

Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática



“Compactificación de Poincaré de Campos Vectoriales Polinomiales”.

Trabajo de Graduación Presentado por:
Pedro Julio Avelar Hernández AH18049

Para Optar al Grado de:
Licenciado en Matemática

Ciudad Universitaria, 28 de marzo de 2025

Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática



“Compactificación de Poincaré de Campos Vectoriales Polinomiales”.

Trabajo de Graduación Presentado por:
Pedro Julio Avelar Hernández AH18049

Para Optar al Grado de:
Licenciado en Matemática

Docente asesor:

Dr. Dimas Noé Tejada Tejada

Asesor externo:

Dr. Francisco Braun

Ciudad Universitaria, 28 de marzo de 2025

Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática



“Compactificación de Poincaré de Campos Vectoriales Polinomiales”.

Trabajo de Graduación Presentado por:
Pedro Julio Avelar Hernández AH18049

Para Optar al Grado de:
Licenciado en Matemática

TRIBUNAL CALIFICADOR:

Jurado Interno:

Dr. Dimas Noé Tejada Tejada

M. Sc. Martín Enrique Guerra Cáceres

Jurado Externo:

Dr. Alex Carlucci Rezende

Ciudad Universitaria, 28 de marzo de 2025

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR

M.Sc. Juan Rosa Quintanilla Quintanilla

VICERRECTORA ACADÉMICA

Dra. Evelyn Beatriz Farfán Mata

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

M.Sc. Roger Armando Arias Alvarado

SECRETARIO GENERAL

Lic. Pedro Rosalío Escobar Castaneda

FISCAL

Lic. Carlos Amílcar Serrano Rivera

**AUTORIDADES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
MATEMÁTICA**

DECANO

Dr. Luis Gilberto Parada Gómez

VICE DECANO

Dr. José Nerys Funes Torres

SECRETARIA

M.Sc. Angela Gudelia Portillo Zelaya

DIRECTOR ESCUELA DE MATEMÁTICA

Dr. Dimas Noé Tejada Tejada

Ciudad Universitaria, 28 de marzo de 2025

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	7
1.1. Existencia y unicidad de las soluciones	7
1.1.1. Conceptos previos	7
1.1.2. El problema de Cauchy	8
1.2. Teoremas de Picard y de Peano	11
1.2.1. Teorema de Picard	12
1.2.2. Teorema de Peano	13
1.3. Soluciones máximas	14
1.4. Dependencia de las soluciones con relación a las condiciones iniciales y parámetros	14
1.4.1. Continuidad	15
1.5. Campos vectoriales y flujo	17
1.6. Diagrama de fases entorno a un punto regular	21
1.6.1. Clasificación de las singularidades de un sistema	22
1.6.2. Diagrama de fases entorno a una singularidad	24
1.6.3. Elementos esenciales de un diagrama de fases	25
1.7. Clasificación de las singularidades hiperbólicas	27
1.7.1. Teorema de las singularidades no degeneradas	28
2. Compactificación de Poincaré	33
2.1. Construcción de la compactificación	33
2.2. Retrato de fase en el disco de Poincaré	37
2.3. Ejemplos	38

Un alumno le preguntó a Euclides en cuanto éste comenzó a desarrollar el primer teorema: “¿Para qué me servirá esto?”. Euclides llamó a su esclavo y le dijo: “Dale medio dracma, porque necesita ver el beneficio material de todo lo que aprende.”

-Estobeo, Antología

Agradecimientos

A mi asesor el Dr. Dimas Tejada por alentarme a continuar explorando en esta área de las ecuaciones diferenciales, apoyarme y guiarme en este trabajo, al Dr. Francisco Braun por tener la gentileza y amabilidad de guiarme y por todo el tiempo dedicado para hacer posible este trabajo.

A mi familia, amigos, y todas las personas que me apoyaron de una u otra manera.

Introducción

La **Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales** es una rama fundamental de las matemáticas que se enfoca en el estudio del comportamiento de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales sin necesidad de resolverlos explícitamente. Este enfoque cualitativo es particularmente útil cuando las ecuaciones son difíciles o incluso imposibles de resolver mediante métodos analíticos. A través de esta teoría, es posible analizar las soluciones globales, su estabilidad, y comportamiento asintótico, lo que esencialmente se da en modelos de fenómenos naturales y sistemas dinámicos.

El origen de las ecuaciones diferenciales se remonta al siglo XVII, cuando se plantea como una herramienta para resolver problemas físicos, como el movimiento de partículas y la forma de una cuerda colgante (catenaria). Desde entonces, han evolucionado hasta convertirse en una rama independiente de las matemáticas, gracias a las contribuciones de grandes matemáticos como **Leibniz**, **Bernoulli**, **Euler**, **Lagrange** y **Laplace**. Estos pioneros sentaron las bases para el desarrollo de métodos analíticos y numéricos que permitieron resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, con coeficientes constantes.

En el siglo XIX, la teoría dio un salto cualitativo con los trabajos de **Cauchy**, donde se demostró la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales, y **Picard**, se introdujo métodos iterativos. Sin embargo, fue **Henri Poincaré** quien impulsó la teoría cualitativa al estudiar la estabilidad de las órbitas planetarias y clasificar los puntos singulares en sistemas dinámicos, como focos, puntos silla, nodos y centros. Estas contribuciones sentaron las bases para el estudio moderno de los sistemas dinámicos y su aplicación en diversas áreas científicas.

En el siglo XX, la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales tuvo aplicaciones en campos tan diversos como la **astronomía**, la **física**, la **biología** y la **medicina**. Modelos clásicos como el sistema depredador-presa de **Lotka-Volterra** y la ecuación de **Van der Pol** para osciladores no lineales son ejemplos emblemáticos de esta teoría. Además, en el ámbito de la medicina, modelos epidemiológicos como el modelo **SIR** (Susceptibles, Infectados, Recuperados) han sido fundamentales para entender la propagación de enfermedades.

En este trabajo, nos centramos en los conceptos clave de la teoría cualitativa, como lo son los campos vectoriales, flujo, y la clasificación de puntos singulares dando atención especial al plano \mathbb{R}^2 . Además, exploraremos la compactificación de Poincaré, una técnica que permite la descripción global del diagrama fase de un sistema planar polinomial en un disco (llamado disco de **Poincaré**), facilitando el estudio del comportamiento de las soluciones en el infinito. Esta herramienta se puede aplicar a problemas concretos en biología, física y medicina, que se

traducen en su utilidad en el modelado de fenómenos reales.

El trabajo se estructura en dos partes principales. En el **Capítulo 1**, se presenta los preliminares matemáticos, especialmente para campos de vectores planares, existencia y unicidad, soluciones máximas, y teoremas básicos sobre retratos de fase local. En el **Capítulo 2**, se profundiza en la **compactificación de Poincaré** de campos vectoriales polinomiales planares, tanto desde un enfoque geométrico como analítico, y se ilustra su aplicación a través de ejemplos concretos.

Capítulo 1

Preliminares

Para el desarrollo de los conceptos e ideas de topología de este capítulo se pueden considerar como bibliografía [8] y [9].

1.1. Existencia y unicidad de las soluciones

1.1.1. Conceptos previos

Sea Ω un subconjunto del espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ donde \mathbb{R} es la recta real y $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ un espacio euclidiano n -dimensional. Un punto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ será denotado por (t, x) , $t \in \mathbb{R}$ y $x = (x_1, \dots, x_n)$ en \mathbb{E} ; salvo se mencione lo contrario, adoptaremos en $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ la norma: $|(t, x)| = \max\{|t|, |x|\}$ donde $|x|$ denota una norma en \mathbb{E} , por ejemplo $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $|x| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ o $|x| = |x_1| + \dots + |x_n|$.

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ una aplicación continua y sea I un intervalo no degenerado de la recta, es decir un subconjunto conexo que no se reduce a un punto. Un intervalo I puede ser abierto, cerrado semicerrado, finito o infinito.

Definición 1.1.1. Una función diferenciable $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$ se llama solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.1}$$

en el intervalo I si:

- a) El gráfico de φ en I está contenido en Ω y
- b) $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)), \forall t \in I$.

Si t es un punto extremo del intervalo, la derivada es la derivada lateral respectiva.

La ecuación (1.1) es llamada **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** y es denotada por

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

La ecuación vectorial (1.1) es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales escalares

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1')$$

1.1.2. El problema de Cauchy

En esta sección estudiaremos el problema de valor inicial (**PVI**) también llamado **problema de Cauchy**. Comenzaremos introduciendo dos ejemplos.

Ejemplos:

- Sean $\Omega = I \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = g(t)$, donde g es una función continua en el intervalo I ; φ es una solución de $x' = g(t)$ en I si y solamente si $\varphi_c(t) = c + \int_{t_0}^t g(s)ds$ donde $t_0 \in I$ y c es una constante.

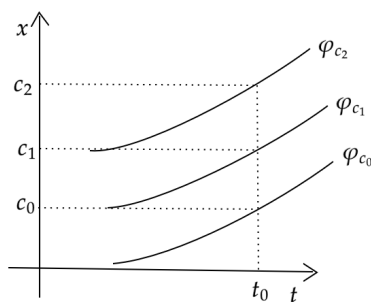


Figura 1.1: Gráfica de las soluciones de $x' = g(t)$

Véase la Figura 1.1 para la gráfica de φ_c del primer ejemplo, para diferentes $c \in \mathbb{R}$.

- Definamos $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$, $\forall c \in \mathbb{R}$. La función $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} (t - c)^3, & t \geq c, \\ 0, & t \leq c, \end{cases}$$

es una solución de la ecuación $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$ en $I = \mathbb{R}$ como se ve de la verificación directa de **a)** y **b)** de la **Definición 1.1.1**. Además, la función constante $\varphi = 0$ también es solución de esta ecuación.

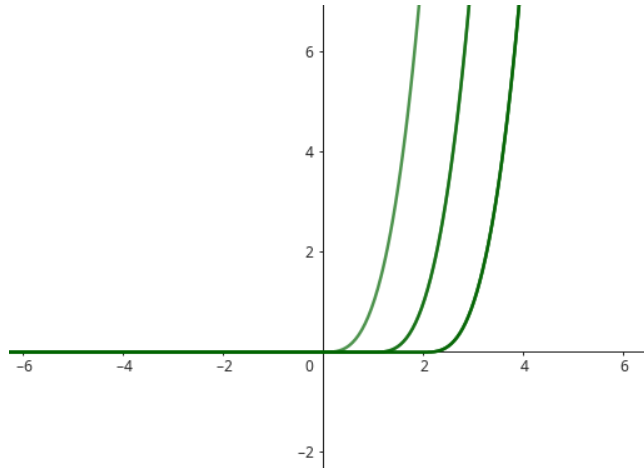


Figura 1.2: Gráfica de φ_c para $c = 0, 1$ y 2

Véase la Figura 1.2 para la gráfica de φ_c del segundo ejemplo, para diferentes $c \in \mathbb{R}$.

En el primer ejemplo la solución que pasa por (x_0, t_0) es única, mientras que el segundo ejemplo muestra que una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones. A continuación veremos condiciones para existencia y unicidad de soluciones.

Definición 1.1.2. El problema de valor inicial (**PVI**) o **problema de Cauchy** consiste en encontrar una solución que satisfaga una ecuación diferencial junto con una condición inicial, es decir, una solución del sistema

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

Observación 1. La ecuación (1.2) es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (1.3)$$

y admite la siguiente interpretación geométrica. La función f define en Ω un campo de direcciones, es decir, asocia a cada punto (t, x) una recta:

$$l(t, x) = \xi - x = f(t, x)(\tau - t),$$

de “inclinación” $f(t, x)$ que pasa por (t, x) . Esta interpretación se puede ver en la Figura 1.3.

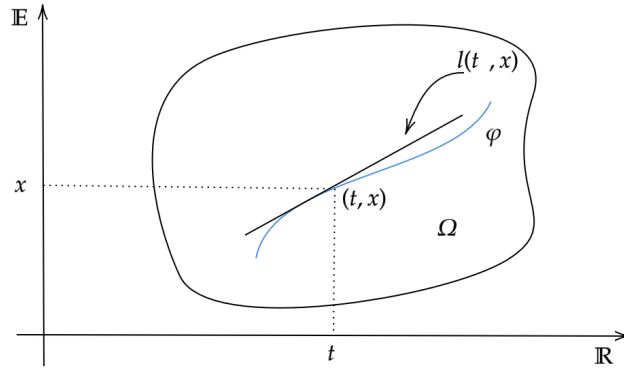


Figura 1.3: Interpretación geométrica de la solución φ de la ecuación (1.2) y su recta tangente

Ejemplos:

Ejemplo 1. Sea $\Omega = \mathbb{R} \times (a_1, a_2)$ y $f(t, x) = f(x)$, donde f es continua y no se anula en (a_1, a_2) . Dados $x_0 \in (a_1, a_2)$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ calculamos una solución para el **PVI** siguiente:

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.4)$$

Si φ es solución de la ecuación (1.4) entonces

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \quad \text{y} \quad \varphi(t_0) = x_0 \quad (1.5)$$

de donde se sigue que

$$\frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = 1. \quad (1.6)$$

Si $F : (a_1, a_2) \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

se verifica que $F'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$ en (a_1, a_2) probando que F es invertible y aplica (a_1, a_2) en un intervalo (b_1, b_2) donde F^{-1} está definida.

De la ecuación (1.6) resulta

$$1 = \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

o sea

$$(F \circ \varphi)'(t) = 1.$$

Integrando ambos lados de t_0 a t obtenemos

$$F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0)) = t - t_0$$

y como $F(\varphi(t_0)) = 0$ entonces

$$F(\varphi(t)) = t - t_0.$$

Luego la solución de la ecuación (1.4) está dada por

$$\varphi(t) = F^{-1}(t - t_0), \quad t \in (t_0 + b_1, t_0 + b_2),$$

y es fácil ver que esta es la única solución.

Ejemplo 2. Consideremos ahora el siguiente **PVI**

$$\begin{cases} x' = \alpha(t)x - \beta(t)y + \delta(t) \\ y' = \beta(t)x + \alpha(t)y + \eta(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

donde α, β, δ y η son funciones continuas en un intervalo (t_1, t_2) que contiene el punto t_0 .

Sean $z = x + iy$, $a(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ y $b(t) = \delta(t) + i\eta(t)$. Vemos que la ecuación (1.7) se reduce a

$$z' = a(t)z + b(t), \quad z(t_0) = z_0, \quad (1.8)$$

cuya única solución para $t \in (t_1, t_2)$ viene dada por

$$\varphi(t) = \gamma(t) \exp \left[\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right],$$

donde

$$\gamma(t) = z_0 + \int_{t_0}^t b(s) \exp \left[- \int_{t_0}^s a(\tau) d(\tau) \right] ds.$$

1.2. Teoremas de Picard y de Peano

Definición 1.2.1. Se dice que f es lipschitziana en la segunda variable si existe $K > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

Lema 1.2.1 (Lema de contracción.). Sea (X, d) un espacio métrico completo y $F : X \rightarrow X$ una contracción, es decir que cumple $d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$, $0 \leq K < 1$. Existe un único punto fijo p , para F , es decir, $F(p) = p$. Además p es un atractor de F , lo que significa que $F^n(x) \rightarrow p$, cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$. Aquí, $F^n(x)$ se define como $F(F^{n-1}(x))$.

Corolario 1.2.1. Sea X un espacio métrico completo. Si $F : X \rightarrow X$ es continua y, para algún m , F^m es una contracción, entonces existe un único punto p fijo por F . Además, p es un atractor de F .

Las demostraciones del lema y del corolario anterior se encuentran en [1, pág. 12 y 13].

1.2.1. Teorema de Picard

Sea f continua y lipschitziana en $\Omega = I_a \times B_b$ donde $I_a = \{t : |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x : |x - x_0| \leq b\}$. Si $|f| \leq M$ en Ω , existe una y única solución de

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

en I_α , donde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Observación 2. El resultado se sigue cumpliendo si en lugar de considerar f continua y lipschitziana consideramos $f \in C^1$.

Demostración. Sea $X = C(I_\alpha, B_b)$ el espacio métrico completo de las funciones continuas $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$ con la métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Para $\varphi \in X$, sea $F(\varphi) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{E}$ definida por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, t \in I_\alpha.$$

La aplicación F cumple las siguientes propiedades:

1. $F(X) \subseteq X$
2. F^n es una contracción, para n suficientemente grande.

En efecto, $\forall t \in I_\alpha$,

$$|F(\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M\alpha \leq b,$$

esto prueba la propiedad **1**. En cuanto a la propiedad **2**., $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in X$ y $\forall n \geq 0$ se cumple

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), t \in I_\alpha,$$

donde K es la constante de Lipschitz de f . Verificamos esta desigualdad haciendo inducción sobre n . Para $n = 0$ es obvia, supongamos que es válida para k . Entonces,

$$\begin{aligned} & \left| F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t) \right| = \left| F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t) \right| \leq \\ & \left| \int_{t_0}^t \left| f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s)) \right| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t K \left| F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s) \right| ds \right| \leq \\ & K \left| \int_{t_0}^t \frac{K^k (t_0 - s)^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| = \frac{K^{k+1} |t - t_0|^{k+1} d(\varphi_1, \varphi_2)}{(k+1)!} \end{aligned}$$

por lo tanto $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$, para n grande, $\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$, pues este es el término general de una serie cuya suma es $e^{K\alpha}$, por lo que F^n es una contracción de X . Por el **Corolario 1.2.1**, existe una única φ tal que $F(\varphi) = \varphi$ \square

1.2.2. Teorema de Peano

Proposición 1.2.1 (Teorema de Arzelá). Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea F una familia equicontinua de funciones $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ para toda $\varphi \in F$. Si F es uniformemente acotada (es decir, existe $M > 0$ tal que $|\varphi| < M$ para toda $\varphi \in F$), entonces toda sucesión $\{\varphi_n\}$ de elementos de F tiene una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}$ uniformemente convergente en X .

Demostración. Ver [8, pág. 244]. □

Proposición 1.2.2 (Teorema de Aproximación de Weierstrass). Dada una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, existe una sucesión de polinomios p_n tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f \text{ uniformemente en } [a, b].$$

Demostración. Ver [8, pág. 248]. □

Teorema 1.2.1. Sea f continua en $\Omega = I_a \times B_b$ como en el Teorema de Picard. Si $|f| < M$ en Ω , la ecuación (1.2) tiene por lo menos una solución en I_α , donde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Demostración. Por el **Teorema de Aproximación de Weierstrass**, existe una sucesión f_n de funciones, cuyas componentes son polinomios, que converge a f , uniformemente en Ω . Para n grande, f_n satisface las hipótesis del Teorema de Picard. Sea φ_n solución de $x' = f_n(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ en I_α , cuya existencia y unicidad se derivan del Teorema de Picard. La familia $\{\varphi_n\}$ es equicontinua y uniformemente limitada, pues:

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(t')| = \left| \int_t^{t'} f_n(s, \varphi_n(s)) ds \right| \leq M |t - t'|$$

y $|\varphi_n - x_0| \leq b, \forall n$ suficientemente grande. Por el **Teorema de Arzelá** existe una subsucesión, que denotaremos también por φ_n , tal que φ_n converge uniformemente en I_α para una función φ . Probaremos que φ es solución de la ecuación (1.2). Aplicando la desigualdad triangular a $f_n(s, \varphi_n(s))$, $f(s, \varphi_n(s))$ y $f(s, \varphi(s))$ resulta que $f_n(s, \varphi_n(s))$ converge uniformemente en I_α para $f(s, \varphi(s))$:

$$\begin{aligned} |f_n(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s))| &\leq |f_n(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_n(s))| + |f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s))| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto tomando $n \rightarrow \infty$ en ambos miembros de $\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_n(s, \varphi_n(s)) ds$, tendremos, $\forall t \in I_\alpha$ $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$. □

Corolario 1.2.2. Sea Ω abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ continua. Si $C \subseteq \Omega$ es un conjunto tal que $|f| < M$ en Ω_0 , donde $\Omega \supseteq \Omega_0 \supseteq C$ con $\text{dist}(C, \Omega - \Omega_0) > 0$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que, para todo punto, $(t_0, x_0) \in C$, existe una solución de: $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ en $I_\alpha(t_0) = \{t : |t - t_0| \leq \alpha\}$.

Demostración. Sea $0 < a < \text{dist}(C, \Omega - \Omega_0)$. Tomar $\alpha = \min\{a, \frac{a}{M}\}$ y aplicar el teorema anterior a $I_\alpha(t_0) \times B_a(x_0) \subseteq \Omega_0$. □

Observación 3. Si C es compacto contenido dentro de otro compacto Ω_0 , la hipótesis de este corolario se cumple para $M > \sup |f|$ en Ω_0 .

1.3. Soluciones máximas

Proposición 1.3.1. Sea f continua en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{E}$. Supongamos que $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ existe una única solución de $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ definida en un intervalo abierto $I = I(t_0, x_0)$. Entonces, $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ existe una única solución $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$ de $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$, definida en un intervalo $M(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$ con la propiedad de que toda solución ψ de $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$, en un intervalo I satisface $I \subseteq M(t_0, x_0)$ y $\psi = \varphi/I$.

Demostración. Es suficiente tomar $M(t_0, x_0) = \cup I_\psi$ donde I_ψ es el intervalo de definición de alguna solución ψ de $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$. Si $t \in I_\psi$ definimos $\varphi(t) = \psi(t)$. Esta definición no depende de la ψ usada. En efecto, el conjunto $C = \{t \in I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2} : \psi_1 = \psi_2\}$ es cerrado, abierto y no vacío en $I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$. Como este último conjunto es conexo, se sigue que $C = I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$. El conjunto C es cerrado pues es igual al conjunto $(\psi_1 - \psi_2)^{-1}\{0\}$; C es abierto porque para todo punto t' lo contiene $I(t', \psi_1(t')) \cap C$. \square

Definición 1.3.1. Se le llama solución máxima de

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.9)$$

a toda solución φ definida en un intervalo I , denominado **intervalo máximo** de φ , tal que si ψ es otra solución sobre un intervalo J con $J \supseteq I$ y $\varphi = \psi/I$, entonces $I = J$.

Teorema 1.3.1. Sea f continua en un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$. Si φ es una solución máxima única de la ecuación (1.9) definida en (ω_-, ω_+) , entonces la aplicación $g(t) = (t, \varphi(t))$ tiende a $\partial\Omega$ cuando $t \rightarrow \omega_\pm$, es decir, para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe una vecindad V de ω_\pm tal que $g(t) \notin K$ para $t \in V$.

Demostración. Supongamos que para algun compacto $K \subseteq \Omega$ exista una sucesión $t_n \rightarrow \omega_+$ tal que $g(t_n) \in K$. Sea t'_n una subsucesión de t_n tal que $g(t'_n)$ es convergente. Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t'_n) \in (\omega_+, x_0) \in K$.

Para $(t_0, x_0) = (\omega_+, x_0)$, sea $V = I_\alpha \times B_b$ una vecindad dada por el **Teorema de Peano** donde $\alpha = \frac{b}{M}$ y $M > |f|$ en V .

Sea $V_1 = I_{\frac{\alpha}{3}}(t_0) \times B_{\frac{b}{3}}(x_0)$. $\forall (t_1, x_1) \in V_1$ existe una solución definida en $I_{\alpha_1}(t_1)$, con $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$.

En efecto, aplicando el **Teorema de Peano** al punto (t_1, x_1) de vecindario $\hat{V} = I_{\alpha_1}(t_1) \times B_{b_1}(x_1)$, $b_1 = \frac{\alpha M}{2}$, contenida en V , encontramos una solución de la ecuación (1.9) pasando por (t_1, x_1) definida $\forall t \in I_{\alpha_1}(t_1)$. Tomando $t_1 = t'_n$ con n suficientemente grande de modo que $g(t'_n) \in V_1$ tenemos que φ puede ser prolongada hasta $t'_n + \frac{\alpha}{2} > t_0 = \omega_+$, una contradicción. Análogamente se procede para ω_- . \square

1.4. Dependencia de las soluciones con relación a las condiciones iniciales y parámetros

Supongamos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ es continua en un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, donde $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ es el espacio euclidiano de dimensión n , y que a través de cada punto $(t_0, x_0) \in \Omega$ pasa una única solución $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$ de

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0, \quad (1.10)$$

definida sobre su intervalo máximo $I(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$. Mostraremos que, con estas condiciones, la función φ depende continuamente y también diferenciablemente de las variables (t, t_0, x_0) .

Estudiaremos también la dependencia en relación a las variables (t, t_0, x_0, λ) , de las soluciones de una familia de ecuaciones del siguiente tipo

$$x' = f(t, x, \lambda), x(t_0) = x_0, \quad (1.11)$$

dependiente de un parámetro λ en un espacio euclidiano Λ tal que, para cada λ fijo, la ecuación (1.11) posee una única solución $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ definida sobre su intervalo máximo $I(t_0, x_0, \lambda) = (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$. En este caso, f está definida en un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda$.

Observación 4. Las cuestiones de dependencia en relación a (t, t_0, x_0, λ) a las soluciones de la ecuación (1.11) pueden ser reducidas a cuestiones de soluciones de la ecuación (1.10), sin parámetros adicionales.

1.4.1. Continuidad

Teorema 1.4.1. Sea f continua en el conjunto Ω abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda$. Para cada $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$ supongamos que el problema de valores iniciales, con λ fijo, la ecuación (1.11), tiene una única solución $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ definida en su intervalo máximo $I(t_0, x_0, \lambda) = (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$.

Entonces

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, t \in (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))\}$$

es abierto en $\mathbb{R} \times \Omega$ y φ es continua en D .

Las siguientes proposiciones facilitarán la demostración del teorema.

Lema 1.4.1. Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión equicontinua y uniformemente limitada de funciones reales y continuas en un espacio métrico compacto X . Supongamos que toda subsucesión uniformemente convergente de esta sucesión tiene el mismo límite φ . Entonces $\{\varphi_n\}$ es uniformemente convergente para φ .

Demostración. Supongamos que $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente para φ . Entonces existe $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{\varphi_{n'}\}$ tal que $|\varphi_{n'}(t_{n'}) - \varphi(t_{n'})| \geq \epsilon$ para alguna sucesión $\{t_{n'}\}$ en X . La sucesión $\{\varphi_{n'}\}$ también es equicontinua y uniformemente limitada. El **Teorema de Arzelá** y la hipótesis implican que $\{\varphi_{n'}\}$ tiene una subsucesión $\{\varphi_{n''}\}$ uniformemente convergente para φ . Contradictorio, pues $|\varphi_{n''}(t_{n''}) - \varphi(t_{n''})| \geq \epsilon$, para todo n'' . \square

Proposición 1.4.1. Sea $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{E}, n = 0, 1, \dots$ una sucesión de funciones continuas en el abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ tal que f_n converge para f_0 , uniformemente en cada parte compacta de Ω . Sea (t_n, x_n) una sucesión de puntos de Ω que converge para (t_0, x_0) . Supongamos que

$$x' = f_n(t, x), x(t_n) = x_n, n = 0, 1, \dots,$$

tiene una única solución máxima φ_n en su intervalo máximo $I_n = (\omega_-(n), \omega_+(n))$. Sea $[a, b] \subset I_0 = (\omega_-(0), \omega_+(0))$. Entonces existe $n_0 = n_0(a, b)$ tal que para $n > n_0$, $I_n \supset [a, b]$ y $\varphi_n|_{[a, b]} \rightarrow \varphi_0|_{[a, b]}$ uniformemente.

Demostración. Sean C un compacto que contiene el gráfico de φ_0 en $[a, b]$ en su interior. $\Omega_0 \subset \Omega$ otro compacto que contiene C en su interior. Existe n_1 tal que si $n > n_1$, $|f_n| < M$ en Ω_0 . Por la Observación 3, existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $(t^1, x^1) \in C$,

$$x' = f_n(t, x), x(t^1) = x^1, n > n_1$$

tiene una única solución definida en $|t - t^1| \leq \alpha$, cuyo gráfico está contenido en Ω_0 .

Sea $\epsilon = \frac{\alpha}{3}$. Existe $n_2 > n_1$ tal que si $n > n_2$, $(t_n, x_n) \in C$ y $|t_n - t_0| < \epsilon$ y, por tanto, φ_n , $n > n_2$, está definida en $|t - t_0| \leq \epsilon$ porque, en estas condiciones, $|t_n - t| \leq \alpha = 3\epsilon$ contiene $|t - t_0| \leq \epsilon$.

La familia $F = \{\varphi_n \mid |t - t_0| \leq \epsilon, n \geq n_2\}$ es una sucesión que satisface las hipótesis del **Lema 1.4.1**.

- a) Es uniformemente limitada y equicontinua porque el gráfico de φ_n está en el compacto Ω_0 , donde

$$|\varphi_n'(t)| = |f_n(t, \varphi_n(t))| < M.$$

- b) Toda subsucesión $\varphi_{n'}$, uniformemente convergente en $|t - t_0| \leq \epsilon$ converge para φ_0 . Es suficiente probar que $\varphi = \lim \varphi_{n'}$ es solución de $x' = f_0(t, x), x(t_0) = x_0$. En efecto

$$\varphi_{n'}(t) = x_{n'} + \int_{t_{n'}}^t f_{n'}(s, \varphi_{n'}(s)) ds.$$

Para $n' \rightarrow \infty$, tenemos

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_0(s, \varphi(s)) ds.$$

Luego, por la unicidad de las soluciones, $\varphi = \varphi_0$ en $|t - t_0| \leq \epsilon$. Consecuentemente, por el **Lema 1.4.1**, φ_n converge uniformemente para φ_0 en $|t - t_0| \leq \epsilon$.

Si $t_0 + \epsilon \leq b$, repitiendo el argumento anterior para una sucesión $x_{n'} = \varphi_n(t_0 + \epsilon), t_{n'} = t_0 + \epsilon$, concluye que existe n_3 tal que si $n > n_3$, φ_n está definida en $[t_0 - \epsilon, t_0 + 2\epsilon]$ y converge uniformemente para φ_0 en este intervalo. Análogamente para $t - 2\epsilon$. Después de un número finito de etapas (a lo sumo $\frac{(b-a)}{\epsilon}$) se concluye que existe $n_0 = n_0(a, b)$ tal que, para $n > n_0$, φ_n está definida en $[a, b]$ (esto es, $I_n \supset [a, b]$) y converge uniformemente para φ_0 en $[a, b]$. \square

Demostración del Teorema 4.1. Por la Observación 4, es suficiente probar este teorema para ecuaciones de la forma $x' = f(t, x)$ con todas sus soluciones únicas. La **Proposición 1.4.1** aplicada a $f_n = f$ implica que para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$, dados $\epsilon > 0$ y $[a, b] \subset I(t_0, x_0)$, existe una vecindad $V_0 = V_0(t_0, x_0)$ tal que, para todo $(t', x') \in V_0$, $I(t', x') \supset [a, b]$ y

$$|\varphi(t, t', x') - \varphi(t, t_0, x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

si $t \in [a, b]$. Esto prueba que D es abierto. Prueba también la continuidad de φ en (t, t_0, x_0) para $t \in (a, b)$, pues

$$|\varphi(s, t', x') - \varphi(t, t_0, x_0)| \leq |\varphi(s, t', x') - \varphi(s, t_0, x_0)| + |\varphi(s, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \epsilon$$

para s próximo de t tal que $|\varphi(s, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Lo que es posible debido a la continuidad en t de $\varphi(t, t_0, x_0)$. \square

Teorema 1.4.2. Sea f continua en un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda$, con D_2f continua en Ω . Entonces, para λ fijo, la solución $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ de

$$x' = f(t, x, \lambda), x(t_0) = x_0,$$

es única y admite derivada parcial $D_3\varphi$ con relación a x_0 . Además, la aplicación $(t, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ es continua en su dominio $D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, \omega_-(t_0, x_0, \lambda) < t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\}$, y

$$x(t) = D_3\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \cdot e_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0^k}(t, t_0, x_0, \lambda),$$

$\forall k, 1 \leq k \leq \dim \mathbb{E}$, es solución de $x' = J(t)x, x(t_0) = e_k$, donde

$$J(t) = J(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$$

Demostración. Ver [1, pág. 39]. □

1.5. Campos vectoriales y flujo

Definición 1.5.1. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto del espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Un **campo vectorial de clase \mathcal{C}^k** en Δ es una aplicación $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asocia a cada $x \in \Delta$ un vector $X(x) \in \mathbb{R}^n$. La ecuación diferencial asociada a dicho campo vectorial es

$$x' = X(x), x \in \Delta. \tag{1.12}$$

Dicha ecuación no depende de la variable t , por lo que la ecuación diferencial es **autónoma** y sus soluciones son aplicaciones diferenciables $\varphi : I \rightarrow \Delta$ (I subconjunto de la recta real) tales que

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t)), \forall t \in I. \tag{1.13}$$

Estas soluciones son llamadas **trayectorias** o **curvas integrales** de X de la ecuación (1.12).

Definición 1.5.2. Un **punto singular**, o una **singularidad**, es un punto $x \in \Delta$ verificando que $X(x) = 0$. En caso contrario, se dice que el punto es **regular**.

Si x es punto singular, entonces $\varphi(t) = x, -\infty < t < \infty$ es solución de la ecuación (1.12). Recíprocamente, si $\varphi(t) = x, -\infty < t < \infty$, es solución de la ecuación (1.12) entonces x es punto singular, porque

$$0 = \varphi'(t) = X(\varphi(t)) = X(x).$$

La ecuación (1.12) admite la siguiente interpretación geométrica: φ es una curva integral de X si y solo si su vector velocidad $\varphi'(t)$ en t coincide con el valor del campo X en $\varphi(t)$. Lo anterior se puede visualizar en la Figura 1.4.

Observación: Para situarnos en el contexto de las secciones previas, podemos definir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $f(t, x) = X(x)$, donde $\Omega = \mathbb{R} \times \Delta$. Por otro lado, toda ecuación $x' = f(t, x)$ no autónoma en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ puede ser considerada como una ecuación autónoma $z' = F(z)$ en Ω , donde $z = (s, x)$ y $F(z) = (1, f(z))$. Sobre las ecuaciones autónomas podemos concluir lo siguiente.

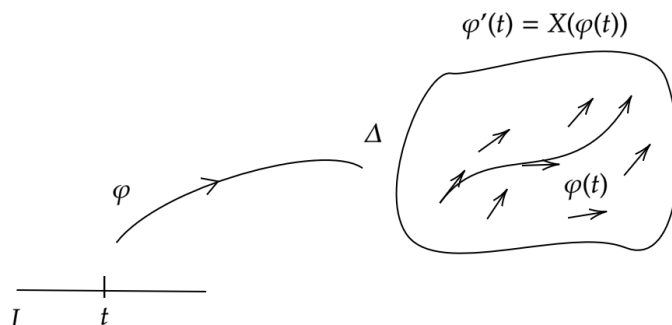


Figura 1.4: Campo vectorial y solución

Teorema 1.5.1.

- Existencia y unicidad de las soluciones máximas.** Para cada $x \in \Delta$ existe un intervalo abierto I_x donde está definida una solución máxima φ_x de la ecuación (1.12) tal que $\varphi_x(0) = x$.
- Propiedad de grupo.** Si $y = \varphi_x(t)$ y $t \in I_x$, entonces $I_y = I_x - t = \{r - t : r \in I_x\}$, y $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s), \forall s \in I_y$.
- Diferenciabilidad en relación a las condiciones iniciales.** El conjunto $D = \{(t, x) : x \in \Delta, t \in I_x\}$ es abierto en \mathbb{R}^{n+1} y la aplicación $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ es de clase C^r . Más aún, φ satisface la ecuación.

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) \cdot D_2 \varphi(t, x), \forall (t, x) \in D.$$

Las pruebas de **a** y **c** se deducen a partir del teorema de **Picard** y del **Teorema 1.4.2**. Para la demostración del literal **b** del teorema enunciaremos y demostraremos el siguiente lema.

Lema 1.5.1. Dadas $x : (a, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\tilde{x} : [t_0, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluciones del **PVI** $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Considere $z : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (a, t_0], \\ \tilde{x}(t), & t \in [t_0, b), \end{cases}$$

entonces $z(t)$ es solución del **PVI**.

Demostración. Como $x(t_0) = x_0 = \tilde{x}(t_0)$, $z(t)$ está bien definida y es continua. Más aún,

$$z(t) = x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds, \forall t \leq t_0,$$

$$z(t) = \tilde{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds, \forall t \geq t_0,$$

$$\text{por lo tanto, } z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds, \forall t \in (a, b)$$

es solución del problema de Cauchy.

Lo que probaremos es que $\varphi_x(t+s)$ y $\varphi_y(s)$ son ambas soluciones del **PVI** siguiente

$$\begin{aligned} x' &= f(x), \\ x(0) &= x. \end{aligned}$$

Continuando con la prueba del resultado principal, sean $t, s > 0$ (los casos restantes se trabajan similar). Sea $\tilde{y} = \varphi(\tilde{t}, \tilde{x})$ y sea $X_1 : I_{\tilde{x}} \rightarrow \Omega$ la solución del **PVI** con $X_1(0) = \tilde{x}$, es decir, $X_1(s) = \varphi(s, \tilde{x})$, $[0, \tilde{t}] \subset I_{\tilde{x}}$ y sea $X_2 : I_{\tilde{y}} \rightarrow \Omega$ solución del problema de valor inicial con $X_2(0) = \tilde{y}$ con $X_2(s) = \varphi(s, \tilde{y})$, $[0, \tilde{s}] \subset I_{\tilde{y}}$. Como $X_1(\tilde{t}) = \tilde{y} = X_2(0)$, la función $X : [0, \tilde{t} + \tilde{s}] \rightarrow \Omega$, la cual está definida por

$$X(s) = \begin{cases} X_1(s), & \forall s \in [0, \tilde{t}], \\ X_2(s - \tilde{t}), & \forall s \in [\tilde{t}, \tilde{t} + \tilde{s}], \end{cases}$$

está bien definida y es solución del **PVI** (por el **Lema 1.5.1**) con $X(0) = \tilde{x}$, de aquí $[0, \tilde{t} + \tilde{s}] \subset I_{\tilde{x}}$, $X(s) = X_1(s)$, $\forall s \in [0, \tilde{t}]$. En particular

$$\varphi(\tilde{t} + \tilde{s}, \tilde{x}) = X(\tilde{t} + \tilde{s}) = X_2(\tilde{s}) = \varphi(\tilde{s}, \tilde{y}),$$

$$\text{por lo tanto, } \varphi_x(t+s) = \varphi_y(s).$$

□

Definición 1.5.3. La aplicación $\varphi : D \rightarrow \Delta$ es llamado **flujo** generado por X .

Ejemplo 1.5.1. Sean $X = (X_1, X_2)$ y $\Delta = \mathbb{R}^2$ donde $X_1 = x$ y $X_2 = (-y + x^3)$. El flujo de X es dado por

$$\varphi(t, (a, b)) = \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t} \right),$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Sea $Y = (x, -y)$ otro campo, su flujo viene dado por $\psi(t, (a, b)) = (ae^t, be^{-t})$. El lector puede verificar que dada $h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4} \right)$ satisface $h(\psi(t, p)) = \varphi(t, h(p))$.

Definición 1.5.4. Sea $\varphi : I_{x_0} \rightarrow \Delta$ solución máxima de la ecuación (1.12) pasando por el punto $(0, x_0)$. Se llama **órbita** de la solución, **trayectoria** o **curva integral** (máxima) a la imagen asociada a la función φ .

Una vez que son imágenes de curvas se puede concluir que existen tres tipos de órbitas de la solución de una ecuación diferencial: singularidades, órbitas homeomorfas a un intervalo abierto y órbitas periódicas.

Definición 1.5.5. La órbita asociada a la solución maximal $\varphi : I \rightarrow \Delta$ de la ecuación $x' = X(x)$ se dice **periódica** si existe un real $c > 0$ verificando que $\varphi_{x_0}(t+c) = \varphi_{x_0}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, siendo φ_{x_0} la solución maximal pasando por el punto $x_0 \in \Delta$.

Observación 5. $\gamma^+(q) = \{\varphi(t, q) : t > 0, t \in I_x\}$ y $\gamma^-(q) = \{\varphi(t, q) : t < 0, t \in I_x\}$ denotan a las semiórbitas positiva y negativa de φ en el punto q , respectivamente.

A partir de la siguiente definición se comienzan a trabajar los conceptos para \mathbb{R}^2 ya que trabajaremos en el plano. Sin embargo varios de estos conceptos se pueden extender a \mathbb{R}^n .

Definición 1.5.6. Se llama **diagrama de fases** de un campo vectorial $X : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ al conjunto de todas las singularidades y órbitas regulares orientadas de acuerdo con las soluciones máximas que las describen.

Para representar el diagrama de fases de un sistema será suficiente con dibujar algunas órbitas del sistema. A continuación, se introducen algunos conceptos que permiten realizar una clasificación de los campos vectoriales desde el punto de vista topológico para comparar sus diagramas de fases.

Definición 1.5.7. Sean $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $G : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos campos vectoriales definidos en los abiertos $A, B \subset \mathbb{R}^2$, respectivamente. Se dice que el campo vectorial F es **topológicamente equivalente** al campo vectorial G si existe un homeomorfismo $h : A \rightarrow B$ que conserva órbitas y su orientación, esto es, la aplicación h lleva órbitas del campo vectorial F en órbitas del campo vectorial G conservando la orientación. Se llama **equivalencia topológica** a dicho homeomorfismo.

Sean $\varphi : \Omega \rightarrow A$ y $\psi : \hat{\Omega} \rightarrow B$ los flujos asociados a los campos vectoriales F y G . Se dice que los campos F y G son **topológicamente conjugados** si existe un homeomorfismo $h : A \rightarrow B$ verificando que $h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$, para todo $(t, x) \in \Omega$. En este caso, se debe verificar que $I_x = I_{h(x)}$, es decir, que los intervalos de definición máxima de los flujos φ y ψ coincidan. El homeomorfismo h se llama homeomorfismo de conjugación o, también, **conjugación topológica**.

Observación 6. La conjugación topológica preserva tiempos, mientras que la equivalencia no. Un ejemplo de esto es que en una órbita cerrada (centro) la conjugación preserva el periodo, mientras que la equivalencia no lo preserva.

Observación 7. La conjugación y la equivalencia topológica establecen una relación de equivalencia entre los campos definidos en abiertos del plano euclidiano \mathbb{R}^2 y conservan los puntos críticos y las órbitas, es decir, llevan puntos críticos en puntos críticos y órbitas en órbitas.

Ejemplo 1.5.2. La función h dada en el ejemplo 1.5.1 define una conjugación topológica entre el campo X y el campo Y .

Ejemplo 1.5.3. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ matrices en \mathbb{R}^2 con $ab > 0$. Todas las órbitas de los sistemas $x' = Ax$ y $x' = Bx$ son periódicas con periodos $\frac{2\pi}{a}$ y $\frac{2\pi}{b}$, respectivamente, con excepción del origen que es un punto singular. Si $a \neq b$, estos sistemas no pueden ser conjugados. Pero $h = \text{Identidad}$ en \mathbb{R}^2 es una equivalencia.

Definición 1.5.8. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^r . Sea $\varphi : I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p)) \rightarrow \Delta$ la solución máxima de la ecuación diferencial definida por el campo X pasando por el punto p .

Cuando se cumple que $\omega_+(p) = \infty$, se define el ω -**límite** del punto p como el siguiente conjunto:

$$\omega(p) = \{q \in \Delta : \text{existe } \{t_n\}_{n \geq 0} \text{ verificando que } \{t_n\}_{n \geq 0} \rightarrow \infty, \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

De modo análogo, si $\omega_-(p) = -\infty$, se define el α -**límite** del punto p como el siguiente conjunto:

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta : \text{existe } \{t_n\}_{\geq 0} \text{ verificando que } \{t_n\}_{\geq 0} \rightarrow -\infty, \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

Definición 1.5.9. Se define el **conjunto ω -límite** de una órbita γ como el conjunto $\omega(p)$ para cualquier punto p de la órbita γ . De modo análogo, se define el **conjunto α -límite** de una órbita γ como el conjunto $\alpha(p)$ para cualquier punto p de la órbita γ .

1.6. Diagrama de fases entorno a un punto regular

En esta sección, se enunciará y demostrará el llamado Teorema del Flujo Tubular, que indica el comportamiento de las órbitas en un entorno de un punto no singular.

Definición 1.6.1. Sea $X : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^r y sea A un subconjunto abierto de \mathbb{R} . Se dice que $h : A \rightarrow \Delta$ es una **sección transversal local** del campo X si para cada $a \in A$ se cumple que $h'(a)$ y $X(h(a))$ son linealmente independientes, es decir, si la matriz $(X(h(a))|h'(a))$ es invertible. Sea $S = h(A)$ con la topología inducida. Si $h : A \rightarrow S$ es un homeomorfismo, se dice que S es una **sección transversal** del campo X . Si $x_0 \in A$, se dice que S es una **sección** en el punto x_0 .

Teorema 1.6.1. (del flujo tubular). Sea p una singularidad del sistema de ecuaciones diferenciales definido por el campo de clase \mathcal{C}^r , $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$. Sea $h : A \rightarrow S$ una sección transversal de clase \mathcal{C}^r del campo X verificando que $h(0) = p$. Entonces, existe $V \subset \Delta$ un entorno de p y un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^r , $g : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$, siendo $\epsilon > 0$ y B un intervalo abierto verificando las siguientes condiciones:

1. $g(S \cap V) = \{0\} \times B$,
2. $g : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$ es una conjugación de clase \mathcal{C}^r entre $X|_V$ y el campo vectorial constante $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $Y = (1, 0)$.

Demostración. Sea $\varphi : \Omega \rightarrow \Delta$ el flujo de X . Sea $H : \{(t, u) : (t, h(u)) \in \Omega\} \rightarrow \Delta$ definido por $H(t, u) = \varphi(t, h(u))$. Observe que H envía líneas paralelas a curvas integrales del campo X . Se probará que H es un difeomorfismo local en un entorno del origen. Es suficiente con probar que $DH(0, 0)$ es un isomorfismo. Para ello, veremos si H está en las condiciones del Teorema de la Función Inversa:

- $H(t, u) = \varphi(t, h(u))$ es de clase \mathcal{C}^r por composición (tanto el flujo φ como la sección transversal son de clase \mathcal{C}^∞).
- $H(0, 0) = \varphi(0, h(0)) = h(0) = p$.
- Veamos, a continuación, si $DH(0, 0)$ es un isomorfismo. Utilizando que $\frac{d}{dt}\varphi(t, u) = H(\varphi(t, u))$, se verifica que

$$D_1H(0, 0) = \frac{d}{dt}\varphi(t, h(0))|_{t=0} = H(\varphi(t, h(0)))|_{t=0} = H(\varphi(0, p)) = H(p).$$

Como $\varphi(0, h(u)) = h(u)$ para todo $u \in \Delta$, se cumple que $D_2H(0, 0) = D_1h(0)$. De este modo, $D_1H(0, 0)$ y $D_2H(0, 0)$ generan \mathbb{R}^2 y, por lo tanto, $DH(0, 0)$ es un isomorfismo.

Por el Teorema de la Función Inversa, existe $\epsilon > 0$ y un entorno $B \subset \mathbb{R}$ del origen tal que $H|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B}$ es un difeomorfismo definido en un abierto $V = H((-\epsilon, \epsilon) \times B)$. Sea $g = (H|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B})^{-1}$. Entonces, como $H(0, u) = \varphi(0, h(u)) = h(u) \in S$ para todo $u \in B$, se verifica que $g(S \cap V) = \{0\} \times B$. Además, g^{-1} conjuga a los campos Y y X :

$$Dg^{-1}(t, u)Y(t, u) = DH(t, u)(1, 0) = D_1H(t, u) = X(\varphi(t, h(u))) = X(H(t, u)) = X(g^{-1}(t, u))$$

para todo $(t, u) \in (-\epsilon, \epsilon) \times B$, acabando con la demostración. \square

1.6.1. Clasificación de las singularidades de un sistema

Sea $F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo de clase C^r que define a un sistema de ecuaciones diferenciales y sea p una singularidad de dicho sistema. Se considera la matriz jacobiana asociada al campo vectorial F en la singularidad p :

$$DF(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix}.$$

Definición 1.6.2. Una singularidad p del sistema de ecuaciones diferenciales definido por el campo vectorial F es:

- **No degenerada**, si 0 no es un autovalor de la matriz jacobiana $DF(p)$.
- **Hiperbólica**, si los dos autovalores de la matriz jacobiana $DF(p)$ poseen la parte real no nula.
- **Semihiperbólica**, si exactamente uno de los autovalores de $DF(p)$ es nulo.
- **Nilpotente**, si ambos autovalores son nulos pero $DF(p)$ no es idénticamente nula.
- **Linealmente cero**, si $DF(p)$ es idénticamente nula.
- **Centro lineal**, si los autovalores de la matriz jacobiana $DF(p)$ son imaginarios puros no nulos, es decir, si sus autovalores poseen únicamente la parte real nula.

A partir de ahora, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que la singularidad del sistema que vamos a estudiar es siempre el origen. En caso contrario, procederemos del siguiente modo:

Sea $p = (x_0, y_0)$ una singularidad del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y). \end{cases}$$

Entonces $(0, 0)$ es una singularidad del sistema

$$\begin{cases} \bar{x}' = P(\bar{x}, \bar{y}), \\ \bar{y}' = Q(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (1.14)$$

siendo $x = \bar{x} + x_0$ e $y = \bar{y} + y_0$. Es decir, dado (x_0, y_0) singularidad de un sistema de ecuaciones diferenciales, podemos trasladar dicha singularidad al origen de coordenadas, en cuyo caso, el sistema (1.14) quedaría de la forma siguiente:

$$\begin{cases} x' = ax + by + A(x, y), \\ y' = cx + dy + B(x, y), \end{cases}$$

siendo $A, B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones no lineales que dependen de las variables x e y y tales que sus derivadas parciales de primer orden se anulan en el origen de coordenadas. Mediante un cambio de coordenadas, podemos obtener la forma canónica de Jordan de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

distinguiendo las siguientes clasificaciones de matrices de Jordan:

1. Si el punto es hiperbólico, entonces pueden ocurrir las siguientes situaciones:

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son los autovalores reales de la matriz B , entonces la forma canónica de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ es autovalor real doble de la matriz B , la forma canónica de Jordan puede ser:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ o } J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

dependiendo de si la matriz es diagonalizable o no.

- Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ son los autovalores complejos conjugados de la matriz B , entonces la forma canónica de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

2. Si el punto es un centro lineal, entonces la forma canónica de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

siendo $\lambda_1 = i\beta$ y $\lambda_2 = -i\beta$ los autovalores imaginarios puros de la matriz B .

3. Si el punto es semihiperbólico, entonces la forma canónica de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo $\lambda = \lambda_1 \neq 0 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 = 0$ los autovalores de la matriz B .

1.6.2. Diagrama de fases entorno a una singularidad

Definición 1.6.3. Sea $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 , A abierto y sea p una singularidad aislada, es decir, existe un entorno de p donde no hay más singularidades. Se dice que p es:

- Un **centro** si existe U entorno compacto de p verificando que ∂U es una órbita periódica y, además, todas las órbitas en el entorno $U - \{p\}$ son también periódicas.
- Un **nodo atractor** o **foco atractor** si existe U entorno compacto de p verificando que el campo vectorial F en todos los puntos de ∂U apunta hacia dentro. Además, se tiene que, dado $q \in U - \{p\}$, el conjunto ω -límite de q es p y $\gamma^-(q) \cap \partial U \neq \emptyset$.
- Un **nodo repulsor** o **foco repulsor** si existe U entorno compacto de p verificando que el campo vectorial F en todos los puntos de ∂U apunta hacia afuera. Además, se tiene que, dado $q \in U - \{p\}$, el conjunto α -límite de q es p y $\gamma^+(q) \cap \partial U \neq \emptyset$.

Definición 1.6.4. Sea $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 , A abierto y sea $p \in A$ una singularidad aislada. Se dice que p tiene una **descomposición sectorial finita no trivial** si p no está en ninguno de los casos de la Definición 1.6.3 y, si existe un entorno compacto V de p y número finito de órbitas, c_1, \dots, c_n , que cortan transversalmente a ∂V en el punto p_i , es decir, si ∂V es una sección transversal entorno al punto p_i . Además, entre las órbitas c_i y c_{i+1} , se cumple una de las siguientes condiciones, referidas al sector S_i determinado por la región delimitada por el punto p y las órbitas c_i y c_{i+1} y la región de ∂V delimitada por los puntos p_i y p_{i+1} :

- Si el campo vectorial F en todos los puntos del intervalo $[p_i, p_{i+1}] \subset \partial V$ apunta hacia dentro y, para todo $q \in S_i - \{p\}$, el conjunto ω -límite de q es p y $\gamma^-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$, entonces se tiene un **sector parabólico atractor**.
- Si el campo vectorial F en todos los puntos del intervalo $[p_i, p_{i+1}] \subset \partial V$ apunta hacia afuera y, para todo $q \in S_i - \{p\}$, el conjunto α -límite de q es p y $\gamma^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$, entonces se tiene un **sector parabólico repulsor**.
- Si existe un punto $q_i \in (p_i, p_{i+1}) \subset \partial V$ cumpliendo que en todos los puntos del intervalo $[p_i, q_i)$ el campo vectorial F apunta hacia dentro (respectivamente, hacia afuera) y en los puntos del intervalo $(q_i, p_{i+1}]$, el campo vectorial F apunta hacia afuera (respectivamente hacia dentro), y, además, el campo vectorial F es tangente a ∂V en el punto q_i y, para todo $q \in S_i - \overline{c_i \cup c_{i+1} \cup q_i}$, $\gamma^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$ y $\gamma^-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$, entonces, se dice que el sector es **hiperbólico**.
- En último lugar, si existe un punto q_i en el intervalo $(p_i, p_{i+1}) \subset \partial V$ verificando que $\gamma(q_i) \subset V$ con $\omega(q_i) = p = \alpha(q_i)$ y, además, el campo vectorial F en todos los puntos $q \in [p_i, q_i)$ apunta hacia dentro, con $\gamma^+(q) \subset V$ y $\omega(q) = p$, entonces, se dice que el sector es **elíptico**.

Todos los tipos de sectores enunciados anteriormente los podemos visualizar en la Figura 1.5.

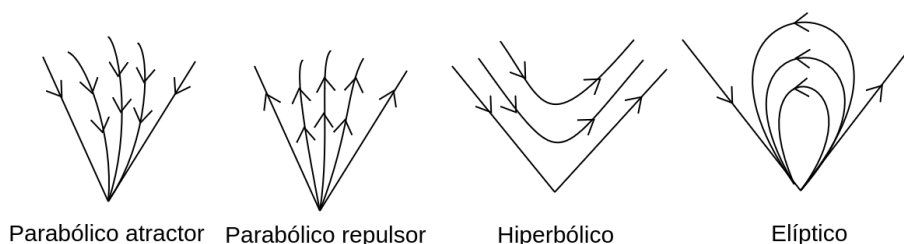


Figura 1.5: Tipos de sectores entorno a una singularidad

En los resultados que enunciaremos y que nos permitirán conocer el diagrama de fases entorno a una singularidad, no se hablará explícitamente de sectores. Diremos que una singularidad es un **punto de silla** cuando tenga 4 sectores hiperbólicos y una **silla-nodo** cuando tenga dos sectores hiperbólicos y uno parabólico (atractor o repulsor). En los casos de nodos, es claro que están formados por un único sector parabólico (atractor o repulsor) y los centros y focos no presentan ninguno de estos sectores.

En general, en las singularidades nilpotentes y linealmente cero pueden aparecer otros tipos de singularidades, por lo que es necesario describir sus diagramas de fase locales en función de los sectores que presentan.

1.6.3. Elementos esenciales de un diagrama de fases

En esta sección, se introducen los elementos esenciales en un diagrama de fases de un campo vectorial y se da una caracterización de la equivalencia topológica para todo campo vectorial definido en el plano.

Definición 1.6.5. Sea $x' = F(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales. Supongamos que dicho campo es una función localmente Lipschitziana en todo el plano. Se dice que el flujo asociado a F , (\mathbb{R}^2, φ) , es un **flujo paralelo** si es topológicamente equivalente a uno de los siguientes:

- Al flujo lineal en \mathbb{R}^2 dado por el sistema $\begin{cases} x' = 1, \\ y' = 0. \end{cases}$
- Al flujo anular en coordenadas polares $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ dado por el sistema $\begin{cases} r' = 0, \\ \theta' = 1. \end{cases}$
- Al flujo nodal o espiral en coordenadas polares $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ dado por $\begin{cases} r' = r, \\ \theta' = 0. \end{cases}$

Se considera, ahora, una región abierta máxima en el plano en la que el flujo (\mathbb{R}^2, φ) es paralelo. En su frontera pueden existir los siguientes tipos de órbitas:

1. Una singularidad del sistema al que define el campo vectorial F .
2. Una órbita periódica para la que no hay un entorno que esté formado totalmente por órbitas periódicas.
3. Una órbita $\gamma(p)$, homeomorfa a \mathbb{R} , para la que no existe un entorno V verificando las siguientes condiciones:
 - $\alpha(q) = \alpha(p)$ y $\omega(q) = \omega(p), \forall q \in V$.
 - ∂V está formada por los conjuntos $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ junto con dos órbitas $\gamma(q_1)$ y $\gamma(q_2)$ tales que $\alpha(p) = \alpha(q_1) = \alpha(q_2)$ y $\omega(p) = \omega(q_1) = \omega(q_2)$.

Definición 1.6.6. Se llama **separatriz** a cualquier órbita verificando una de las condiciones anteriores. Denotaremos por S al conjunto de todas las separatrices. A cada componente conexa máxima de $\mathbb{R}^2 - S$ se le llama **región canónica**.

Proposición 1.6.1. En toda región canónica el flujo es paralelo.

Demostración. Véase en [2] y [5]. □

Definición 1.6.7. Se llama **esqueleto completo de las separatrices** de un flujo (\mathbb{R}^2, φ) a la unión del conjunto de todas las separatrices S con una órbita de cada una de las regiones canónicas. Dados dos esqueletos completos de las separatrices, C_1 y C_2 , decimos que son **topológicamente equivalentes** si existe un homeomorfismo en el plano que asocia las órbitas de C_1 a órbitas de C_2 , conservando su orientación.

Teorema 1.6.2. (Markus-Neumann-Peixoto). Dados $(\mathbb{R}^2, \varphi_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \varphi_2)$ dos flujos continuos únicamente con singularidades aisladas, son topológicamente equivalentes si, y sólo si, sus esqueletos completos de las separatrices son equivalentes.

Observaciones:

1. El teorema original de Markus es en \mathbb{R}^2 , mientras que Neumann lo extiende a cualquier superficie.
2. El resultado está incorrecto: esto fue observado oficialmente en 2018 por Espín-Buendía y Jiménez-López en su artículo “On the Markus - Neumann Theorem”, J. Differential Equations 265(2018), 6036-6047.

El problema está en la definición de separatriz, que está incompleta en los trabajos originales. Fue corregida/completada por Espín-Buendía y Jiménez-López. Sin embargo, estos autores no rehacen la prueba del Teorema con la nueva definición. En [5] se detalla la prueba con la definición correcta.

3. En el caso polinomial, siempre es costumbre decir que una separatriz es una órbita que contiene un lado de un sector hiperbólico, cuando el campo se considera compactificado en la compactificación de Poincaré. Esta “definición” habitual cumple con la corregida de Espín-Buendía y Jiménez-López (esto se demuestra en [5]).

Para nuestro objetivo propuesto redefiniremos de manera intuitiva el concepto de separatriz de la siguiente manera.

Definición 1.6.8. Se le llama separatriz a una “órbita cerca de la cual el campo cambia de comportamiento”, los detalles adicionales pueden consultarse en los trabajos de Espín-Buendía y Jiménez-López y en [5]).

1.7. Clasificación de las singularidades hiperbólicas

En esta sección estudiaremos las singularidades elementales, es decir, las hiperbólicas. Las singularidades hiperbólicas son aquellas que poseen dos autovalores con la parte real distinta de cero.

Empezaremos la sección introduciendo los conceptos de acción adjunta y corchete de Lie y enunciando el Teorema de la Forma Normal Formal, cuya demostración se puede encontrar en [2], y el Teorema de Borel, que serán necesarios para los resultados sobre singularidades no degeneradas.

Sea $F = A + f$ un campo vectorial en \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ con A lineal y f una función de clase \mathcal{C}^∞ verificando que $f(0) = 0$ y $Df(0) = 0$. El objetivo fundamental de la teoría de la forma normal es obtener una expresión más simple de la ecuación diferencial asociada al campo F mediante un cambio de coordenadas que conserve las principales propiedades cualitativas de las curvas solución de la ecuación dada. Se trata de calcular, para cada matriz A , una serie de funciones no lineales F_n , lo más simple posibles, de forma que, para cada función f , se aplica un cambio de coordenadas adecuado para obtener un campo vectorial $F' = A + \tilde{f}$, siendo $\tilde{f} \in F_n$.

Para obtener el cambio de coordenadas adecuado mencionado anteriormente, se introduce el concepto de **acción adjunta** de la matriz A para cada $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} ad_m A : H^m(\mathbb{R}^2) &\rightarrow H^m(\mathbb{R}^2) \\ F &\mapsto [A, F], \end{aligned}$$

siendo $H^m(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de campos vectoriales homogéneos en el plano de grado m y donde $[A, F] = A \circ F - F \circ A$ denota el llamado **corchete de Lie**. Se considera B^m la imagen de la acción adjunta definida anteriormente y sea G^m tal que $B^m \oplus G^m = H^m(\mathbb{R}^2)$. Se suele considerar G^m como el núcleo de la acción conjunta de A^T , siendo A^T la matriz traspuesta de A .

Teorema 1.7.1. (de la forma normal formal). Sea F un campo vectorial de clase \mathcal{C}^r , $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ definido en un entorno del origen tal que $F(0) = 0$ y $DF(0) = A$. Se consideran B^i y G^i , definidas anteriormente. Entonces, existe un cambio de coordenadas $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ en un entorno del origen de forma que ϕ es una función analítica y $F'(y) = Ay + g_2(y) + \dots + g_r(y) + o(\|y\|^r)$, con $g_i \in G^i$, para cada $i = 2, \dots, r$.

Teorema 1.7.2. (Borel). Para cada $p \in \mathbb{R}^n$ y para cada serie formal en n -variables dada por el operador ∞ -jet, existe una función f , de clase \mathcal{C}^∞ , definida en un entorno del punto p de forma que la serie de Taylor de f evaluada en p coincide con la serie formal dada por ∞ -jet.

Utilizando ambos resultados se puede probar que si F es un campo vectorial de clase \mathcal{C}^∞ definido en un entorno de $0 \in \mathbb{R}^n$ con $F(0) = 0$, entonces existe un cambio de coordenadas de clase \mathcal{C}^∞ , $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ en un entorno del origen de forma que F' se puede escribir formalmente como $F'(0) = A + \sum_{i=2}^{\infty} g_i$ con $g_i \in G^i$ para todo $i = 2, 3, 4, \dots$. Nótese que este resultado es

puramente formal y solo proporciona una forma simple formal que no tiene porque representar al campo vectorial en sí.

1.7.1. Teorema de las singularidades no degeneradas

Teorema 1.7.3. (de las singularidades no degeneradas). Sea $(0,0)$ una singularidad aislada del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' &= ax + by + A(x, y) \\ y' &= cx + dy + B(x, y) \end{cases}, \quad (1.15)$$

con a, b, c, d constantes y A, B funciones analíticas en un entorno del origen verificando las siguientes condiciones:

- $A(0,0) = 0 = B(0,0)$,
- $DA(0,0) = (\frac{\partial A}{\partial x}(0,0), \frac{\partial A}{\partial y}(0,0)) = (0,0)$,
- $DB(0,0) = (\frac{\partial B}{\partial x}(0,0), \frac{\partial B}{\partial y}(0,0)) = (0,0)$.

Sea F el campo asociado a dicho sistema y sean λ_1, λ_2 los autovalores de la matriz $DF(0,0)$. Entonces, se verifica:

1. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ cumplen que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, entonces el origen es un punto de silla. Sean E_1, E_2 los autoespacios de los autovalores λ_1 y λ_2 , respectivamente. En este caso, existen dos curvas analíticas invariantes tangentes en el origen a los autoespacios E_1 y E_2 , respectivamente, verificando que, sobre una de las curvas el campo vectorial se acerca al origen y, sobre la otra, el campo vectorial se aleja del origen.
2. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ verifican que $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$ y $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, entonces el origen es un nodo. En el caso en que $\lambda_1 > 0$, se tiene un nodo repulsor o inestable y, si $\lambda_1 < 0$, el nodo es atractor o estable. En este caso, existe un cambio de coordenadas de clase \mathcal{C}^∞ que transforma el sistema (1.15) en

$$\begin{cases} x' &= \lambda_1 x, \\ y' &= \lambda_2 y, \end{cases}$$

si $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N}$ y en

$$\begin{cases} x' &= \lambda_1 x, \\ y' &= \lambda_2 y + \delta x^m, \end{cases}$$

para algún $\delta = 0$ o $\delta = 1$ si $\lambda_2 = m\lambda_1$ con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Además, el sistema (1.15) es una conjugación topológica de clase \mathcal{C}^0 de

$$\begin{cases} x' &= \delta x, \\ y' &= \delta y, \end{cases}$$

con $\delta = \pm 1$ y $\lambda_1 \delta > 0$.

3. Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ son autovalores complejos conjugados con $\alpha, \beta \neq 0$, entonces el origen es un foco “fuerte”. En el caso en el que $\alpha > 0$, el origen es un foco repulsor o inestable y, si $\alpha < 0$, el origen es un foco atractor o estable. En este caso, existe un cambio de coordenadas de clase \mathcal{C}^∞ que transforma el sistema (1.15) en

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = -\beta x + \alpha y. \end{cases}$$

Además, el sistema (1.15) es una conjugación topológica de clase \mathcal{C}^0 de

$$\begin{cases} x' = \delta x, \\ y' = \delta y, \end{cases}$$

con $\delta = \pm 1$ y $\alpha\delta > 0$.

4. Si $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta \in \mathbb{C}$ son autovalores imaginarios puros con $\beta \neq 0$, entonces el origen es un centro lineal, es decir, un foco “débil” o un centro.

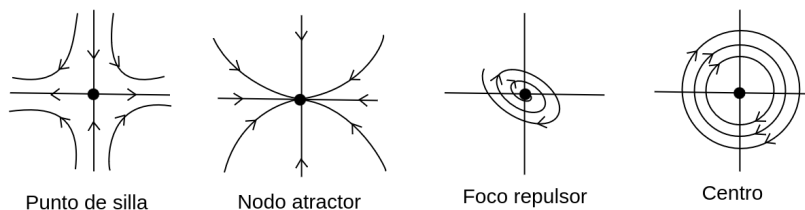


Figura 1.6: Singularidades no degeneradas

Los cuatro casos son representados en la Figura 1.6.

Demostración. Daremos una idea de la demostración en el caso en el que la matriz jacobiana en el origen presente una de las siguientes formas:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\alpha \neq 0$ y $\beta > 0$. Sea F su campo vectorial asociado. Se probará que existe una conjugación topológica local de clase \mathcal{C}^0 entre el campo vectorial F y su parte lineal $DF(0,0)$ en un entorno del origen. Para ello, es suficiente con considerar el caso atractor, es decir, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\alpha < 0$; para el caso repulsor se considera la variable $-t$.

Supongamos que la matriz jacobiana es de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sea $S_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ una sección transversal para F y su parte lineal, si $r > 0$ es lo suficientemente pequeño. Fijamos $r = r_0 > 0$. Entonces, para todos los puntos $p \in \bar{B}_{r_0}(0, 0) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$, las órbitas de F y de $DF(0, 0)$ tienden al origen cuando $t \rightarrow +\infty$ y deja a $B_{r_0} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r_0^2\}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Sean $\varphi(p, t)$ y $\psi(p, t)$ los flujos de F y $DF(0, 0)$, respectivamente. Para cualquier punto $p \in B_{r_0}(0, 0) - \{(0, 0)\}$, existe un único tiempo $t_p > 0$ de forma que $\varphi(p, t_p) \in S_{r_0}$. La conjugación topológica de clase \mathcal{C}^0 $h : B_{r_0}(0, 0) \rightarrow B_{r_0}(0, 0)$ definida por:

$$\begin{cases} h(0, 0) = 0, \\ h(p) = \psi(\varphi(p, -t_p), t_p), \end{cases}$$

es un homeomorfismo de conjugación entre los flujos φ y ψ .

Para el segundo caso de matriz jacobiana se observa que es posible encontrar un cambio de coordenadas lineal que lleve $DF(0, 0)$ a la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \epsilon \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

con $\epsilon > 0$. Si se considera ϵ lo suficientemente pequeño, el cambio de coordenadas prueba que F es, localmente, una conjugación topológica de $DF(0, 0)$ de clase \mathcal{C}^0 .

Finalmente, para el primer caso de matriz jacobiana, se considera $S'_r = \{(x, y) : |\lambda_2|x^2 + |\lambda_1|y^2 = r^2\}$ y $B'_{r_0}(0, 0) = \{(x, y) : |\lambda_2|x^2 + |\lambda_1|y^2 < r_0^2\}$ y se realiza un procedimiento análogo al tercer caso.

Cualquiera de los tres casos considerados anteriormente es una prueba de un caso muy especial del **Teorema de Hartman-Grobman** que establece que, en cualquier dimensión, un campo vectorial con una singularidad hiperbólica es, localmente, una conjugación topológica de clase \mathcal{C}^0 de su parte lineal. Una prueba de este se puede encontrar en [4].

Para describir las clases de conjugación topológica de clase \mathcal{C}^∞ de atractores y repulsores de las singularidades hiperbólicas se aplica el Teorema de la Forma Normal Formal enunciado anteriormente. Nos limitaremos al caso repulsor. Se distinguen tres casos:

- Supongamos que $DF(0, 0) = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$ con $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$. Aplicando el corchete de Lie y dividiendo todo por λ_1 obtenemos:

$$\begin{aligned} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}, x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} \right] &= ((m-1) + n\lambda) x^m y^n \frac{\partial}{\partial x}, \\ \left[x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}, x^m y^n \frac{\partial}{\partial y} \right] &= (m + (n-1)\lambda) x^m y^n \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

con $\lambda = \lambda_2/\lambda_1 \geq 1$. A parte de los términos lineales, vemos que todos los términos en el desarrollo de Taylor pueden eliminarse, excepto $x^m(\partial/\partial y)$ en el caso $\lambda = m$. Se puede ver, aplicando el Teorema de Borel sobre la realización de series de potencias formales, que existe un cambio de coordenadas de clase \mathcal{C}^∞ en un entorno del origen de forma que si $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N}$, el campo vectorial F puede reescribirse como:

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x + f(x, y), \\ y' = \lambda_2 y + g(x, y), \end{cases}$$

y como

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x + f(x, y), \\ y' = \lambda_2 y + ax^m + g(x, y), \end{cases}$$

si $\lambda_2 = m\lambda_1$ para algún $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, siendo f, g funciones de clase \mathcal{C}^∞ tales que su serie de Taylor evaluada en el origen es nula. Este caso prueba que el origen es un nodo repulsor del campo F (caso (2) del Teorema 1.7.3).

- Supongamos, a continuación, que $DF(0, 0) = \lambda \left(x \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right)$ con $\lambda > 0$. Aplicando el corchete de Lie y dividiendo por λ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[\left(x \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right), x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} \right] &= (m + n - 1) x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} + n x^{m+1} y^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} - x^m y^n \frac{\partial}{\partial y}, \\ \left[\left(x \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right), x^m y^n \frac{\partial}{\partial y} \right] &= (m + n - 1) x^m y^n \frac{\partial}{\partial y} + n x^{m+1} y^{n-1} \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

aplicando combinaciones lineales adecuadas, se pueden eliminar todos los términos de orden al menos dos y, así, se introduce un cambio de coordenadas, reescribiendo el campo F como:

$$\begin{cases} x' = \lambda x + f(x, y), \\ y' = x + \lambda y + g(x, y), \end{cases}$$

con f, g funciones de clase \mathcal{C}^∞ de forma que sus series de Taylor evaluadas en el origen son nulas. Este caso prueba que el origen es un nodo repulsor del campo F , para el caso en el que se tenga un autovalor doble.

- Para finalizar, supongamos que $DF(0, 0) = \alpha \left((x + \gamma y) \frac{\partial}{\partial x} + (-\gamma x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right)$ de forma que $\alpha\gamma \neq 0$. Aplicando el corchete de Lie y dividiendo por α , obtenemos:

$$\begin{aligned} \left[(x + \gamma y) \frac{\partial}{\partial x} + (-\gamma x + y) \frac{\partial}{\partial y}, x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} \right] &= (m + n - 1) x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + m\gamma x^{m-1} y^{n+1} \frac{\partial}{\partial x} - n\gamma x^{m+1} y^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} + \gamma x^m y^n \frac{\partial}{\partial y}, \\ \left[(x + \gamma y) \frac{\partial}{\partial x} + (-\gamma x + y) \frac{\partial}{\partial y}, x^m y^n \frac{\partial}{\partial y} \right] &= (m + n - 1) x^m y^n \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad + m\gamma x^{m-1} y^{n+1} \frac{\partial}{\partial y} - n\gamma x^{m+1} y^{n-1} \frac{\partial}{\partial y} - \gamma x^m y^n \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

como en el caso anterior, si aplicamos combinaciones lineales adecuadas, se pueden eliminar todos los términos de orden al menos dos y, así, se introduce un cambio de coordenadas, reescribiendo el campo F como:

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + f(x, y), \\ y' = -\beta x + \alpha y + g(x, y), \end{cases}$$

siendo $\alpha\beta \neq 0$ y f, g funciones de clase \mathcal{C}^∞ tales que sus series de Taylor evaluadas en el origen se anulan. Este caso prueba que el origen es un foco repulsor del campo F (caso (3) del Teorema 1.7.3).

□

Observación 8. En el teorema anterior aparecen dos términos nuevos, foco “débil” y foco “fuerte”. La diferencia entre ambos se encuentra en la parte lineal del campo vectorial que define al sistema. En el caso (3) del teorema, se cumple que $(0, 0)$ es un foco de la parte lineal DF y este comportamiento se conserva para el sistema definido por el campo vectorial F . De este modo, diremos que el origen del sistema definido por el campo F es un foco “fuerte”. En el caso (4) del teorema no ocurre lo anterior. Se cumple que $(0, 0)$ es un centro de la parte lineal DF , pero este comportamiento no tiene porque mantenerse en el sistema definido por el campo vectorial F , cuyo origen puede ser un centro o un foco, en cuyo caso se llama foco débil.

Capítulo 2

Compactificación de Poincaré

En este capítulo se introducirá la llamada compactificación de Poincaré que permite analizar el comportamiento de las órbitas de un sistema de ecuaciones diferenciales polinomial en el plano en un entorno del infinito. Su construcción se basa en la proyección de un plano en la esfera, de forma que las singularidades en el infinito se extienden a lo largo del ecuador de la esfera. La compactificación permite dibujar el diagrama de fases en una región finita en lugar de en todo el plano \mathbb{R}^2 . Hasta este momento se ha utilizado la notación (x, y) para las coordenadas en el plano, pero en este capítulo se utilizarán las coordenadas (x_1, x_2) . La mayoría de conceptos e ideas desarrolladas están basadas en [2] y [3].

2.1. Construcción de la compactificación

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales polinomial en las variables x_1 y x_2 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= Q(x_1, x_2),\end{aligned}$$

y su campo vectorial asociado $F(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$. Sea d el grado del campo F , es decir, el máximo de los grados de los polinomios P y Q . A continuación se procede a construir la compactificación de Poincaré.

Se considera \mathbb{R}^2 identificado con el plano en \mathbb{R}^3 dado por $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$ y se toma la esfera $\mathbb{S}^2 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$, que llamamos **esfera de Poincaré**, y la dividimos en tres partes:

Lo cual se ilustra en la Figura 2.1.

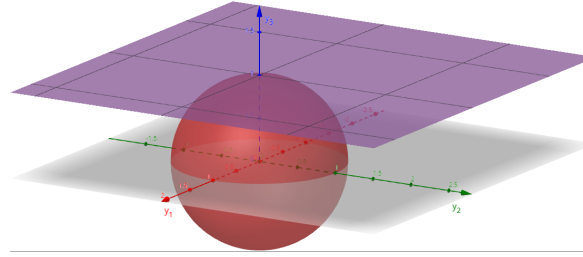


Figura 2.1: Esfera de Poincaré y plano tangente

- El **hemisferio norte** $H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$,
- El **hemisferio sur** $H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$,
- El **ecuador** $\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$.

Se considera la proyección del campo F en la esfera de Poincaré, dada por las proyecciones centrales, $f^+, f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, obtenidas mediante la intersección de la recta pasando por el punto y y por el origen de la esfera con los hemisferios norte y sur, respectivamente, tal como se ilustra en la Figura 2.2:

$$f^+(x) = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right),$$

$$f^-(x) = \left(-\frac{x_1}{\Delta(x)}, -\frac{x_2}{\Delta(x)}, -\frac{1}{\Delta(x)} \right),$$

donde

$$\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

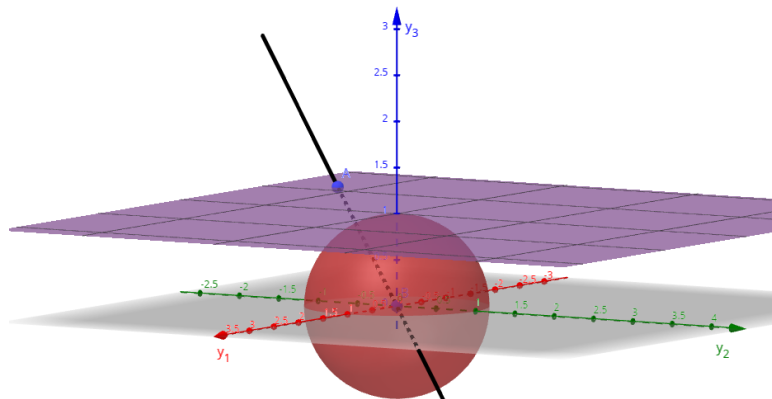


Figura 2.2: Proyección del plano a la esfera

Estas proyecciones serán de utilidad para el cálculo de los campos vectoriales inducidos en cada uno de los hemisferios. En el hemisferio norte H_+ el campo inducido es $\bar{F}(y) = Df^+(x)F(x)$ siendo $y = f^+(x)$, y en el hemisferio sur H_- , $\bar{F}(y) = Df^-(x)F(x)$, con $y = f^-(x)$. Nótese que

estos campos vectoriales inducidos son simétricos con respecto al origen y que están definidos en $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, además, los puntos en el infinito en \mathbb{R}^2 se encuentran en correspondencia biyectiva con el ecuador de la esfera.

Ahora nos gustaría extender el campo vectorial inducido \overline{F} de $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ a \mathbb{S}^2 . Desafortunadamente, en general el campo no permanece acotado a medida que nos acercamos a \mathbb{S}^1 , obstruyendo la extensión.

El campo vectorial \overline{F} definido anteriormente puede extenderse analíticamente a toda la esfera simplemente con multiplicar \overline{F} por el término $\rho(y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}}$. Al campo vectorial definido en \mathbb{S}^2 se le llama **compactificación de Poincaré** del campo vectorial F y se denota por $\rho(F)$.

A continuación, se consideran las seis cartas locales definidas en la esfera \mathbb{S}^2 , (U_i, ϕ_i) , (V_i, ψ_i) , $i = 1, 2, 3$, dadas por los abiertos $U_i = \{y_i \in \mathbb{S}^2 : y_i > 0\}$, $V_i = \{y_i \in \mathbb{S}^2 : y_i < 0\}$ y ϕ_i, ψ_i las aplicaciones locales definidas por $\phi_i(y) = -\psi_i(y) = \left(\frac{y_m}{y_i}, \frac{y_n}{y_i}\right)$ con $m < n$ y $m, n \neq i$. Se denotará por $z = (u, v)$ al valor de ϕ_i o de ψ_i para cualquier $i \in \{1, 2, 3\}$, por lo que en cada carta se trabaja con distintas coordenadas. Nótese que, en cualquiera de las anteriores cartas, $v = 0$ en los puntos del ecuador de \mathbb{S}^2 . Estas cartas se ilustran en la Figura 2.3.

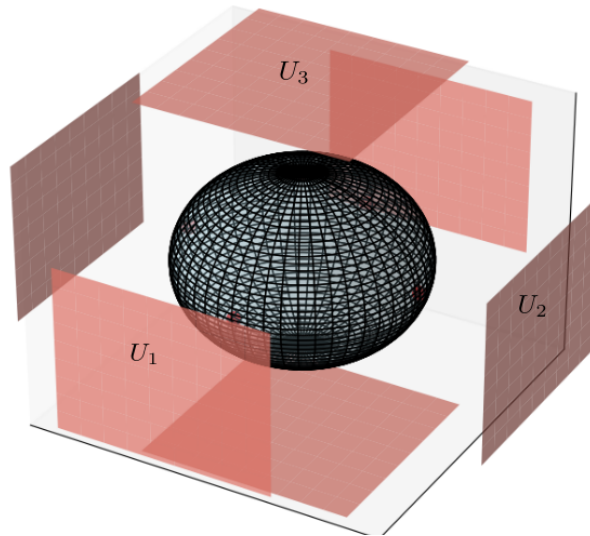


Figura 2.3: Cartas (U_i, ϕ_i) para $i = 1, 2, 3$ de la esfera de Poincaré

Del total de seis cartas, se determinará, paso a paso, la expresión de la compactificación de Poincaré $\rho(F)$ en la carta local U_1 . Las expresiones de $\rho(F)$ en las otras cartas se obtienen de forma análoga.

Sea $\overline{F}(y) = Df^+(x)F(x)$ con $y = f^+(x)$ y $F(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$. Entonces, el campo vectorial definido en la carta U_1 es:

$$\begin{aligned}
\bar{F}|_{U_1} &= D\varphi_1(y)\bar{F}(y) = D\varphi_1(y) \circ Df^+(x)F(x) \\
&= D\varphi_1(f^+(x)) \circ Df^+(x)F(x) \\
&= D(\varphi_1 \circ f^+)(x)F(x).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \circ f^+)(x) &= \varphi_1 \left(\frac{x_1}{\Delta x}, \frac{x_2}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta x} \right) = \left(\frac{\frac{x_2}{\Delta x}}{\frac{x_1}{\Delta x}}, \frac{\frac{1}{\Delta x}}{\frac{x_1}{\Delta x}} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right), \\
D(\varphi_1 \circ f^+)(x) &= \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

se tiene que el campo vectorial en la carta U_1 es:

$$\begin{aligned}
\bar{F}|_{U_1} &= \frac{1}{x_1^2} \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{x_1^2} (-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)).
\end{aligned}$$

Buscamos, ahora la expresión del campo vectorial en términos de (u, v) . Utilizando que $z = (u, v) = (x_2/x_1, 1/x_1)$, se deduce que $(x_1, x_2) = (1/v, u/v)$. Luego, el campo vectorial en la carta U_1 es:

$$\bar{F}|_{U_1} = v^2 \left(-\frac{u}{v} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{v} Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right).$$

Sea, ahora,

$$\rho(y) = (y_3)^{d-1} = \frac{1}{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1})^{d-1}} = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{u^2}{v^2} + 1}\right)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{(\sqrt{1 + u^2 + v^2})^{d-1}}.$$

De este modo, se tiene:

$$\begin{aligned}
\rho(y)\bar{F}|_{U_1} &= v^{d-1} m(z) v^2 \left(-\frac{u}{v} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{v} Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right) \\
&= v^{d+1} m(z) \left(-\frac{u}{v} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{v} Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right)
\end{aligned}$$

donde $m(z) = (1 + u^2 + v^2)^{\frac{1-d}{2}}$. La expresión anterior está bien definida en un entorno de $v = 0$, pues el término v^{d+1} elimina las potencias de v que aparecen en los denominadores, motivo por el cual está definida en todo \mathbb{S}^2 . Un razonamiento similar sirve para las restantes cartas locales consideradas en la esfera de Poincaré. Realizando un cambio en la variable tiempo, se elimina

el término $m(z)$ y, de este modo, la expresión de la compactificación de Poincaré en la carta (U_1, φ_1) es:

$$\dot{u} = v^d \left[-uP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right], \quad (2.1)$$

$$\dot{v} = -v^{d+1}P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right). \quad (2.2)$$

En la carta local (U_2, φ_2) , la expresión de la compactificación de Poincaré $\rho(F)$ es:

$$\dot{u} = v^d \left[P \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - uQ \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right], \quad (2.3)$$

$$\dot{v} = -v^{d+1}Q \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right), \quad (2.4)$$

y la expresión en la carta local (U_3, φ_3) es:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= P(u, v), \\ \dot{v} &= Q(u, v). \end{aligned}$$

Nótese que la expresión de la compactificación de Poincaré $\rho(F)$ en las cartas locales (V_i, ψ_i) , $i = 1, 2, 3$, es igual a la expresión en las cartas (U_i, φ_i) pero multiplicada por el término $(-1)^{d-1}$, siendo d el grado del campo vectorial F .

En la práctica no se realiza el proceso completo de construcción de la compactificación, sino que se introduce un cambio de coordenadas adecuado. Por ejemplo, para obtener la expresión de la compactificación en la carta (U_1, φ_1) se consideran las coordenadas (u, v) definidas por $(x_1, x_2) = (1/v, u/v)$, obteniendo un campo \bar{F}^u . De modo análogo, para obtener la expresión en la carta (U_2, φ_2) , se considera el cambio de coordenadas dado por $(x_1, x_2) = (u/v, 1/v)$, obteniendo un campo \bar{F}^v . En ambos casos, multiplicando por el término v^{d-1} se llega a las expresiones de la compactificación en las dos cartas.

2.2. Retrato de fase en el disco de Poincaré

Una vez realizada la construcción de la compactificación de Poincaré, podemos emplearla para obtener los diagramas de fases globales de sistemas polinomiales. Ahora podemos determinar el comportamiento de las órbitas en un entorno de singularidades en el ecuador de \mathbb{S}^2 .

A las singularidades de la compactificación de Poincaré $\rho(F)$ que se encuentran en $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ se le llaman **singularidades finitas** del campo vectorial F , en caso contrario, si las singularidades están en el ecuador de la esfera de Poincaré, \mathbb{S}^1 , se dice que son **singularidades infinitas** del campo F . En la práctica, las singularidades infinitas se corresponden con los puntos $v = 0$ de la compactificación. Nótese que si $y \in \mathbb{S}^1$ es una singularidad infinita, entonces también

lo es $-y$. Dado que la representación local del campo en $-y$ es la representación local en y multiplicada por $(-1)^{d-1}$, se deduce que la orientación de una órbita en un entorno de $-y$ coincide (respectivamente invierte) con la orientación de la órbita en y cuando d es impar (respectivamente par), siendo d el grado del campo vectorial F . Además, estos puntos aparecen diametralmente opuestos, por lo que es suficiente con estudiar el comportamiento de uno de ellos.

Se llama **disco de Poincaré** a la proyección ortogonal del hemisferio norte de la esfera de Poincaré en el plano $y_3 = 0$, es decir,

$$\mathbb{D}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 \leq 1, y_3 = 0\}.$$

Para determinar el diagrama de fases en el disco de Poincaré \mathbb{D}^2 , puesto que el flujo del campo $\rho(F)$ en la esfera \mathbb{S}^2 es simétrico, es suficiente con considerar el flujo en el hemisferio norte de la esfera y después proyectar sobre el disco de Poincaré.

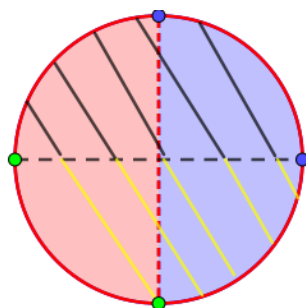


Figura 2.4: Disco de Poincaré

La zona azul de la Figura 2.4 representa la proyección de la carta U_1 y la zona rallada de negro la proyección de U_2 . La zona roja corresponde a la carta V_1 y la zona rallada de amarillo la proyección de V_2 . Los puntos azules son los orígenes de las cartas U_1 y U_2 y los verdes representan los orígenes de V_1 y V_2 .

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales, se estudian, en primer lugar las singularidades finitas y se determina su diagrama de fases local. Después, se calculan las singularidades infinitas en la expresión de la compactificación en la carta (U_1, φ_1) y se estudia su comportamiento. Para finalizar, se determina si el origen de la carta local (U_2, φ_2) es una singularidad y, en ese caso, se determina su diagrama local. Esto último es debido a que todos los puntos de la frontera del disco de Poincaré, es decir, los puntos del infinito, quedan recubiertos por las cartas locales (U_1, φ_1) y (V_1, ψ_1) salvo los orígenes de (U_2, φ_2) y (V_2, ψ_2) . Además, el comportamiento de las órbitas entorno a las singularidades en las cartas (V_i, ψ_i) , $i = 1, 2$, puede obtenerse a partir de los comportamientos en las singularidades antipodales correspondientes a las cartas (U_i, φ_i) $i = 1, 2$.

2.3. Ejemplos

A continuación se presentan algunos ejemplos de compactificación de Poincaré y de diagrama de fases en el disco \mathbb{D}^2 , para ver cómo funciona la compactificación de un sistema de ecuaciones

ciones diferenciales. Se obtendrán las cartas locales mediante las expresiones calculadas en la construcción de la compactificación y para las singularidades utilizaremos el **Teorema 1.7.3**.

Ejemplo 2.3.1. Determinar el retrato de fase en el disco de Poincaré del sistema

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1, \\x_2' &= -x_2,\end{aligned}\tag{1}$$

cuya expresión matricial es

$$\begin{pmatrix}x_1 \\x_2\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}1 & 0 \\0 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1 \\x_2\end{pmatrix}.$$

Este sistema tiene un punto singular finito único, el origen, que es un punto silla. Sea $F(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ el campo vectorial asociado al sistema. Entonces la expresión para $\rho(F)$ en la carta local U_1 es

$$\begin{aligned}u' &= -2u, \\v' &= -v,\end{aligned}$$

cuya expresión matricial es

$$\begin{pmatrix}u \\v\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}-2 & 0 \\0 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}u \\v\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, hay un punto singular único en U_1 , el origen, que es un nodo estable en el infinito. Dado que el grado de F es impar, el origen de V_1 también es otro nodo estable.

La expresión de $\rho(F)$ en la carta local U_2 es

$$\begin{aligned}u' &= 2u, \\v' &= v,\end{aligned}$$

cuya expresión matricial es

$$\begin{pmatrix}u \\v\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}2 & 0 \\0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}u \\v\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, hay un punto singular único en U_2 , el origen, que es un nodo inestable en el infinito. Dado que el grado de F es impar, el origen de V_1 también es otro nodo inestable.

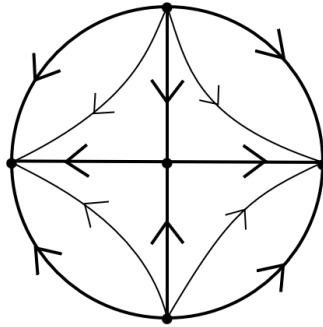


Figura 2.5: Retrato de fase en el disco de Poincaré del sistema (1).

Así tenemos en el disco de la Figura 2.5 un punto singular finito, y dos pares de puntos singulares infinitos antipodalmente identificados, y cuatro separatrices finitas no singulares y cuatro separatrices infinitas no singulares, con cuatro regiones canónicas.

En el dibujo de la Figura 2.5 vemos las separatrices con color mas grueso y las orbitas ordinarias son las más delgadas.

Ejemplo 2.3.2. Determinar el retrato de fase en el disco de Poincaré del sistema

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_1 + x_2, \\x_2' &= x_2.\end{aligned}\tag{2}$$

Sea $F(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$ su campo vectorial asociado y $d = 1$ el grado de dicho sistema. Determinamos sus singularidades.

Singularidades finitas.

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 &= 0, \\x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Luego, $(0, 0)$ es la única singularidad, y la matriz Jacobiana de F viene dada por

$$DF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyos valores y vectores propios son $\lambda_1 = -1 < 0$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\lambda_2 = 1 > 0$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Por lo que $(0, 0)$ es un punto silla. El retrato de fase de esta singularidad se ilustra en la Figura 2.6.

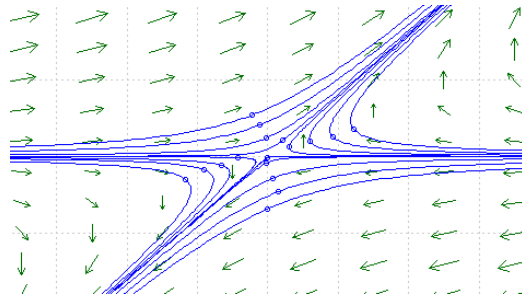


Figura 2.6: Retrato de fase de singularidades finitas.

Singularidades infinitas ($v = 0$). La expresión de la compactificación de Poincaré $\rho(F)$ en la carta local (U_1, φ_1) es:

$$\begin{aligned} u' &= 2u - u^2, \\ v' &= v - uv, \end{aligned}$$

sea $\rho(F)|_{U_1}(u, v) = (2u - u^2, v - uv)$ el campo vectorial asociado.

Singularidades

$$\begin{aligned} 2u - u^2 &= 0, \\ v - uv &= 0, \end{aligned}$$

las singularidades son $(0, 0)$ y $(2, 0)$, la matriz Jacobiana del campo anterior es

$$D\rho(F)|_{U_1}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 - 2u & 0 \\ -v & 1 - u \end{pmatrix},$$

evaluando en $(0, 0)$ y $(2, 0)$ se obtienen

$$D\rho(F)|_{U_1}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$, y

$$D\rho(F)|_{U_1}(2, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$. Por lo que $(0, 0)$ es nodo repulsor. Además, como $d = 1$, el origen de V_1 también tendrá carácter repulsor.

El punto $(2, 0)$ es nodo atractor. Además, como $d = 1$, la singularidad antipodal también tendrá carácter atractor en la carta (V_1, ψ_1) .

La expresión de la compactificación de Poincaré en la carta local (U_2, φ_2) es:

$$\begin{aligned} u' &= -2u + 1, \\ v' &= -v. \end{aligned}$$

Nótese que $(0, 0)$ no es singularidad del sistema, mientras que $(1/2, 0)$ es singularidad pero al evaluarla en la matriz Jacobiana del campo asociada al sistema se tendrá

$$D\rho(F)|_{U_2}(1/2, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

el cual es un caso ya tratado anteriormente.

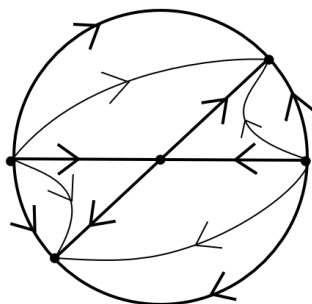


Figura 2.7: Retrato de fase en el disco de Poincaré del sistema (2).

Así tenemos en el disco de la Figura 2.7 un punto singular finito, dos pares infinitos, cuatro separatrices no singulares finitas y cuatro separatrices no singulares infinitas, con cuatro regiones canónicas.

Observación 9. Por el **Teorema 1.6.2**, podemos concluir que el campo vectorial de este ejemplo es topológicamente equivalente con el del ejemplo anterior en el plano. Más aún, extendiendo tal teorema de manera natural al infinito, podemos decir que estos dos campos de vectores son topológicamente equivalentes incluso en el disco de Poincaré.

Observación 10. Es claro que no es necesario lo anterior para concluir que los campos vectoriales son equivalentes, pues es fácil ver que $h(x_1, x_2) = (-x_1 - x_2, -x_2)$ define una conjugación entre ellos. En la Figura 2.8 y 2.9 podemos notar que los retratos de fase son los mismos simplemente uno esta rotado respecto al otro.

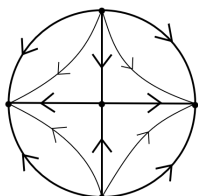


Figura 2.8: Retrato de fase en el disco de Poincaré del sistema (1).

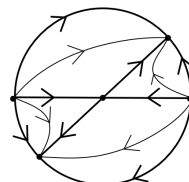


Figura 2.9: Retrato de fase en el disco de Poincaré del sistema (2).

Ejemplo 2.3.3. Determinar el retrato de fase en el disco de Poincaré del siguiente sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned}x_1' &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -x_1^2, \\x_2' &= \frac{\partial H}{\partial x_1} = 1 + 2x_1x_2,\end{aligned}\tag{3}$$

cuya función Hamiltoniana es

$$H(x_1, x_2) = x_1(1 + x_1x_2) = x_1 + x_1^2x_2.$$

Es fácil ver que el sistema no posee singularidades finitas. Determinemos las singularidades infinitas.

La compactificación en la carta U_1 viene dada por

$$\begin{aligned}u' &= 3u + v^2, \\v' &= v,\end{aligned}$$

y asociamos $\rho(F)|_{U_1}(u, v) = (3u + v^2, v)$ al sistema anterior, cuyo punto singular único es $(0, 0)$. Al sacar la matriz Jacobiana obtenemos

$$D\rho(F)|_{U_1}(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde concluimos que el origen de U_1 es un nodo repulsor, y como $d = 2$, el origen de V_1 es un nodo atractor.

La compactificación en la carta U_2 viene dada por

$$\begin{aligned}u' &= -3u^2 - uv^2, \\v' &= -v^3 - 2uv,\end{aligned}$$

cuya singularidad única es $(0, 0)$. Sea $\rho(F)|_{U_2}(u, v) = (-3u^2 - uv^2, -v^3 - 2uv)$ el campo asociado al sistema, la matriz Jacobiana evaluada en la singularidad es

$$D\rho(F)|_{U_2}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el cual es un caso degenerado. Como se trata de un sistema Hamiltoniano, se sabe que las órbitas del sistema están sobre las curvas de nivel, las cuales se ilustran en la Figura 2.10, con esto se tienen los elementos necesarios para determinar el retrato de fase en el disco de Poincaré.

Analicemos las curvas de nivel: $x_1(1 + x_1x_2) = C$, de esto obtenemos la representación de las órbitas en el disco de Poincaré de la siguiente manera:

- Las de color rojo, si $C < 0$,
- Las de color azul, si $C > 0$,

- Las de color negro (separatrices), si $C = 0$.

También podemos saber cual es el máximo o el mínimo de estas órbitas realizando lo siguiente: se deriva la expresión que proporcionan las curvas de nivel y se iguala a 0, $x_2' = -\frac{1}{x_1^3}(2C - x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2C$ estos son los puntos críticos, al realizar la segunda derivada se obtiene $x_2'' = x_1^{-3}[1 - 3(x_1 - 2C)x_1^{-1}]$, al evaluar los puntos críticos en x_2'' se observa que la naturaleza del punto (ser máximo o mínimo) depende del parámetro C , $x_2''(2C) = \frac{1}{(2C)^3}$.

Analizando la compactificación en U_2 teniendo en cuenta que $1 + x_1x_2 = 0$, y sabiendo que $x_1 = \frac{u}{v}$ y $x_2 = \frac{1}{v}$, sustituyendo se tiene

$$1 + x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{v} = 0 \Leftrightarrow v^2 + u = 0,$$

por lo que los cambios de comportamiento se da en la parábola $u = -v^2$ y en la recta $u = 0$, que se obtiene de igualar $x_1 = \frac{u}{v}$ a 0.

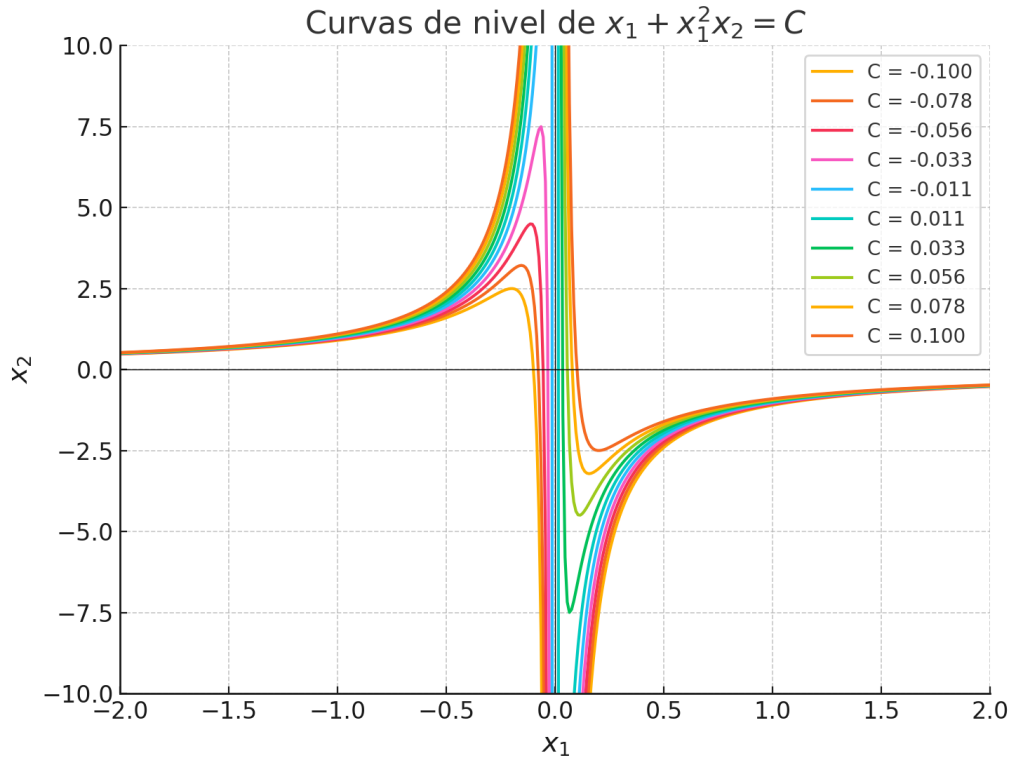


Figura 2.10: Curvas de nivel de H

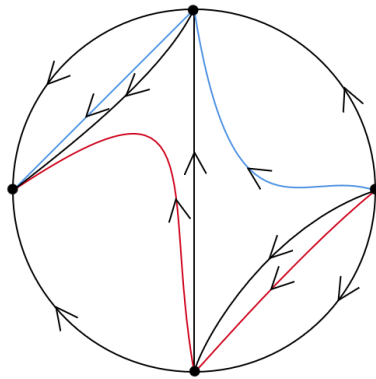


Figura 2.11: Retrato de fase en el disco de Poincaré del sistema (3).

Así tenemos en el disco de Poincaré de la Figura 2.11 solo dos pares de puntos singulares infinitos, tres separatrices no singulares finitas, cuatro separatrices no singulares infinitas y cuatro regiones canónicas.

Dado que uno de los puntos singulares infinitos que encontramos es degenerado, no pudimos aplicar la teoría hiperbólica. Aquí pudimos utilizar propiedades de curvas algebraicas, ya que el campo es polinomial y Hamiltoniano, ¡con una función Hamiltoniana muy simple! Pero en general, esto no ocurre: puede ser que el campo no sea Hamiltoniano o, incluso si lo es, puede tener una función Hamiltoniana muy complicada de analizar en sus curvas de nivel. Por lo tanto, nos motivamos a estudiar más: de hecho, este sería el punto de partida para la resolución de singularidades a través de la teoría de Blow Ups, ¡que quedará para el próximo trabajo!

Bibliografía

- [1] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, 1 ed., Rio de Janeiro, Brazil: IMPA, 1979.
- [2] F. Dumortier, J. Llibre, J. Artes, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, 2006a ed., Berlin, Alemania: Springer, 2006.
- [3] A. Vázquez, “Introducción a la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales,” Tesis de licenciatura, Facultad de Matemáticas, Univ. de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, España, 2019/2020.
- [4] M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos*, 2 ed., San Diego, California, USA: Elsevier, 2004.
- [5] F. Braun and R. Thomaz, “Revisiting Markus-Neumann theorem,” *São Paulo J.Math.Sci.*, vol. 19, no. 8, Jan., 2025. Consultado: 3, Jan. 2025, doi: <https://doi.org/10.1007/s40863-024-00483-y>
- [6] R. Thomaz, “On the classification of two dimensional flows”, Dissertation for the degree of Master in Mathematics, DM, UFSCar, São Paulo, Brazil, 2023.
- [7] V. Jiménez, *Ecuaciones Diferenciales: Cómo Aprenderlas, Cómo Enseñarlas*, 1 ed., Murcia, España: Univ. de Murcia, Servicio de Publicaciones, 2000.
- [8] E. Lima, *Espaços Métricos*, 1 ed., Rio de Janeiro, Brazil: IMPA, 1997.
- [9] J. Munkres, *Topología*, 2 ed., Madrid, España: Prentice Hall, 2002.