces, para un sistema ortogonal es indispensable que $F = 0$, ya que ni E, ni G, pueden ser cero, ya que la superficie existe.

Determinación de las condiciones necesarias y suficientes para la representación conforme de una superficie en un plano.

Si una superficie está representada por alguna ecuación para x,y,z, y aparte se tiene un plano expresado por una función de las rectangulares u, v, se tendrá, que si para cada par de coordenadas u,v en el plano corresponden un trío x,y,z en la superficie, entonces x,y,z serán función de u,v.

Supongamos, tanto en la superficie como en el plano, figura 2, tres puntos de coordenadas (u,v) (u+du,v+dv) (u+$\triangle$u,v+$\triangle$v) los cuales forman dos triángulos infinitesimales en cada una. Entonces, si los dos triángulos corresponden, la proporción de sus lados y la abertura de sus ángulos tendrá que ser la misma, sin interesar la posición relativa de una figura con la otra. Se tiene:

Las longitudes en la superficie:

$ds^2 = E\,du^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

$\triangle s^2 = E\triangle u^2 + 2F\triangle u\triangle v + G\triangle v^2$

ahora en el plano:

$ds^2 = du^2 + dv^2$, $\triangle s^2 = \triangle u^2 + \triangle v^2$

Ahora la proporción entre los lados deberá ser la misma. Esto es:

$$\frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{E\triangle u^2 + 2F\triangle u\triangle v + G\triangle v^2} = \frac{du^2 + dv^2}{\triangle u^2 + \triangle v^2}$$

Como se vé, para que esta condición se cumpla es necesario que E=G y F sea =0, lo que también garantiza que el sistema debe ser ortogonal.

Pasemos ahora a establecer la condición de la conservación de los ángulos.

Supongamos que a,b,c, y a', b', c' sean los cosenos directores de las líneas tangentes en la superficie, tendríamos:

$$a = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}}, \text{ etc.}$$

$$a' = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v}{\sqrt{E\Delta u^2+2F\Delta u\Delta v+G\Delta v^2}}, \text{ etc.}$$

El coseno del ángulo de intersección estará dado por

$$\cos\theta = \frac{\begin{array}{l}(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial u}dv)(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v)+ \\ (\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial u}dv)(\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v)+ \\ (\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv)(\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v)+\end{array}}{\sqrt{(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2)\ (E\Delta u^2+2\ F\Delta u\,\Delta v+G\,\Delta v^2)}}$$

o escrito de otra manera:

$$\cos\theta = \frac{Edu\Delta u + F(du\Delta u+\Delta udv) + Gdv\Delta v}{\sqrt{(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2)\ (E\Delta u^2+2F\Delta u\Delta v+G\Delta v^2)}}$$

ahora, los correspondientes cosenos directores en el plano son:

$$\frac{du}{\sqrt{du^2+dv^2}}, \frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}} \text{ y } \frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}, \frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}$$

el coseno del ángulo de intersección

$$\cos\theta = \frac{du\Delta u + dv\Delta v}{\sqrt{(du^2+dv^2)\ (\Delta u^2+\Delta v^2)}}$$

igualando las dos expresiones, se vé que para que los ángulos sean iguales, es necesario que E=G, y F=O. Las mismas condiciones de los diferenciales longitudes.

Reemplazando estas condiciones en el diferencial longitud, resulta:

$$ds^2 = Edu^2+Fdudv+Gdv^2 = E(du^2+dv^2) = G(du^2+dv^2)$$

Entonces, en una representación conforme el diferencial de longitud puede expresarse en la forma: $ds^2=m^2\ (du^2+dv^2)$.

Si en una superficie se tuviera el diferencial longitud en la forma $ds^2 = Vdu^2 + Udv^2$ en la que V es una función de v solamente y U una función solo de u, se podría trasladar esta expresión a la forma conforme de la siguiente manera:

$$ds^2 = Vdu^2+Udv^2 = UV\left(\frac{du^2}{U}+\frac{dv^2}{V}\right)$$

y ahora cambiando los parámetros haciendo

$$\theta = \int \frac{du}{\sqrt{u}} \qquad \text{y} \quad n = \int \frac{dv}{\sqrt{v}} \quad \text{resulta,}$$

$$ds^2 = UV\ (d\theta^2 + dn^2)$$

Cuando el diferencial longitud se expresa en esta forma, se dice que la superficie está representada en un sistema ortogonal de parámetros.

Uso de la sustitución compleja en la determinación de la representación Conforme.

Para la representación de una superficie en un Mapa Conforme, en primer lugar debe de expresarse el diferencial de longitud en términos de su sistema ortogonal de proyecciones, y en segundo lugar, debe de buscarse una sustitución adecuada para poder determinar los valores de las coordenadas en la superficie a las otras en el plano.

A continuación se probará que la sustitución de la variabilidad compleja, soluciona el problema.

Hagamos uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en la diferenciación parcial. La sustitución es así: $x + iy = f\ (u + iv)$.

En que i es igual a $\sqrt{-i}$

Se tiene, derivando parcialmente:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = f\ (u + iv) \qquad \text{o} \quad \frac{\partial x}{\partial u} = f'\ (u + iv)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = if\ (u + iv) \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = if'\ (u + iv)$$

$$i\frac{\partial y}{\partial u} = f'\ (u + iv) \qquad -\frac{\partial y}{\partial u} = if'\ (u + iv)$$

$$i\frac{\partial y}{\partial v} = if'\ (u + iv) \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$$

por lo tanto $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}$ y $\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$

$E = G$ y $F = O$.

También x e y son funciones que satisfacen la ecuación de Laplace de dos dimensiones.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$$

y como $\frac{\partial^2 y}{\partial v du} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$

resulta que: $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0$

He escogido las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la prueba de la sustitución, por resultar más fácil, siendo que de otra manera es más largo y laborioso.

Planteo y solución del problema, aplicado directamente al Elipsoide.

En la figura 3 se representa al Elipsoide de revolución de ejes a y b con la esfera circunscrita auxiliar de radio a.

Usemos la siguiente nomenclatura:

y = longitud, ϕ = latitud, P = colatitud $= 90° - \phi$, u = un parámetro arbitrario.

Entonces, la ecuación de la Elipse será:

x= a sen u, z = b cos u.

y la del Elipsoide de revolución:

$x = a \cos\gamma \operatorname{sen} u$, $y = a \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} u$, $z = b \cos u$.

Diferenciando:

$dx = a \cos\gamma \cos u\, du - a \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} u\, d\gamma$

$dy = a \operatorname{sen}\gamma \cos u\, du + a \cos\gamma \operatorname{sen} u\, d\gamma$

$dz = -b \operatorname{sen} u\, du$

El diferencial de longitud de arco:

$$ds^2 = a^2\cos^2\gamma \cos^2 u\, du^2 + a^2\operatorname{sen}^2\gamma \operatorname{sen}^2 u\, d\gamma^2 - a^2 \operatorname{sen}\gamma \cos\gamma \operatorname{sen} u \cos u\, du\, d\gamma + a^2\operatorname{sen}^2\gamma \cos^2 u\, du^2 + a^2\cos^2\gamma \operatorname{sen}^2 u\, d\gamma^2 + a^2 \operatorname{sen}\gamma \cos\gamma \operatorname{sen} u \cos u\, du\, d\gamma + b^2\operatorname{sen}^2 u\, du^2$$

$$ds^2 = (a^2\cos^2 u + b^2\operatorname{sen}^2 u)\, du^2 + a^2\operatorname{sen}^2 u\, d\gamma^2$$

de aquí se vé que $E = a^2\operatorname{sen}^2 u$, $F = 0$ y $G = a^2\cos^2 u + b^2\operatorname{sen}^2 u$

Hallemos ahora la equivalencia de ϕ en función del parámetro u.

Derivando la ecuación de la Elipse:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{b \operatorname{sen} u}{a \cos u} = -\frac{b}{a}\tan u$$

y como ϕ es el ángulo que hace la Normal, su pendiente será el inverso de la tangente con el signo cambiado. Es decir:

$$\tan\phi = \frac{a}{b}\cot u \qquad \text{entonces } \frac{b}{a}\tan u = \tan P.$$

haciendo uso de la excentricidad del Elipsoide, se tiene:

$$1 - e^2 = 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{a^2 - a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

de donde $\sqrt{1-e^2}\tan u = \tan P$

de aquí $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{\operatorname{sen}^2 P}{1 - e^2\cos^2 P}$, $\cos^2 u = \dfrac{(1-e^2)\cos^2 P}{1 - e^2\cos^2 P}$

diferenciando: $\sqrt{1 - e^2}\sec^2 u\, du = \sec^2 P\, dP$

de donde $du = \dfrac{\sqrt{1 - e^2}\, dP}{1 - e^2\cos^2 P}$

elevando al cuadrado: $du^2 = \dfrac{(1-e^2)\,dP^2}{(1-e^2\cos^2 P)^2}$

dividiendo ahora $\cos^2 u$ entre $\operatorname{sen}^2 u$,

tenemos: $\cot^2 u = \dfrac{(1-e^2)\cos^2 P}{\operatorname{sen}^2 P}$

sumando a ambos términos, $1 - e^2$

$$\cot^2 u + 1 - e^2 = \frac{1 - e^2}{\operatorname{sen}^2 P}$$

multiplicando esta expresión por du^2:

$$(\cot^2 u + 1 - e^2)\, du^2 = \frac{(1 - e^2)\, dP^2}{(1 - e^2\cos^2 P)^2 \operatorname{sen}^2 P}$$

ya se tenía que el diferencial ds^2 era

$$(a^2\cos^2 u + b^2\operatorname{sen}^2 u)\, du^2 + a^2\operatorname{sen}^2 u\, dy^2$$

transformando se tiene:

$$ds^2 = a^2\operatorname{sen}^2 u \left(\frac{a^2\cos^2 u}{a^2\operatorname{sen}^2 u} + \frac{b^2\operatorname{sen}^2 u}{a^2\operatorname{sen}^2 u}\right) du^2 + a^2\operatorname{sen}^2 u\, dy^2 =$$

$$= a^2\operatorname{sen}^2 u\,(\cot^2 u + 1 - e^2)\, du^2 + a^2\operatorname{sen}^2 u dy^2 =$$

$$= a^2\operatorname{sen}^2 u\,[\,(\cot^2 u + 1 - e^2)\, du^2 + dy^2\,]$$

sustituyendo aquí el valor $(\cot^2 u + 1 - e^2)\, du^2$, y de $\operatorname{sen}^2 u$:

$$ds^2 = \frac{a^2\operatorname{sen}^2 P}{1 - e^2\cos^2 P}\left[\, dy^2 + \frac{(1 - e^2)\, dP^2}{(1 - e^2\cos^2 P)^2 \operatorname{sen}^2 P}\,\right]$$

hagamos uso ahora de la siguiente sustitución:

$$d\theta = \frac{(1 - e^2)\, dP}{(1 - e^2\cos^2 P)\operatorname{sen} P} = \frac{(1 - e^2)\, dP}{(1 - e\cos P)(1 + e\cos P)\operatorname{Sen} P}$$

$$\theta = \int \frac{dP}{\operatorname{sen} P} - \frac{e}{2}\int \frac{e\operatorname{sen} P\, dP}{1 - e\cos P} + \frac{e}{2}\,\frac{-e\operatorname{sen} P\, dP}{1 + e\cos P} + \ln G$$

Esto resulta de hacer el quebrado fracciones parciales.

tratando aparte $\int \frac{dP}{senP} = \frac{1}{2} \int \frac{dP}{sen \frac{p}{2} \cos \frac{p}{2}} =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 \frac{p}{2}}{\tan \frac{p}{2}} = \ln \tan \frac{p}{2}$$

entonces:

$$\theta = \ln \tan \frac{p}{2} - \frac{e}{2} \ln (1 - e \cos P) + \frac{e}{2} \ln (1 + e \cos P) + \ln G$$

$$\theta = \ln \left[\tan \frac{p}{2} \left(\frac{1 + e \cos P}{1 - e \cos P} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

los límites de la integración se han tomado de tal manera que G sea la unidad.

$$e^{\theta} = \tan \frac{p}{2} \left(\frac{1 + e \cos P}{1 - e \cos P} \right)^{\frac{e}{2}}$$

el elemento diferencial ds se transforma en

$$ds^2 = \frac{a^2 sen P^2}{1 - e^2 \cos^2 P} (d\gamma^2 + d\theta^2)$$

los parámetros se transforman a un sistema ortogonal. El primer paso se ha cumplido.

Pasemos ahora a la sustitución compleja:

$$x + iy = f (\gamma + i\theta)$$

Por comodidad usemos el conjugado $\gamma - i\theta$

La función hagámosla de la clase exponencial así:

$$x + iy = Ke^{i\phi (\gamma - i\phi)} = Ke^{i\phi\gamma + \phi\theta}$$

$$= K e^{i\phi y} \; e^{\phi \ln \left[\tan \frac{p}{2} \left(\frac{1 + e \cos P}{1 - e \cos P} \right) \right]^{\frac{e}{2}}}$$

$$= K e^{i\phi y} \; e^{\ln \tan \frac{\phi p}{2} \left(\frac{1 + e \cos P}{1 - e \cos P} \right)^{\frac{\phi e}{2}}}$$

del cálculo elemental se conoce que:

e^{im} = cos m + i sen m cualquiera que sea m y $e^{\ln m}$ = m usando estos principios en la simplificación, resulta:

$$x + iy = K (\cos \phi y + i \operatorname{sen} \phi y) \tan \frac{\phi p}{2} \left(\frac{1 + e \cos P}{1 - e \cos P} \right)^{\frac{\phi e}{2}}$$

comparando las partes reales, resulta:

$$x = K \tan \phi \; \frac{p}{2} \left(\frac{1 + e \cos P}{1 - e \cos P} \right)^{\frac{\phi e}{2}} \cos \phi y$$

$$y = K \tan \frac{\phi p}{2} \left(\frac{1 + e \cos P}{1 - e \cos P} \right)^{\frac{\phi e}{2}} \operatorname{sen} \phi y$$

debe de recordarse que cuando ϕ es una constante la curva en el esferoide es un paralelo de latitud, y de las últimas expresiones se deduce que las coordenadas planas paramétricas adoptan la forma conocida del círculo, esto es:

$$x = \text{una constante} \cos B$$
$$y = \text{misma constante} \operatorname{sen} B$$

Por eso se ve que en la representación conforme los paralelos son círculos concéntricos y los meridianos, necesariamente tienen que ser los radios con un centro común.

El radio variable de los paralelos es: $K \tan \frac{\phi p}{2} \left(\frac{1 + e \cos P}{1 - e \cos P} \right)^{\frac{\phi e}{2}}$

Este método fué el que trató Lambert en Berlín 1772.

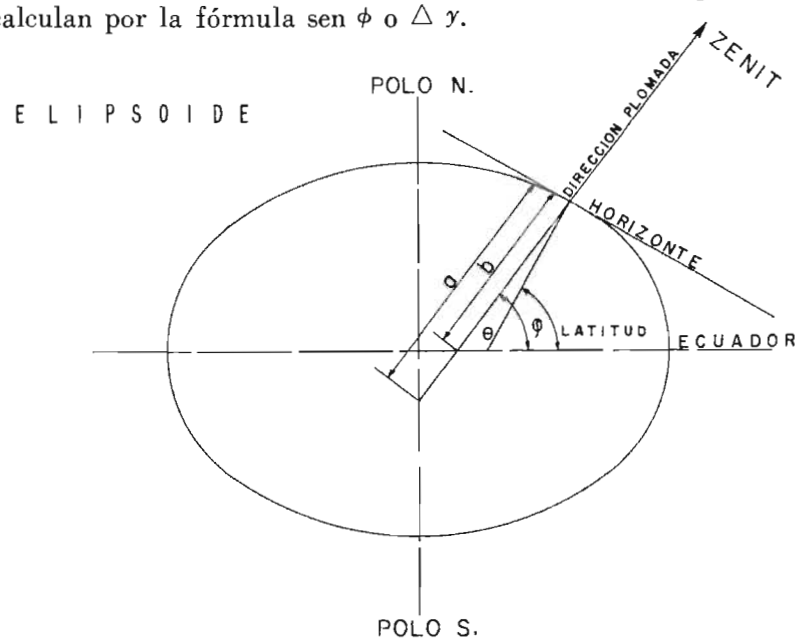
Conclusión.

Lo importante de la deducción es la fórmula que permite encontrar el radio de los distintos paralelos, ya que la separación entre ellos no es constante.

Los valores de $R = K \tan \frac{\phi p}{2} \left(\frac{1 + e \cos P}{1 - e \cos P} \right)^{\frac{\phi e}{2}}$ se desarrollan por

medio de una serie de Taylor para que resulte más fácil su computación. La Tabla I es donde se dan los valores tabulados en función de la Latitud. La convergencia de los meridianos θ se calculan por la fórmula sen ϕ o $\triangle \gamma$.

Radio de Curvatura.

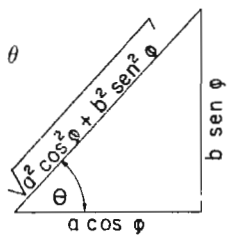


Deducción del radio de CurvaturaR en función de la latitud ϕ .

La ecuación de la Elipse en función del parámetro θ es:

$$x = a \cos \theta \ , \ y = b \cos \theta$$

de donde $dx = - a \operatorname{sen}\theta \, d\theta \ , \ dy = \theta \, b \cos \theta \, d\theta$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{- b \cos \theta}{a \operatorname{sen}\theta} = \frac{- b}{a} \operatorname{ctg} \theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{d\theta}\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{b}{a}\csc^2\theta}{a \operatorname{sen}\theta} = \frac{b}{a^2} \csc \theta \text{ o } \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^3\theta}$$

radio de curvatura $R = \frac{[\ 1+y'^2\ ]^{3/2}}{y''} =$

$$\frac{\left[\ 1+\dfrac{b^2\cos^2\theta}{a^2\operatorname{sen}^2\theta}\ \right]^{3/2}}{\dfrac{b}{a^2\operatorname{sen}^3\theta}} = \frac{\left[\ a^2\operatorname{sen}^2\theta\ + b\cos^2\theta\ \right]^{3/2}}{ab}$$

de la figura se ve que:

$$\operatorname{tg}\phi = -\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{a\ \operatorname{Sen}\theta}{b\ \cos\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b\operatorname{Sen}\phi}{a\ \cos\phi} \text{ entonces } a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\phi + b^2\operatorname{sen}^2\phi}$$

$$\text{sustituyendo } R = \frac{\dfrac{a^3b^3}{(a^2\cos^2\phi + b^2\operatorname{sen}^2\phi)^{3/2}}}{ab} =$$

$$= \frac{a^2b^2}{(a^2\cos^2\phi + b^2\operatorname{sen}^2\phi)^{3/2}} = \frac{a^2b^2}{[a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\phi + b^2\operatorname{sen}^2\phi]^{3/2}} =$$

$$= \frac{a^2b^2}{[a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\phi]^{3/2}} = \frac{\dfrac{b^2}{a}}{\left[1 - \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\phi\ \right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{a\dfrac{b^2}{a^2}}{[1 - e^2\operatorname{sen}^2\phi]^{3/2}} = \frac{a(1 - e^2)}{[1 - e^2\operatorname{sen}^2\phi]^{3/2}}$$

siendo $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ (cuadrado de la excentricidad).

En la parte de las tablas se darán unos valores para los radios de curvatura en El Salvador.

En trabajos de poca precisión, para El Salvador $\log R = 6.80300$

Longitud de la Normal que termina en el eje mayor

De la figura se tiene:

$$N \operatorname{sen}\phi = b\operatorname{sen}\theta$$

$$N = \frac{b}{\operatorname{sen}\phi}\operatorname{sen}\theta$$

$$\text{pero } \operatorname{sen}\theta = \frac{b\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\operatorname{sen}^2\phi}}$$

$$\text{entonces } N = \frac{b^2}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\operatorname{sen}^2\phi}} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\phi}} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\phi}}$$

Longitud de la Normal que termina en el eje menor.

También de la figura se tiene:

$$N\cos\phi = a\cos\theta$$

$$N = \frac{a}{\cos\phi}\cos\theta$$

$$\text{pero } \cos\theta = \frac{a\cos\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\operatorname{sen}^2\phi}}$$

$$\text{entonces } N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\operatorname{sen}^2\phi}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\phi}}$$

DEDUCCION TEORICA DEL EXCESO ESFERICO.

Un triángulo esférico podrá considerarse como la suma de dos triángulos esféricos rectángulos según fig. 1.

Para la deducción se usará la Geometría Analítica y el Cálculo Integral.

Ecuaciones.

Esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$

plano I xsenA—ycosA = 0 (plano normal a XY con un ángulo diedro A con xz) Fig. 4.

plano II xsenD—ZcosD = O (plano normal a XZ con un ángulo diedro D con XY) Fig. 3.

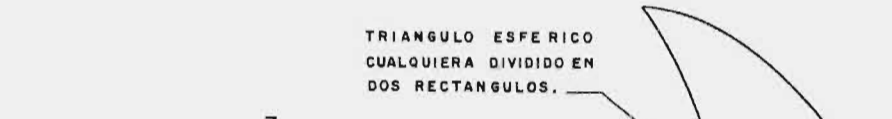


FIG. 1

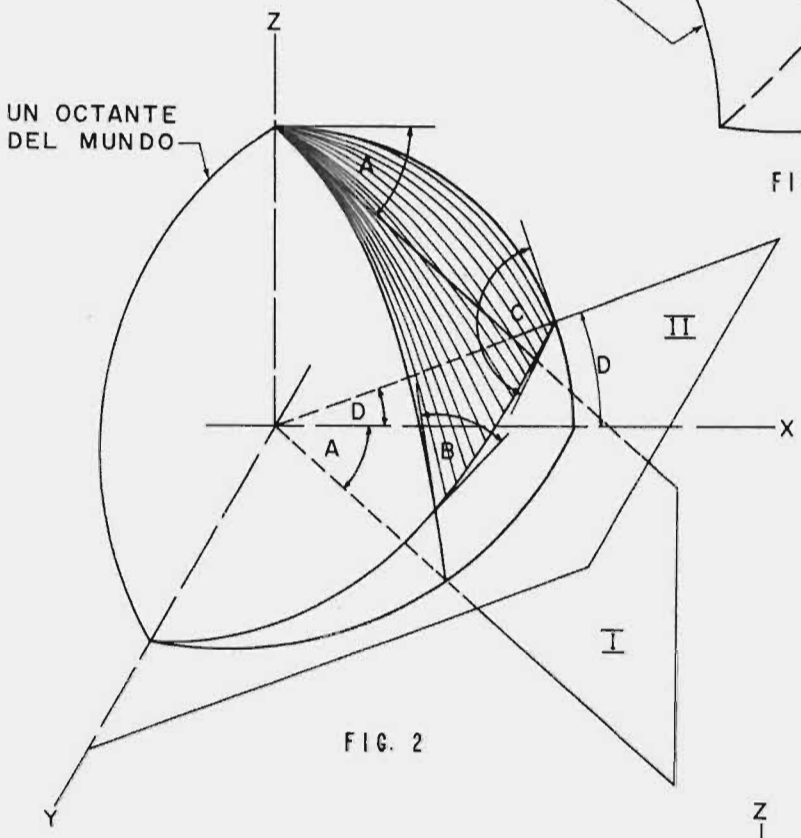


FIG. 2

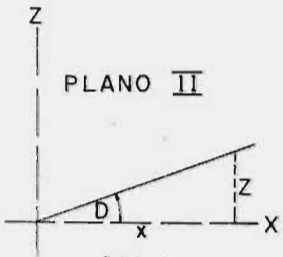


FIG. 3

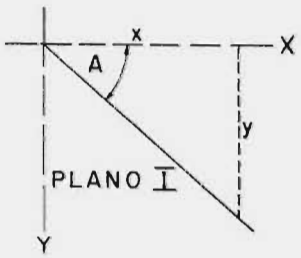


FIG. 4

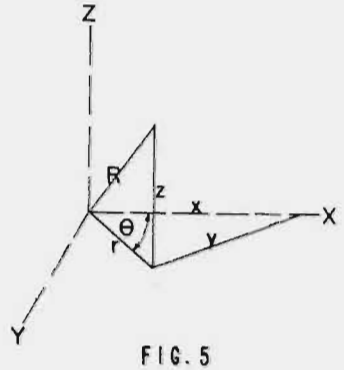
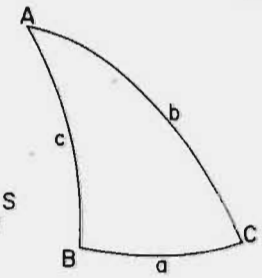


FIG. 5



ANALOGIAS
DE NEPER

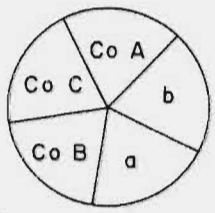


FIG. 6

El diferencial de superficie dS será igual:

$$dS = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} ds$$

Tenemos:
luego:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z \text{ luego } dS = \frac{Z}{R} ds.$$

siendo ds la proyección de dS sobre XY.

$$\text{Superficie} = R\int_S \int \frac{ds}{z}$$

Por facilidad se efectúa el integral doble por medio de coordenadas esféricas, de las cuales resultan las relaciones: (Fig. 5).

$r = R\text{sen}\phi$
$y = r\text{sen}\theta = R\text{sen}\phi\text{sen}\theta$
$z = R\cos\phi = R\text{sen}\phi\cos\theta$
$x = r\cos\theta$
$dr = R\cos\phi d\phi$ (diferenciando)
$ds = rdrd\theta = R\text{sen}\phi R\cos\phi d\phi d\theta$

$$\text{Superficie} = \int\int \frac{R}{R\cos\phi} R^2 \text{ sen}\phi\cos\phi d\phi d\theta = R^2 \int\int \text{sen}\phi d\phi d\theta$$

Transformando el plano II a coordenadas esféricas:

$R\text{sen}\phi \cos\theta \text{ SenD} - R\cos\phi \text{ cosD} = 0$

$\text{tg}\phi \text{ tgD } \cos\theta - 1 = 0$

$$\text{tg}\phi = \frac{1}{\cos\theta \text{ tgD}}$$

$\text{ctg}\phi = \cos\theta\text{tgD}$
$\phi = \text{arc ctg } \cos\theta \text{ tgD} = K$

$$\text{Superficie} = R2 \int_0^A \int_0^k \text{sen}\phi \, d\phi \, d\theta =$$

$$= -R^2 \int_0^A [\cos\phi]_0^k d\theta = -R^2 \int_0^A \left[\frac{\cos\theta \text{ tgD}}{\sqrt{1 + \cos^2\theta \text{tg}^2 D}} - 1\right] d\theta =$$

$$= -R^2 \int_0^A \frac{d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta \operatorname{ctg}^2 D+1}} + R \int_0^A d\theta = -R^2 \int_0^A \frac{d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta \operatorname{ctg}^2 D+1}} + R^2 A$$

$$= R^2 A - R^2 \int_0^A \frac{d\theta \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\sec^2\theta \cos^2 D + \operatorname{sen}^2 D}} = R^2 A - R^2 \int_0^A \frac{\operatorname{sen} D d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta(1-\operatorname{sen}^2 D)+\operatorname{sen}^2 D}}$$

$$= R^2 A - R^2 \int_0^A \frac{\operatorname{sen} D d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - \operatorname{Sec}^2\theta \operatorname{Sen}^2 D + \operatorname{Sen}^2 D}} =$$

$$= R^2 A - R^2 \int_0^A \frac{\operatorname{Sen} D\ d\theta}{\sqrt{\operatorname{Sec}^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta \operatorname{Sen}^2 D}} = R^2 A - R^2 \int_0^A \frac{\cos D \operatorname{sen} D d\theta}{\sqrt{1-\operatorname{Sen}^2\theta \operatorname{Sen}^2 D}}$$

$$= R^2 A - R^2 \left[\operatorname{arc\,Sen}(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} D)\right]_0^A = R^2 A - R^2 \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{Sen} A \operatorname{sen} D)$$

de la Fig. 6 según las analogías de Neper se vé:

$$D = \frac{\pi}{2} - b, \quad \operatorname{sen}\operatorname{co} B = \cos\operatorname{co} A \cos b$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \operatorname{sen} A \cos\left(\frac{\pi}{2} - D\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} D$$

$$\text{Superficie} = R^2\left[A - \left(\frac{\pi}{2} - B\right)\right] = R^2\left[A + B - \frac{\pi}{2}\right] = R^2\left[A + B + \frac{\pi}{2} - \pi\right] =$$

$$= R^2\ [A+B+C-\pi] = R^2 E \ (E = \text{exceso esférico}).$$

La Superficie de un triángulo esférico es igual al cuadrado del radio por el exceso esférico.

Explicación de los métodos abreviados en la formación y solución de las ecuaciones correlativas y normales en los ajustes de triángulación.

Supongamos los errores x, y, z, s, t, sujetos a las tres condiciones siguientes:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1s + e_1t + k_1 = 0 \quad (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2s + e_2t + k_2 = 0 \quad (2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3s + e_3t + k_3 = 0 \quad (3)$$

Y llamamos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 los pesos correspondientes.

De la teoría de los mínimos cuadrados la función que será un mínimo es

$$P_1x^2 + P_2y^2 + P_3z^2 + P_4s^2 + P_5t^2$$

Según se explicó anteriormente con el uso de los multiplicadores de Lagrange se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$2P_1x - C_1a_1 - C_2a_2 - C_3a_3 = 0$$
$$2P_2y - C_1b_1 - C_2b_2 - C_3b_3 = 0$$
$$2P_3z - C_1c_1 - C_2c_2 - C_3c_3 = 0$$
$$2P_4s - C_1d_1 - C_2d_2 - C_3d_3 = 0$$
$$2P_5t - C_1c_1 - C_2e_2 - C_3e_3 = 0$$

En las que C_1, C_2, C_3, C_4 C_5 son los multiplicadores

Despejando los errores:

$$x = \frac{a_1}{2P_1}C_1 + \frac{a_2}{2P_1}C_2 + \frac{a_3}{2P_1}C$$
$$y = \frac{b_1}{2P_2}C_1 + \frac{b_2}{2P_2}C_2 + \frac{b_3}{2P_2}C_3$$
$$z = \frac{c_1}{2P_3}C_1 + \frac{c_2}{2P_3}C_2 + \frac{c_3}{2P_3}C$$
$$s = \frac{d_1}{2P_4}C_1 + \frac{d_2}{2P_4}C_2 + \frac{d_3}{2P_4}C_3$$
$$t = \frac{e_1}{2P_5}C_1 + \frac{e_2}{2P_5}C_2 + \frac{e_3}{2P_5}C_3$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones originales de condición se obtienen las ecuaciones llamadas Normales.

$$\frac{a_1a_1}{2P_1}C_1+\frac{a_1a_2}{2P_1}C_2+\frac{a_1a_3}{2P_1}C_3+\frac{b_1b_1}{2P_2}C_1+\frac{b_1b_2}{2P_2}C_2+\frac{b_1b_3}{2P_2}C_3+$$

$$+\frac{c_1c_1}{2P_3}C_1+\frac{c_1c_2}{2P_3}C_2+\frac{c_1c_3}{2P_3}C_3+\frac{d_1d_1}{2P_4}C_1+\frac{d_1d_2}{2P_4}C_2+\frac{d_1d_3}{2P_2}C_3+$$

$$+\frac{e_1e_1}{2P_5}C_1+\frac{e_1e_2}{2P_5}C_2+\frac{e_1e_3}{2P_5}C_3+K_1=0$$

de donde agrupando resulta:

$$\left(\frac{a_1a_1}{2P_1}+\frac{b_1b_1}{2P_2}+\frac{c_1c_1}{2P_3}+\frac{d_1d_1}{2P_4}+\frac{e_1e_1}{2P_5}\right)\quad C_1$$

$$+\quad\left(\frac{a_1a_2}{2P_1}+\frac{b_1b_2}{2P_2}+\frac{c_1c_2}{2P_3}+\frac{d_1d_2}{2P_4}+\frac{e_1e_2}{2P_5}\right)\quad C_2$$

$$+\quad\left(\frac{a_1a_3}{2P_1}+\frac{b_1b_3}{2P_2}+\frac{c_1c_3}{2P_3}+\frac{d_1d_3}{2P_4}+\frac{e_1e_3}{2P_5}\right)\quad C_3+K_1=0$$

Solamente deduciré esta ecuación por ser suficiente para ilustrar el método y evitar la cantidad excesiva de trabajo.

Por simple inspección del resultado y comparando con la tabla de los coeficientes de las ecuaciones de condición o correlativas, se apreciará que el trabajo disminuye en cantidad.

Procedimiento para la tabulación correlativa.

En la primera columna se colocan los medios del inverso de los pesos y en la columna 1, 2, 3 los coeficientes de las ecuaciones de condición.

Formación de las Normales:

C U A D R O

		1	2	3	k
	$1/2P_1$	a_1	a_2	a_3	k_1
	$1/2P_2$	b_1	b_2	b_3	k_2
	$1/2P_3$	c_1	c_2	c_3	k_3
	$1/2P_4$	d_1	d_2	d_3	k_4
	$1/2P_5$	e_1	e_2	e_3	k_5

Regla.

Para la formación de la ecuación 1, los coeficientes de la columna 1 sirven de factor; para la Nº 2, la columna 2, para la Nº 3, la columna 3, etc... También el 1/2 del inverso del peso es factor constante.

Cuando se determinen los coeficientes de C1, C2, C3, C4, etc., se hará multiplicando las columnas factores por el número de la columna correspondiente y se suman los resultados.

Por ejemplo la ecuación Nº 3.

Para el coeficiente de C_1 $\left(\frac{a_3a_1}{2P_1}+\frac{b_3b_1}{2P_2}+\frac{c_3c_1}{2P_3}+\frac{d_3d_1}{2P_4}+\frac{e_3e_1}{2P_5}\right)$

para C_2 $\left(\frac{a_3a_2}{2P_1}+\frac{b_3b_2}{2P_2}+\frac{c_3c_2}{2P_3}+\frac{d_3d_2}{2P_4}+\frac{e_3e_2}{2P_5}\right)$

para C_3 $\left(\frac{a_3a_3}{2P_1}+\frac{b_3b_3}{2P_2}+\frac{c_3c_3}{2P_3}+\frac{d_3d_3}{2P_4}+\frac{e_3e_3}{2P_5}\right)$

Mas la constante K

Para evitar trabajar con fracciones, en la columna de los pesos se colocan los valores $\frac{m}{p}$ siendo m el mínimo común múltiplo de los pesos, y p el peso respectivo.

AJUSTES DE TRIANGULACION.

Supongamos que x,y,z, sean tres errores que se precisa determinar.

Sabemos que el valor más probable se obtiene cuando el cuadrado de los errores es un mínimo.

Se precisa pues, que x^2, y^2, z^2 sea un mínimo.

También siempre se tendrán sujetos estos errores a ciertas ecuaciones de condición, como son, que los tres ángulos de un triángulo sumen 180° o que un lado calculado de una manera, cierre con el calculado por otra, etc...

Necesitamos recordar ahora el principio de los multiplicadores de Lagrange, el cual establece que sí se tiene una función $F(x,y,z)=0$ la cual se va a hacer un mínimo y, sujeta a ciertas funciones de condición $G(x,y,z,)=0$, $H(x,y,z,)=0$ etc., se plantea la ecuación:

$F(x, y, z) - \beta G(x, y, z) - \gamma H(x, y, z) = 0$ de donde se deduce facilmente:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y,z) - \frac{\partial \beta}{\partial x} G(x,y,z) - \frac{\partial \gamma}{\partial x} - H(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y,z) - \frac{\partial \beta}{\partial y} G(x,y,z) - \frac{\partial \gamma}{\partial y} H(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F(x,y,z) - \frac{\partial \beta}{\partial z} G(x,y,z) - \frac{\partial \gamma}{\partial z} H(x,y,z) = 0$$

De donde se deducen β , γ los cuales son los multiplicadores de Lagrange. Conocidos β y γ se hallan los valores de x,y,z.

Pasemos ahora a la solución del problema. Como ejemplo literal supongamos las tres ecuaciones de condición:

$a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0$ (1) ecuaciones de condición

$a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0$ (2)

$a_3x + b_3y + c_3z - d_3 = 0$ (3)

Planteo de la ecuación que va a ser mínimo:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2C_1(a_1x + b_1y + c_1z) - 2C_2(a_2x + b_2y + c_2z) - 2C_3(a_3x + b_3y + c_3z) = 0$$

Por conveniencia se usa $2C_1, 2C_2, 2C_3$ en vez de β, γ, u

$x - C_1a_1 - C_2a_2 C_3a_3 = 0$	$x = C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3$	Resultados de derivar
$y - C_1b_1 - C_2b_2 - C_3b_3 = 0$	$y = C_1b_1 + C_2b_2 + C_3b_3$	parcialmente con
$z - C_1c_1 - C_2c_2 - C_3c_3 = 0$	$z = C_1c_1 + C_2c_2 + C_3c_3$	respecto a x, y, z.

Sustituyendo estos resultados en ecuación (1) resulta:

$$C_1a_1a_1 + C_2a_2a_1 + C_3a_3a_1 + C_1b_1b_1 + C_2b_2b_1 + C_3b_3b_1 + C_1c_1c_1 + C_2c_2c_1 + C_3c_3c_1 - D = 0$$

y así mismo se obtienen las tres ecuaciones siguientes:

$$C_1(a_1a_1 + b_1b_1 + c_1c_1) + C_2(a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1) + C_3(a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1) - d_1 = 0 \quad (4)$$

$$C_1(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + C_2(a_2a_2 + b_2b_2 + c_2c_2) + C_3(a_3a_2 + b_3b_2 + c_3c_2) - d_2 = 0 \quad (5)$$

$$C_1(a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3) + C_2(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3) + C_3(a_3a_3 + b_3b_3 + c_3c_3) - d_3 = 0 \quad (6)$$

Obsérvese que los factores bajo la línea quebrada están repetidos dos veces, por lo que diré después que hay simetría con respecto a la diagonal.

A continuación dispongo las ecuaciones (1), (2), (3), en una forma tabular, lo que se llama ECUACIONES CORRELATIVAS.

1	a_1	b_1	c_1	$-d_1$
2	a_2	b_2	c_2	$-d_2$
3	a_2	b_3	c_3	$-d_3$

CUADRO 1

Mismas ecuaciones de condición
3 de ángulo y uno de lado.

Las ecuaciones (4), (5), (6), se llaman NORMALES y son las que al resolverse, es decir, al hallar los valores de C_1, C_2, C_3, determinarán después los valores buscados x,y,z.

Lo importante del sistema es que obtiene las ecuaciones Normales directamente del planteo de las correlativas (cuadrol).

Observando la Normal (4).

Se toma como eje de multiplicación la fila 1.

Coeficiente de C_1 es la fila 1 por ella misma.

Coeficiente de C^2 es la fila 1 por la fila 3.

Coeficiente de C_3 es la fila 1 por la fila 2.

Observando la Normal (5).

Se toma como eje de multiplicación la fila 2.

Coeficiente de C_1 es la fila 2 por la fila 1.

Coeficiente de C_2 es la fila 2 por ella misma.

Coeficiente de C_3 es la fila 2 por la fila 3.

Observando la Normal (6).

Se toma como eje de multiplicación la fila 3.

Coeficiente de C_1 es la fila 3 por la fila 1.

Coeficiente de C_2 es la fila 3 por la fila 2.

Coeficiente de C_3 es la fila 3 por ella misma.

Es importante notar que los términos independientes d_1, d_2, d_3 solamente se copian con su signo.

Para mayor simplificación de los símbolos usaré los siguientes:

$$a_1a_1+b_1b_1+c_1c_1 = k_1$$
$$a_2a_2+b_2b_2+c_1c_1 = k_2$$
$$a_3a_3+b_3b_3+c_1c_1 = k_3$$
$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = k_4$$
$$a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 = k_5$$
$$a_2a_3+b_1b_3+c_2c_3 = k_6$$

Entonces las ecuaciones Normales toman la forma.

NORMALES

1	2	3	Constant.	Comprobación
K_1	K_4	K_5	$-d_1$	$k_1+k_4+k_5-d_1$
K_4	K_2	K_6	$-d_2$	$k_4+k_2+k_6-d_2$
K_5	K_6	K_3	$-d_3$	$k_5+k_6+k_3-d_3$

Los términos bajo la diagonal se omiten por ser repetidos.

Explicación del Método de los Mínimos Cuadrados.

Ya se ha probado que la suma de los cuadrados de los residuos encontrados por el uso de la Media Aritmética son un Mínimo.

Por lo tanto, siempre que se tenga una función formada por la suma de muchos errores, el fin que se perseguirá es que el cuadrado de la función sea un mínimo.

Supongamos que se han realizado las medidas: AB, CD, AC, BD, AD y por supuesto ellas tienen su error correspondiente x,y,z,s,t,v.

A B C D

111.23 115.16 200.21

226.43

315.35

426.70

de esto se pueden formar las condiciones siguientes:

$$
\begin{array}{llll}
AB + BC + CD & = & 426.60 + x + y + z \\
AC + CD & = & 426.64 + s + z \\
AB + BD & = & 426.58 + x + t \\
AD & = & 426.70 + v \\
AC - BC + BD & = & 426.62 + s + t - y \\
AB + BC & = & 226.39 + x + y \\
AC & = & 226.43 + s \\
BC + CD & = & 315.37 + y + z \\
BD & = & 315.35 + t
\end{array}
$$

De las cuales se deducen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{array}{llll}
x + y + z & - v - 0.10 & = & 0 \\
z + s & - v - 0.06 & = & 0 \\
x + t & - v - 0.02 & = & 0 \\
- y \quad s + t & - 0.08 & = & 0 \\
x + y \quad - s & - 0.04 & = & 0 \\
y + z \quad - t & + 0.02 & = & 0
\end{array}
$$

Estas ecuaciones se llaman de condición.

En las medidas siempre existen condiciones que hay que llenar, como puede ser que la suma de los tres ángulos de un triángulo den 180° más el exceso esférico o que un lado calculado de una manera sea equivalente al calculado por otro. Estos se llaman condiciones de lado y ángulo.

El problema pues, se concreta a determinar cual es el valor probable de los errores desconocidos x y z... etc. y en esto el método de los mínimos cuadrados es de poderosa ayuda.

Del ejemplo se puede ver que siempre se puede obtener un sistema de ecuaciones lineales de conocidas constantes en donde las incógnitas son las correcciones.

Como se puede apreciar el problema de encontrar las correcciones es bastante complejo y laborioso.

Ya antiguamente los matemáticos al resolver las estructuras por los métodos de trabajo mínimo y Slope deflection, se encontraban con el trabajo de gran número de incógnitas y ecuaciones, y aunque Gauss desarrolló un sistema más simple, el trabajo ocasionado entonces se resuelve ahora por métodos como son el conocido Hardy Cross.

Con el empleo de los multiplicadores de Lagrange, nuestro trabajo se reduce en complicación.

El método desarrollado por Lagrange establece que si se le busca los valores máximos y mínimos a una función f (x,y,z,) y sujeta a la condición g (x,y,z); se forma entonces una tercera función auxiliar f (x,y,z) — y g (x,y,z,); a la cual también se le buscan los máximos y mínimos lo cual se resuelve encontrando y multiplicador así:

$$\gamma = \frac{\partial f\ (x, y, z)}{\partial g\ (x, y, z)}$$ o mas claramente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \gamma \frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \gamma \frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \gamma \frac{\partial g}{\partial z}$$

de estas relaciones y la original, resultan los valores de γ , x, y, z.
Hagamos uso del Método de Lagrange en el ejemplo siguiente:
Se busca el punto mas cercano al origen en la curva x^2 y—2=0.
Claramente se ve que la función que tiene que ser un mínimo es x^2+y2.

Entonces: $x^2 + y^2 - \gamma\ (x^2y - 2) = 0$
derivando parcialmente con respecto a x e y resulta
(1) $2x - \gamma \cdot 2xy = 0$, $2y - \gamma\ x^2 = 0$ (²)

de (1) $y = \frac{1}{\gamma}$

sust. en (²) $2y - \frac{1}{\gamma} x^2 = 0$

$$2y^2 - x^2 = 0$$
$$x^2 = 2y^2$$

sust. en la original:

$$2y^2 - 2 = 0$$
$$y = 1 \quad y = 1 \text{ y } x = \pm \sqrt{2}$$

Estableciendo esto pasemos a ilustrar el método en la búsqueda de los errores mas probables.
Supongamos los siguientes casos:

x, y, z = ciertos errores desconocidos
w, k, i = los pesos de las medidas correspondientes
$a_1x + b_1y + c_1z = 0$ tres ecuaciones de condición
$a_2x + b_2y + c_2z = 0$ en las que se conocen los
$a_3x + b_3y + c_3z = 0$ coeficientes constantes

De la teoría de los mínimos cuadrados se establece que la función que tiene que ser un mínimo es $wx^2 + ky^2 + iz^2$
usando el sistema de Lagrange se establece la función auxiliar:

$$u = (wx^2 + ky^2 + iz^2) - (a_1x + b_1y + c_1z)) - (a_2x + b_2y + c_2z) \phi(a_3x + b_3y + c_3z)$$

derivando parcialmente con respecto a x, y, z se establece:

$$2wx - a_1 y - a_2 B - b_3 \phi = 0$$
$$2ky - a_1 y - b_2 B - a_3 \phi = 0$$
$$2iz - a_1 y - c^2 B - c^3 \phi = 0$$

de donde

$$x = \frac{a_1}{2w} y + \frac{a_2}{2w} B + \frac{a^3}{2w} \phi$$

$$y = \frac{b_1}{2k} y + \frac{b_2}{2k} B + \frac{l_3}{2k} \phi$$

$$z = \frac{c^1}{2i} y + \frac{c_1}{2i} B + \frac{c_1}{2i} \phi$$

Al sustituir los valores de x, y, z en las ecuaciones de condición se obtendrán las ecuaciones que se nombran Normales en términos de los multiplicadores y, B, ϕ los cuales a su vez determinarán los valores de x, y, z que serán los errores más probables.

Por supuesto que existen sistemas para hacerlo de una manera mecánica y ordenada y de los cuales solamente desarrollaré el sistema de Doolitle.

Todos estos trabajos son los que ocupan al ajuste de las triangulaciones y los cuales se desarrollan perfectamente en países como E. U. A., México, Panamá, Brasil, Cuba, etc.

Por consiguiente es necesario que nuestra Facultad se ocupe de ellos, ya que en nuestro País tenemos una Dirección Técnica como la de Cartografía y además poseemos la mejor red de Triangulación de Centro América.

En esta parte como todo apéndice matemático solamente se explica la legitimidad del método, ya que ejemplos prácticos y sistemas, se tratan en el cuerpo principal de la Tesis.

Deducción de la Fórmula del Exceso esférico que se usa en la práctica.

Ya se dedujo que la superficie de un triángulo esférico es igual al cuadrado del radio por el exceso e:

$$S = R^2 E \text{ luego } E = \frac{S}{R^2}$$

La superficie podrá ser en función de dos lados y el ángulo comprendido. Llamemos a_1 y b_1 a los lados y C al ángulo comprendido.

Entonces: $$E = \frac{a1b1\text{sen } C}{2\ R^2}$$

como los lados a_1 b_1 son deducidos como lineales y no son resultado de la medida sobre la tierra, habrá de considerarse una corrección necesaria la cual la deduzco de la siguiente manera:

Diferencial del arco $= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta =$

$$= \frac{ab\ d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \operatorname{Sen}^2\theta}} = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{Sen}^2\phi}}\, d\theta$$

usando el semi-eje mayor a y el mismo $d\theta$ se puede buscar una constante de corrección que resulte equivalente al diferencial arco.

$$K \times a\, d\theta = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi}}\, d\theta \qquad \text{de donde} = \frac{\frac{a}{b}}{\sqrt{1 - e^2\ \operatorname{Sen}^2\phi}}$$

y como son dos los lados que habrán de corregirse se puede decir que la constante total de corrección es igual a K^2, es decir

$$\frac{\frac{b^2}{a^2}}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi}$$

Sustituyendo los valores conocidos resultará:

$$\text{Exceso} = \frac{1}{2}\, a_1\, b_1 \operatorname{sen} C \times \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi} \times \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^3}{a^2\ (1 - e^2)^2} =$$

$$= \frac{a_1 b_1 \operatorname{sen} C\ (1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^2}{2a^2\ (1 - e^2)} = a_1 b_1 \operatorname{sen} C \times M$$

de donde se le llamará m al valor que resulta de calcular

$$\frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^2}{2a^2\ (1 - e^2)}$$ y el cual es proporcional a la latitud ϕ.

En la parte correspondiente a las tablas se encontrará los valores de m para distintas latitudes en El Salvador. En realidad para trabajos de poca precisión como el que nos ocupa, se puede considerar a m igual a:

long. m= 1.40662 — 10

Logaritmos del radio de Curvatura de la Superficie de la Tierra (En metros).

Latitud.

Azimut (grados)	13°	14°	15°
0	6.80197	6.80201	6.80204
5	199	203	206
10	206	209	213
15	216	219	223
20	230	233	236
25	247	250	254
30	267	270	273
35	289	292	295
40	313	315	318
45	337	339	342
50	361	364	366
55	385	387	389
60	407	409	411
65	427	429	430
70	444	446	447
75	458	460	461
80	469	470	471
85	475	476	478
90	477	478	480

Computación para el Esferoide de Clarke de 1866 expresado en metros.

Tabla de Long. m.

Latitud	Long m.
0 ′	
13 00	665 —10
13 30	663 —10
14 00	660 —10
14 30	658 —10
15 00	655 —10

Factures de conversión.

1 Kilómetro = 0.621370 Milla legal = 0.539593 Milla Náutica
1 Metro = 0.000621370 Milla legal = 0.000539593 Milla Náutica
1 Milla legal = 1609.35 metros = 1.60935 Kilómetros
1 Milla Náutica = 1853.25 metros = 1.85325 Kilómetros
1 Milla Náutica = 1.151553 Milla legal
1 Milla legal = 0.868393 Milla Náutica
1 Metro = 39.37 pulgadas (Ley de Julio 28, 1866)
1 Metro = 3.28083333 pies
log. 3.28083333 metro
1 Pié = 0.30480061 metro
log. 0.3048006- = 9.48401583 —10.

CALCULO DE LA RESISTENCIA DE LAS FIGURAS.

En la siguiente Tabla se muestran los valores tabulados de $[\partial A^2 + \partial AB + \partial B^2]$.

La unidad está en la sexta cifra decimal de los logaritmos.

Los dos argumentos de la Tabla son los ángulos de longitud en grados, el ángulo más pequeño se pondrá en el tope de la Tabla. Los ángulos de longitud son aquellos opuestos a los lados conocidos y a los lados que se quieren conocer. ∂A y ∂B son las diferencias logarítmicas correspondientes a 1 segundo de los ángulos de longitud A y B del triángulo.

ϕ	R	Y′	$\Delta 1''$	k
13°00′	26,090,848.825	209,151.175	30.73070	1.00005 98
01	26,089,004.983	210,995.017	30.73062	1.00005 59
02	26,087,161.146	212,838.854	30.73053	1.00005 21
03	26,085,317.314	214,682.686	30.73048	1.00004 83
04	26,083,473.485	216,526.515	30.73038	1.00004 47
13 05	26,081,629.662	218,370.338	30.73033	1.00004 11
06	26,079,785.842	220,214.158	30.73027	1.00003 76
07	26,077,942.026	222,057.974	30.73020	1.00003 42
08	26,076,098.214	223,901.786	30.73015	1.00003 09
09	26,074,254.405	225,745.595	30.73007	1.00002 77
13 10	26,072,410.601	227,589.399	30.73003	1.00002 45
11	26,070,566.799	229,433.201	30.72998	1.00002 15
12	26,068,723.000	231,277.000	30.72992	1.00001 85
13	26,066,879.205	233,120.795	30.72988	1.00001 56
14	26,065,035.412	234,964.588	30.72983	1.00001 28
13 15	26,063,191.622	236,808.378	30.72978	1.00001 01
16	26,061,347.835	238,652.165	30.72975	1.00000 74
17	26,059,504.050	240,495.950	30.72972	1.00000 48
18	26,057,660.267	242,339.733	30.72968	1.00000 24
19	26,055,816.486	244,183.514	30.72965	1.00000 00
13 20	26,053,972.707	246,027.293	30.72962	0.99999 77
21	26,052,128.930	247,871.070	30.72960	0.99999 54
22	26,050,285.154	249,714.846	30.72957	0.99999 33
23	26,048,441.380	251,558.620	30.72955	0.99999 12
24	26,046,597.607	253,402.393	30.72953	0.99998 93
13 25	26,044,753.835	255,246.165	30.72952	0.99998 74
26	26,042,910.064	257,089.936	30.72950	0.99998 56
27	26,041,066.294	258,933.706	30.72948	0.99998 38
28	26,039,222.525	260,777.475	30.72948	0.99998 22
29	26,037,378.756	262,621.244	30.72948	0.99998 07
13 30	26,035,534.987	264,465.013	30.72947	0.99997 92
31	26,033,691.219	266,308.781	30.72948	0.99997 78
32	26,031,847.450	268,152.550	30.72947	0.99997 65
33	26,030,003.682	269,996.318	30.72948	0.99997 53
34	26,028,159.913	271,840.087	30.72950	0.99997 41
13 35	26,026,316.143	273,683.857	30.72950	0.99997 31
36	26,024,472.373	275,527.627	30.72952	0.99997 21
37	26,022,628.602	277,371.398	30.72952	0.99997 12
38	26,020,784.831	279,215.169	30.72955	0.99997 04
39	26,018,941.058	281,058.942	30.72957	0.99996 97
13 40	26,017,097.284	282,902.716	30.72960	0.99996 91
41	26,015,253.508	284,746.492	30.72962	0.99996 86
42	26,013,409.731	286,590.269	30.72965	0.99996 81
43	26,011,565.952	288,434.048	30.72968	0.99996 77
44	26,009,722.171	290,277.829	30.72972	0.99996 74
13 45	26,007,878.388	292,121.612	30.72975	0.99996 72
46	26,006,034.603	293,965.397	30.72978	0.99996 71
47	26,004,190.816	295,809.184	30.72983	0.99996 70
48	26,002,347.026	297,652.974	30.72987	0.99996 71
49	26,000,503.234	299,496.766	30.72993	0.99996 72
13 50	25,998,659.438	301,340.562	30.72997	0.99996 74
51	25,996,815.640	303,184.360	30.73003	0.99996 77
52	25,994,971.838	305,028.162	30.73008	0.99996 81
53	25,993,128.033	306,871.967	30.73013	0.99996 86
54	25,991,284.225	308,715.775	30.73020	0.99996 91
13 55	25,989,440.413	310,559.587	30.73027	0.99996 97
56	25,987,596.597	312,403.403	30.73032	0.99997 04
57	25,985,752.778	314,247.222	30.73040	0.99997 12
58	25,983,908.954	316,091.046	30.73047	0.99997 21
13 59	25,982,065.126	317,934.874	30.73055	0.99997 31

ϕ	R	Y′	Δ 1″	k
14°00′	25,980,221.293	319,778.707	30.73062	0.99997 41
01	25,978,377.456	321,622.544	30.73070	0.99997 53
02	25,976,533.614	323,466.386	30.73077	0.99997 65
03	25,974,689.768	325,310.232	30.73087	0.99997 78
04	25,972,845.916	327,154.084	30.73095	0.99997 92
14 05	25,971,002.059	328,997.941	30.73103	0.99998 07
06	25,969,158.197	330,841.803	30.73113	0.99998 22
07	25,967,314.329	332,685.671	30.73122	0.99998 39
08	25,965,470.456	334,529.544	30.73133	0.99998 56
09	25,963,626.576	336,373.424	30.73142	0.99998 74
14 10	25,961,782.691	338,217.309	30.73152	0.99998 93
11	25,959,938.800	340,061.200	30.73163	0.99999 13
12	25,958,094.902	341,905.098	30.73173	0.99999 33
13	25,956,250.998	343,749.002	30.73185	0.99999 55
14	25,954,407.087	345,592.913	30.73197	0.99999 77
14 15	25,952,563.169	347,436.831	30.73208	1.00000 00
16	25,950,719.244	349,280.756	30.73218	1.00000 24
17	25,948,875.313	351,124.687	30.73232	1.00000 49
18	25,947,031.374	352,968.626	30.73245	1.00000 75
19	25,945,187.427	354,812.573	30.73257	1.00001 01
14 20	25,943,343.473	356,656.527	30.73268	1.00001 29
21	25,941,499.512	358,500.488	30.73283	1.00001 57
22	25,939,655.542	360,344.458	30.73297	1.00001 86
23	25,937,811.564	362,188.436	30.73308	1.00002 16
24	25,935,967.579	364,032.421	30.73325	1.00002 46
14 25	25,934,123.584	365,876.416	30.73337	1.00002 78
26	25,932,279.582	367,720.418	30.73353	1.00003 10
27	25,930,435.570	369,564.430	30.73367	1.00003 44
28	25,928,591.550	371,408.450	30.73383	1.00003 78
29	25,926,747.520	373,252.480	30.73397	1.00004 13
14 30	25,924,903.482	375,096.518	30.73413	1.00004 49
31	25,923,059.434	376,940.566	30.73428	1.00004 85
32	25,921,215.377	378,784.623	30.73445	1.00005 23
33	25,919,371.310	380,628.690	30.73462	1.00005 61
34	25,917,527.233	382,472.767	30.73477	1.00006 00
14 35	25,915,683.147	384,316.853	30.73495	1.00006 40
36	25,913,839.050	386,160.950	30.73512	1.00006 81
37	25,911,994.943	388,005.057	30.73528	1.00007 23
38	25,910,150.826	389,849.174	30.73547	1.00007 65
39	25,908,306.698	391,693.302	30.73565	1.00008 09
14 40	25,906,462.559	393,537.441		1.00008 53

$\Delta\lambda$	Sin θ	$\Delta 1'' \times 10^{10}$	Tan $\frac{\theta}{2}$	$\Delta 1'' \times 10^{10}$	Tan θ	$\Delta 1'' \times 10^{10}$
0°00′	0.00000 00000	11,550.73	0.00000 00000	5,775.37	0.00000 00000	11,550.73
01	0.00006 93044	11,550.73	0.00003 46522	5,775.37	0.00006 93044	11,550.73
02	0.00013 86088	11,550.73	0.00006 93044	5,775.37	0.00013 86088	11,550.73
03	0.00020 79132	11,550.73	0.00010 39566	5,775.37	0.00020 79132	11,550.73
04	0.00027 72176	11,550.73	0.00013 86088	5,775.37	0.00027 72176	11,550.73
0 05	0.00034 65220	11,550.73	0.00017 32610	5,775.37	0.00034 65220	11,550.73
06	0.00041 58264	11,550.72	0.00020 79132	5,775.37	0.00041 58264	11,550.73
07	0.00048 51307	11,550.73	0.00024 25654	5,775.37	0.00048 51308	11,550.73
08	0.00055 44351	11,550.73	0.00027 72176	5,775.37	0.00055 44352	11,550.73
09	0.00062 37395	11,550.73	0.00031 18698	5,775.37	0.00062 37396	11,550.73
0 10	0.00069 30439	11,550.73	0.00034 65220	5,775.37	0.00069 30440	11,550.75
11	0.00076 23483	11,550.72	0.00038 11742	5,775.37	0.00076 23485	11,550.73
12	0.00083 16526	11,550.73	0.00041 58264	5,775.37	0.00083 16529	11,550.75
13	0.00090 09570	11,550.73	0.00045 04786	5,775.37	0.00090 09574	11,550.73
14	0.00097 02614	11,550.72	0.00048 51308	5,775.37	0.00097 02618	11,550.75
0 15	0.00103 95657	11,550.73	0.00051 97830	5,775.37	0.00103 95663	11,550.75
16	0.00110 88701	11,550.72	0.00055 44352	5,775.37	0.00110 88708	11,550.73
17	0.00117 81744	11,550.73	0.00058 90874	5,775.37	0.00117 81752	11,550.75
18	0.00124 74788	11,550.72	0.00062 37396	5,775.37	0.00124 74797	11,550.75
19	0.00131 67831	11,550.72	0.00065 83918	5,775.37	0.00131 67842	11,550.77
0 20	0.00138 60874	11,550.73	0.00069 30440	5,775.38	0.00138 60888	11,550.75
21	0.00145 53918	11,550.72	0.00072 76963	5,775.37	0.00145 53933	11,550.75
22	0.00152 46961	11,550.72	0.00076 23485	5,775.37	0.00152 46978	11,550.77
23	0.00159 40004	11,550.72	0.00079 70007	5,775.37	0.00159 40024	11,550.77
24	0.00166 33047	11,550.72	0.00083 16529	5,775.37	0.00166 33070	11,550.77
0 25	0.00173 26090	11,550.72	0.00086 63051	5,775.38	0.00173 26116	11,550.77
26	0.00180 19133	11,550.70	0.00090 09574	5,775.37	0.00180 19162	11,550.77
27	0.00187 12175	11,550.72	0.00093 56096	5,775.37	0.00187 12208	11,550.78
28	0.00194 05218	11,550.72	0.00097 02618	5,775.37	0.00194 05255	11,550.77
29	0.00200 98261	11,550.70	0.00100 49140	5,775.38	0.00200 98301	11,550.75
0 30	0.00207 91303	11,550.72	0.00103 95663	5,775.37	0.00207 91348	11,550.78
31	0.00214 84346	11,550.70	0.00107 42185	5,775.38	0.00214 84395	11,550.78
32	0.00221 77388	11,550.70	0.00110 88708	5,775.37	0.00221 77442	11,550.80
33	0.00228 70430	11,550.70	0.00114 35230	5,775.37	0.00228 70490	11,550.80
34	0.00235 63472	11,550.70	0.00117 81752	5,775.38	0.00235 63538	11,550.78
0 35	0.00242 56514	11,550.70	0.00121 28275	5,775.37	0.00242 56585	11,550.82
36	0.00249 49556	11,550.70	0.00124 74797	5,775.38	0.00249 49634	11,550.80
37	0.00256 42598	11,550.68	0.00128 21320	5,775.37	0.00256 42682	11,550.82
38	0.00263 35639	11,550.70	0.00131 67842	5,775.38	0.00263 35731	11,550.80
39	0.00270 28681	11,550.68	0.00135 14365	5,775.38	0.00270 28779	11,550.83
0 40	0.00277 21722	11,550.68	0.00138 60888	5,775.37	0.00277 21829	11,550.82
41	0.00284 14763	11,550.68	0.00142 07410	5,775.38	0.00284 14878	11,550.83
42	0.00291 07804	11,550.68	0.00145 53933	5,775.38	0.00291 07928	11,550.83
43	0.00298 00845	11,550.68	0.00149 00456	5,775.37	0.00298 00978	11,550.83
44	0.00304 93886	11,550.68	0.00152 46978	5,775.38	0.00304 94028	11,550.83
0 45	0.00311 86927	11,550.67	0.00155 93501	5,775.38	0.00311 87078	11,550.85
46	0.00318 79967	11,550.67	0.00159 40024	5,775.38	0.00318 80129	11,550.85
47	0.00325 73007	11,550.68	0.00162 86547	5,775.38	0.00325 73180	11,550.87
48	0.00332 66048	11,550.67	0.00166 33070	5,775.38	0.00332 66232	11,550.87
49	0.00339 59088	11,550.67	0.00169 79593	5,775.38	0.00339 59284	11,550.87
0 50	0.00346 52128	11,550.65	0.00173 26116	5,775.38	0.00346 52336	11,550.87
51	0.00353 45167	11,550.67	0.00176 72639	5,775.38	0.00353 45388	11,550.88
52	0.00360 38207	11,550.65	0.00180 19162	5,775.38	0.00360 38441	11,550.88
53	0.00367 31246	11,550.65	0.00183 65685	5,775.38	0.00367 31494	11,550.88
54	0.00374 24285	11,550.65	0.00187 12208	5,775.38	0.00374 24547	11,550.90
0 55	0.00381 17324	11,550.65	0.00190 58731	5,775.40	0.00381 17601	11,550.90
56	0.00388 10363	11,550.65	0.00194 05255	5,775.38	0.00388 10655	11,550.92
57	0.00395 03402	11,550.63	0.00197 51778	5,775.38	0.00395 03710	11,550.92
58	0.00401 96440	11,550.63	0.00200 98301	5,775.40	0.00401 96765	11,550.92
59	0.00408 89478	11,550.63	0.00204 44825	5,775.38	0.00408 89820	11,550.93
1 00	0.00415 82516		0.00207 91348		0.00415 82876	

$\lambda_0 = 89°00'\text{W.}$

$\text{Sin } \phi_0 = .23825\ 09560$

$\Delta\lambda$	Sin θ	$\Delta 1'' \times 10^{10}$	Tan $\frac{\theta}{2}$	$\Delta 1'' \times 10^{10}$	Tan θ	$\Delta 1'' \times 10^{10}$
1°00′	0.00415 82516	11,550.63	0.00207 91348	5,775.40	0.00415 82876	11,550.93
01	0.00422 75554	11,550.63	0.00211 37872	5,775.38	0.00422 75932	11,550.95
02	0.00429 68592	11,550.62	0.00214 84395	5,775.40	0.00429 68989	11,550.95
03	0.00436 61629	11,550.63	0.00218 30919	5,775.38	0.00436 62046	11,550.95
04	0.00443 54667	11,550.62	0.00221 77442	5,775.40	0.00443 55103	11,550.97
1 05	0.00450 47704	11,550.60	0.00225 23966	5,775.40	0.00450 48161	11,550.97
06	0.00457 40740	11,550.62	0.00228 70490	5,775.40	0.00457 41219	11,550.98
07	0.00464 33777	11,550.60	0.00232 17014	5,775.40	0.00464 34278	11,550.98
08	0.00471 26813	11,550.60	0.00235 63538	5,775.38	0.00471 27337	11,550.98
09	0.00478 19849	11,550.60	0.00239 10061	5,775.40	0.00478 20396	11,551.00
1 10	0.00485 12885	11,550.60	0.00242 56585	5,775.40	0.00485 13456	11,551.02
11	0.00492 05921	11,550.58	0.00246 03109	5,775.42	0.00492 06517	11,551.02
12	0.00498 98956	11,550.60	0.00249 49634	5,775.40	0.00498 99578	11,551.02
13	0.00505 91992	11,550.58	0.00252 96158	5,775.40	0.00505 92639	11,551.03
14	0.00512 85027	11,550.57	0.00256 42682	5,775.40	0.00512 85701	11,551.03
1 15	0.00519 78061	11,550.58	0.00259 89206	5,775.42	0.00519 78763	11,551.05
16	0.00526 71096	11,550.57	0.00263 35731	5,775.40	0.00526 71826	11,551.07
17	0.00533 64130	11,550.57	0.00266 82255	5,775.40	0.00533 64890	11,551.07
18	0.00540 57164	11,550.57	0.00270 28779	5,775.42	0.00540 57954	11,551.07
19	0.00547 50198	11,550.55	0.00273 75304	5,775.42	0.00547 51018	11,551.08
1 20	0.00554 43231	11,550.55	0.00277 21829	5,775.40	0.00554 44083	11,551.10
21	0.00561 36264	11,550.55	0.00280 68353	5,775.42	0.00561 37149	11,551.10
22	0.00568 29297	11,550.55	0.00284 14878	5,775.42	0.00568 30215	11,551.10
23	0.00575 22330	11,550.53	0.00287 61403	5,775.42	0.00575 23281	11,551.12
24	0.00582 15362	11,550.53	0.00291 07928	5,775.42	0.00582 16348	11,551.13
1 25	0.00589 08394	11,550.53	0.00294 54453	5,775.42	0.00589 09416	11,551.13
26	0.00596 01426	11,550.52	0.00298 00978	5,775.42	0.00596 02484	11,551.15
27	0.00602 94457	11,550.52	0.00301 47503	5,775.42	0.00602 95553	11,551.17
28	0.00609 87488	11,550.52	0.00304 94028	5,775.42	0.00609 88623	11,551.17
29	0.00616 80519	11,550.52	0.00308 40553	5,775.42	0.00616 81693	11,551.17
1 30	0.00623 73550	11,550.50	0.00311 87078	5,775.43	0.00623 74763	11,551.20
31	0.00630 66580	11,550.50	0.00315 33604	5,775.42	0.00630 67835	11,551.18
32	0.00637 59610	11,550.50	0.00318 80129	5,775.43	0.00637 60906	11,551.22
33	0.00644 52640	11,550.48	0.00322 26655	5,775.42	0.00644 53979	11,551.22
34	0.00651 45669	11,550.48	0.00325 73180	5,775.43	0.00651 47052	11,551.22
1 35	0.00658 38698		0.00329 19706		0.00658 40125	

$\lambda_0 = 89°00'\text{W}.$ $\quad$ Sin $\phi_0 = .23825\ 09560$

ϕ	Log R	$\Delta 1'' \times 10^8$	Log k
13°00′	7.41648 821	51.15	0.00002 60
01	7.41645 752	51.17	0.00002 43
02	7.41642 682	51.17	0.00002 26
03	7.41639 612	51.15	0.00002 10
04	7.41636 543	51.18	0.00001 94
13 05	7.41633 472	51.17	0.00001 79
06	7.41630 402	51.17	0.00001 63
07	7.41627 332	51.18	0.00001 49
08	7.41624 261	51.18	0.00001 34
09	7.41621 190	51.18	0.00001 20
13 10	7.41618 119	51.20	0.00001 07
11	7.41615 047	51.18	0.00000 93
12	7.41611 976	51.20	0.00000 80
13	7.41608 904	51.20	0.00000 68
14	7.41605 832	51.20	0.00000 56
13 15	7.41602 760	51.22	0.00000 44
16	7.41599 687	51.20	0.00000 32
17	7.41596 615	51.22	0.00000 21
18	7.41593 542	51.22	0.00000 10
19	7.41590 469	51.23	0.00000 00
13 20	7.41587 395	51.22	9.99999 90
21	7.41584 322	51.23	9.99999 80
22	7.41581 248	51.23	9.99999 71
23	7.41578 174	51.23	9.99999 62
24	7.41575 100	51.23	9.99999 53
13 25	7.41572 026	51.25	9.99999 45
26	7.41568 951	51.25	9.99999 37
27	7.41565 876	51.25	9.99999 30
28	7.41562 801	51.25	9.99999 23
29	7.41559 726	51.25	9.99999 16
13 30	7.41556 651	51.27	9.99999 10
31	7.41553 575	51.27	9.99999 04
32	7.41550 499	51.27	9.99998 98
33	7.41547 423	51.27	9.99998 93
34	7.41544 347	51.28	9.99998 88
13 35	7.41541 270	51.28	9.99998 83
36	7.41538 193	51.28	9.99998 79
37	7.41535 116	51.28	9.99998 75
38	7.41532 039	51.28	9.99998 72
39	7.41528 962	51.30	9.99998 69
13 40	7.41525 884	51.30	9.99998 66
41	7.41522 806	51.30	9.99998 63
42	7.41519 728	51.30	9.99998 61
43	7.41516 650	51.32	9.99998 60
44	7.41513 571	51.30	9.99998 58
13 45	7.41510 493	51.32	9.99998 58
46	7.41507 414	51.33	9.99998 57
47	7.41504 334	51.32	9.99998 57
48	7.41501 255	51.33	9.99998 57
49	7.41498 175	51.32	9.99998 58
13 50	7.41495 096	51.35	9.99998 58
51	7.41492 015	51.33	9.99998 60
52	7.41488 935	51.33	9.99998 61
53	7.41485 855	51.35	9.99998 63
54	7.41482 774	51.35	9.99998 66
13 55	7.41479 693	51.35	9.99998 69
56	7.41476 612	51.37	9.99998 72
57	7.41473 530	51.35	9.99998 75
58	7.41470 449	51.37	9.99998 79
13 59	7.41467 367	51.37	9.99998 83

ϕ	Log R	$\Delta 1'' \times 10^8$	Log k
14°00′	7.41464 285	51.38	9.99998 88
01	7.41461 202	51.37	9.99998 93
02	7.41458 120	51.38	9.99998 98
03	7.41455 037	51.38	9.99999 04
04	7.41451 954	51.38	9.99999 10
14 05	7.41448 871	51.40	9.99999 16
06	7.41445 787	51.38	9.99999 23
07	7.41442 704	51.40	9.99999 30
08	7.41439 620	51.42	9.99999 37
09	7.41436 535	51.40	9.99999 45
14 10	7.41433 451	51.42	9.99999 53
11	7.41430 366	51.40	9.99999 62
12	7.41427 282	51.42	9.99999 71
13	7.41424 197	51.43	9.99999 80
14	7.41421 111	51.42	9.99999 90
14 15	7.41418 026	51.43	0.00000 00
16	7.41414 940	51.43	0.00000 11
17	7.41411 854	51.43	0.00000 21
18	7.41408 768	51.45	0.00000 32
19	7.41405 681	51.43	0.00000 44
14 20	7.41402 595	51.45	0.00000 56
21	7.41399 508	51.47	0.00000 68
22	7.41396 420	51.45	0.00000 81
23	7.41393 333	51.47	0.00000 94
24	7.41390 245	51.45	0.00001 07
14 25	7.41387 158	51.47	0.00001 21
26	7.41384 070	51.48	0.00001 35
27	7.41380 981	51.47	0.00001 49
28	7.41377 893	51.48	0.00001 64
29	7.41374 804	51.48	0.00001 79
14 30	7.41371 715	51.48	0.00001 95
31	7.41368 626	51.50	0.00002 11
32	7.41365 536	51.50	0.00002 27
33	7.41362 446	51.50	0.00002 44
34	7.41359 356	51.50	0.00002 61
14 35	7.41356 266	51.50	0.00002 78
36	7.41353 176	51.52	0.00002 96
37	7.41350 085	51.52	0.00003 14
38	7.41346 994	51.52	0.00003 32
39	7.41343 903	51.52	0.00003 51
14 40	7.41340 812		0.00003 70