

Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Física



Trabajo de grado

Estudio de la resonancia paramétrica durante la inflación
cósmica

Tesis presentada por
Alma Vanessa Sánchez Deras

Para optar al grado de
Licenciada en Física

Asesor
Dr. Raúl Antonio Henríquez Ortiz

San Salvador, El Salvador

Abril 2026

Autor



Br. Alma Vanessa Sánchez Deras

Asesor



Dr. Raúl Antonio Henríquez Ortiz

Tribunal calificador



Lic. Francisco Américo Mejía



Dr. Raúl Antonio Henríquez Ortiz



Lic. Franklin Moisés Mejía

Autoridades

M.Sc. Juan Rosa Quintanilla Quintanilla
Rector

Dra. Evelyn Beatriz Farfán Mata
Vicerrectora académica

Msc.Roger Armando Arias Alvarado
Vicerrector administrativo

Lic. Pedro Rosalío Escobar Castaneda
Secretario General

Autoridades Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

M.Sc. Ángela Gudelia Portillo de Pérez
Decanato

Dr. José Nerys Funes Torres
Vicedecanato

Nelson Ediltrudys Gomez Cedillos
Director de Escuela de Física

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer primero a Dios por todo lo que me ha dado, especialmente por mi familia, a quien también le estoy profundamente agradecida. En primer lugar, a mi mamá, por su apoyo y amor incondicional, y por su ejemplo de perseverancia y resiliencia, por enseñarme siempre a mantener un corazón alegre y noble. Asimismo, a mi papá, por su amor y por su ejemplo de disciplina, fortaleza ética y humildad. A mi hermano, por animarme siempre, por su apoyo, consuelo y alegría.

Por otra parte, quiero agradecer a mi asesor Raúl, por ser un gran maestro a lo largo de la carrera, por su forma motivadora de enseñar y por su asesoría, sin la cual esta tesis no habría sido posible. Asimismo, agradezco a los docentes que me formaron con dedicación, recordando con especial cariño al Licenciado Soriano, cuya memoria permanece viva. Finalmente, a los amigos que conocí durante la carrera, en especial a mi amiga (cuya amistad me ha acompañado desde el inicio de este camino), quiero agradecerles a cada uno de ellos por su cariño sincero y su apoyo.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	IV
Índice general	VI
Índice de figuras	VIII
Índice de cuadros	XI
Resumen	XII
Introducción	1
1 Fundamentos de la cosmología	2
1.1. Principio cosmológico	2
1.2. Relatividad general y su rol en cosmología	3
1.3. Problemas del modelo del Big Bang caliente	12
2 Fundamentos de la inflación	16
2.1. Inflación	16
2.2. Transición post–inflacionaria	20
3 Metodología	25
3.1. Metodología numérica	25
3.2. Modelo y potencial	25
3.3. Configuración numérica	26
3.4. Fondos cosmológicos considerados	26
3.5. Condiciones iniciales	27
3.6. Observables y criterios de análisis	28
3.7. Estructura de la simulación	28
4 Resultados	33
4.1. Evolución del inflatón promediado en volumen	34
4.2. Efecto de la expansión cosmológica en las fluctuaciones	40
4.3. Evolución de las fracciones de energía	44
4.4. Efecto de la expansión cosmológica en las fracciones de energía	45
5 Conclusiones	51

Bibliografía	53
A Graficas	55
A.1. Graficas de fracciones de energía	55
A.2. Gráficas del inflatón promediado en volumen	56

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Tres medidas de distancia en el Universo euclidiano en expansión, dentro del modelo cosmológico de concordancia: la distancia comóvil χ , la distancia angular d_A y la distancia de luminosidad d_L [1].	5
1.2. Las anisotropías del fondo cósmico de microondas (CMB) observadas por la misión Planck [6].	13
1.3. La escala del horizonte (línea verde) y una escala física (línea roja) en función del factor de escala a [2].	15
2.1. Esquema del potencial del inflatón $V(\phi)$, mostrando la evolución del inflatón (representado por el punto rojo), desde ϕ_{CMB} hasta ϕ_{fin} y su posterior oscilación en una región de potencial cuártico asociada al calentamiento postinflacionario [Elaboración propia].	21
3.1. Flujograma de la simulación del modelo $L\phi^4$ sin expansión cosmológica (espacio-tiempo de Minkowski).	30
3.2. Flujograma de la simulación del modelo $L\phi^4$ con expansión cosmológica tipo FLRW.	31
4.1. Evolución temporal del inflatón promediado en volumen $\langle\tilde{\phi}(\tilde{\eta})\rangle$ (línea verde) y de la amplitud de sus fluctuaciones espaciales $\sqrt{\langle\delta\tilde{\phi}^2(\tilde{\eta})\rangle}$ (línea roja), para valores pequeños del parámetro de acoplamiento $q = 0$, $q = 6.3 \times 10^{-3}$ y $q = 0.1$. En este régimen, las fluctuaciones permanecen suprimidas y el sistema evoluciona cercano al régimen lineal, indicando la ausencia de resonancia paramétrica eficiente.	35
4.2. Evolución del inflatón promediado en volumen y de sus fluctuaciones para valores intermedios del parámetro de acoplamiento $q = 1$, $q = 2$ y $q = 5$. Se observa el inicio de la amplificación de las fluctuaciones durante la fase de resonancia, aunque con crecimiento limitado y retro-reacción tardía, característicos de un régimen de transición entre resonancia estrecha y resonancia ancha.	37
4.3. Evolución temporal del modo homogéneo del inflatón y de la amplitud de sus fluctuaciones para valores del parámetro de acoplamiento correspondientes a resonancia ancha moderada ($q = 10$, $q = 20$ y $q = 30$). Durante la fase de resonancia se observa un crecimiento rápido de las fluctuaciones, acompañado por una disminución progresiva de la coherencia del modo homogéneo, indicando una transferencia eficiente de energía y el inicio del régimen no lineal.	38

- 4.4. Evolución del inflatón promediado en volumen y de sus fluctuaciones espaciales para valores grandes del parámetro de acoplamiento $q = 100$, $q = 500$ y $q = 1000$. En este régimen de resonancia ancha fuerte, las fluctuaciones crecen de manera explosiva y alcanzan amplitudes comparables al modo homogéneo en tiempos cortos, dando lugar a una retro-reacción temprana y a una dinámica fuertemente no lineal. 39
- 4.5. Tiempo conforme adimensional $\tilde{\eta}_{br}$ asociado al inicio operacional de la retro-reacción o, en los casos sin resonancia eficiente, a una escala de referencia tardía de la dinámica, como función del parámetro de acoplamiento $q = g^2/\lambda$. Para valores pequeños de q , la ausencia de amplificación resonante apreciable desplaza este tiempo hacia valores grandes. A medida que q aumenta, el inicio de la pérdida de coherencia del condensado homogéneo se adelanta de manera no monótona, reflejando la estructura de bandas de inestabilidad asociada al modelo cuártico. En el régimen de resonancia ancha, la retro-reacción aparece tempranamente, indicando una transferencia de energía más eficiente hacia modos inhomogéneos. 41
- 4.6. Comparación de la evolución del inflatón promediado en volumen y de sus fluctuaciones espaciales en escenarios sin expansión cosmológica (columna izquierda) y con expansión cosmológica auto-consistente (columna derecha). Las filas superior, intermedia e inferior corresponden a $q = 0$, $q = 5$ y $q = 500$, respectivamente. La expansión cosmológica introduce un término de fricción que amortigua el crecimiento de las fluctuaciones y retrasa el inicio de la retro-reacción, sin suprimir la resonancia en el régimen de acoplamiento fuerte. 42
- 4.7. Evolución temporal de las fracciones de energía del sistema en tiempo conforme $\tilde{\eta}$ para valores pequeños del parámetro de acoplamiento $q = 0$, $q = 6 \times 10^{-3}$ y $q = 10^{-1}$, correspondientes al régimen de resonancia estrecha. La energía está dominada por el inflatón, con la fracción de energía potencial Ω_{v0} cercana a la unidad durante toda la evolución. Las contribuciones cinéticas y de gradiente del campo secundario permanecen suprimidas varios órdenes de magnitud, indicando una transferencia de energía ineficiente y la ausencia de resonancia paramétrica efectiva. 46

4.8. Fracciones de energía en función del tiempo conforme $\tilde{\eta}$ para valores intermedios del acoplamiento $q = 1$, $q = 2$ y $q = 5$, correspondientes al régimen de transición entre resonancia estrecha y resonancia ancha. Las contribuciones cinéticas y de gradiente del campo secundario comienzan a crecer, aunque sin presentar una amplificación sostenida. La transferencia de energía desde el inflatón es parcial y se manifiesta en un comportamiento intermitente, característico de bandas de resonancia aún poco desarrolladas. 47

4.9. Evolución de las fracciones de energía del sistema para $q = 10$, $q = 20$ y $q = 30$, representativos del régimen de resonancia ancha moderada. Se observa un crecimiento rápido de las fracciones de energía asociadas al campo secundario, Ω_{k1} y Ω_{g1} , acompañado por una disminución significativa de la energía potencial del inflatón Ω_{v0} . Este comportamiento indica una transferencia de energía no perturbativa y marca el inicio del régimen de retro-reacción, donde la dinámica deja de estar dominada por el modo homogéneo. 48

4.10. Fracciones de energía en tiempo conforme $\tilde{\eta}$ para valores grandes del acoplamiento $q = 100$, $q = 500$ y $q = 1000$, correspondientes al régimen de resonancia ancha fuerte. Las contribuciones del campo secundario crecen de manera explosiva y alcanzan fracciones significativas de la energía total en tiempos tempranos. La retro-reacción aparece rápidamente, dando lugar a una saturación temprana del crecimiento resonante y a una evolución altamente no lineal, caracterizada por oscilaciones irregulares y pérdida de coherencia del inflatón. 49

4.11. Comparación de las fracciones de energía del sistema para universos sin expansión (izquierda) y con expansión cosmológica (derecha), para $q = 0$ (fila superior), $q = 5$ (fila intermedia) y $q = 500$ (fila inferior). En ausencia de expansión, la resonancia paramétrica conduce a una transferencia de energía más eficiente y a un crecimiento más abrupto de las contribuciones del campo secundario. La inclusión de la expansión cosmológica introduce fricción de Hubble, suavizando el crecimiento resonante, retrasando el inicio de la retro-reacción y modificando la redistribución de energía entre los distintos componentes del sistema. 50

ÍNDICE DE CUADROS

3.1. Parámetros utilizados en las simulaciones.	29
4.1. Clasificación operativa de los regímenes de resonancia utilizados en este trabajo según el valor del parámetro q	34
4.2. Tiempo conforme adimensional $\tilde{\eta}_{br}$ asociado al inicio operacional de la pérdida de coherencia del modo homogéneo para distintos valores del parámetro de acoplamiento $q = g^2/\lambda$ para los casos eficientes es el inicio de la retro-reacción, estimado a partir del crecimiento de las fluctuaciones del inflatón y de la modificación apreciable de su dinámica promedio. En los casos sin resonancia eficiente, este valor debe interpretarse únicamente como una escala temporal de referencia dentro del intervalo simulado.	40

RESUMEN

En esta tesis se investigó la dinámica del precalentamiento postinflacionario mediante simulaciones numéricas no lineales en un modelo inflacionario cuártico en el que el inflatón está acoplado a un campo escalar secundario. El objetivo fue analizar cómo el parámetro de acoplamiento entre ambos campos afecta la eficiencia del precalentamiento, la estructura de bandas de inestabilidad asociadas a la resonancia paramétrica y la transición hacia el régimen no lineal. Las simulaciones se realizaron con el código `CosmoLattice`, utilizando un modelo de potencial cuártico, lo que permitió explorar distintos regímenes dinámicos, desde resonancia estrecha hasta resonancia ancha fuerte, así como comparar escenarios con y sin expansión cosmológica.

Se analizaron la evolución del inflatón promediado en volumen, el crecimiento de sus fluctuaciones espaciales y la redistribución de la energía entre sus componentes cinética, potencial y de gradiente. Asimismo, se identificó operacionalmente el inicio del régimen de retro-reacción y se evaluó el efecto de la expansión cosmológica sobre la eficiencia de la resonancia. Dado que las simulaciones se efectuaron en variables reescaladas internas del programa, los resultados se interpretan principalmente en términos adimensionales, con énfasis en la dinámica no lineal del sistema más que en una fijación observacional de parámetros.

Los resultados mostraron que, para valores pequeños de q , la resonancia paramétrica permanece ineficiente y la dinámica está dominada por el modo homogéneo del inflatón. En cambio, para valores grandes de q , emerge una amplificación resonante altamente eficiente de los modos inhomogéneos, que produce una transferencia no perturbativa de energía y desencadena una retro-reacción temprana, conduciendo rápidamente al régimen no lineal. Además, se encontró que la expansión cosmológica amortigua el crecimiento resonante y retrasa la retro-reacción, sin impedir el desarrollo del precalentamiento en el régimen de acoplamiento fuerte.

En conjunto, estos resultados confirman el papel central de la resonancia paramétrica en la dinámica postinflacionaria y muestran la importancia de las simulaciones no perturbativas para describir la transferencia de energía durante las primeras etapas del recalentamiento del Universo temprano. El trabajo proporciona así una caracterización numérica de la dependencia del precalentamiento con el acoplamiento entre campos y una base para estudios futuros que incorporen disipación, termalización y conexiones fenomenológicas más directas con observables cosmológicos.

INTRODUCCIÓN

La inflación cósmica ha sido propuesta como una extensión del modelo del Big Bang para resolver diversas inconsistencias fundamentales, tales como el problema del horizonte, el problema de la planitud y la ausencia de monopolos magnéticos [1, 2]. Esta teoría postula que el Universo experimentó una fase de expansión exponencialmente acelerada en una fracción de segundo posterior al tiempo de Planck. Dicha expansión puede explicarse mediante la dinámica de un campo escalar llamado inflatón, cuya evolución temporal domina la energía del Universo durante este periodo.

Al finalizar la inflación, el inflatón comienza a oscilar en torno al mínimo de su potencial. En esta etapa, conocida como precalentamiento, se espera que ocurra una transferencia de energía del inflatón hacia otros campos, iniciando la transición hacia un Universo caliente, proceso que posteriormente se estabiliza mediante la termalización de las partículas producidas. Una de las características fundamentales del precalentamiento es la posibilidad de producción explosiva de partículas mediada por resonancia paramétrica, un mecanismo que involucra crecimiento exponencial de modos de campo acoplados, generando inestabilidades que requieren un tratamiento numérico detallado.

Capítulo 1

FUNDAMENTOS DE LA COSMOLOGÍA

1.1. Principio cosmológico

El modelo que mejor reproduce todas las observaciones cosmológicas es el llamado modelo estándar cosmológico, o bien, el modelo Λ CDM (por sus siglas en inglés, *Cold Dark Matter*). En este modelo, Λ se refiere a la constante cosmológica asociada a la energía oscura, mientras que CDM se refiere a la materia oscura fría, ambos componentes fundamentales de nuestro Universo.

Este modelo tiene como principio fundamental el llamado principio cosmológico, el cual, basándose en diversas observaciones, establece que el Universo es homogéneo (todo observador tiene la misma evidencia observacional independientemente de dónde se encuentre) e isotrópico (produce la misma evidencia observacional en cualquier dirección). Es decir, bajo transformaciones de traslación y rotación, un observador observaría la misma estructura del Universo.

Una evidencia observacional de este principio se puede apreciar en el alto grado de isotropía presente en las observaciones del espectro de temperaturas del Fondo Cósmico de Microondas (CMB, por sus siglas en inglés).

Si el principio cosmológico es válido, resulta más sencillo concebir la posible geometría del espacio-tiempo a grandes escalas. Adicionalmente, dada la velocidad finita de la luz, entendemos que las observaciones de las galaxias revelan información sobre cómo era el Universo cuando la luz detectada fue emitida y, por lo tanto, es posible establecer con cierta precisión aspectos de la dinámica del espacio-tiempo.

Esta información se codifica en una métrica, sobre la cual se introduce un tensor de energía-momento que contiene la información sobre el contenido del Universo, de manera consistente con el principio cosmológico. La geometría que mejor se adapta a este principio y a las observaciones de la expansión del Universo está representada por la métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW).

Esta métrica, compatible con el principio cosmológico, admite que la componente espacial del espacio-tiempo sea plana o curva. Observacionalmente, diversas mediciones han conducido al consenso de que el espacio en el que vivimos es plano. Dado que el principio cosmológico también admite un espacio curvo, surge naturalmente la pregunta

sobre cuál es el origen de la planitud del Universo.

1.2. Relatividad general y su rol en cosmología

La relatividad general describe la gravedad como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo[3]. En este marco, la geometría está determinada por la distribución de materia y energía, y a su vez dicha geometría gobierna el movimiento de los cuerpos. Esta teoría resulta fundamental en cosmología, ya que permite modelar un universo dinámico, homogéneo e isotrópico en expansión [1].

Matemáticamente, las coordenadas del espacio-tiempo se representan mediante las cuatro componentes de un cuádrivector de posición x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), donde x^0 corresponde a la componente temporal y los índices 1, 2, 3 representan las coordenadas espaciales. A lo largo de este trabajo se adopta la convención usual en relatividad general, según la cual los índices latinos (i, j, k) denotan coordenadas espaciales, mientras que los índices griegos (μ, ν, α, β) recorren todas las coordenadas del espacio-tiempo.

En relatividad general, el tensor métrico define el producto escalar en el espacio-tiempo y determina la forma en que se miden las distancias entre eventos. Estas distancias se expresan mediante el intervalo espacio-temporal [1, 3]

$$ds^2 = dx \cdot dx = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

En la expresión anterior se ha utilizado la convención de suma de Einstein, según la cual los índices repetidos implican una sumatoria sobre dichos índices. Como caso simple de espacio-tiempo plano, se introduce la métrica de Minkowski, dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu},$$

con componentes $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. El tensor métrico y su inversa satisfacen además la relación

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu. \quad (1.2)$$

En el espacio-tiempo de Minkowski, las partículas se desplazan en líneas rectas en ausencia de fuerzas. En un espacio-tiempo curvo, esta noción se generaliza a la de geodésica, es decir, la trayectoria extrema entre dos puntos. En relatividad general, una partícula libre sigue precisamente una geodésica.

Para describir dichas trayectorias, se introduce un parámetro afín λ , respecto del cual la ecuación geodésica se escribe como

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (1.3)$$

Aquí, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ son los símbolos de Christoffel, los cuales se definen en términos del tensor métrico como

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (1.4)$$

Los índices elevados en $g^{\mu\nu}$ indican que se trata del tensor métrico inverso de $g_{\mu\nu}$; es decir, $g^{\mu\nu}$ corresponde a la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$.

Si bien la métrica de Minkowski describe un espacio-tiempo plano y sin expansión, en cosmología es necesario emplear una geometría dinámica que permita describir un universo homogéneo e isotrópico en expansión. Para ello se utiliza la métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW). En este trabajo, además del caso Minkowski como escenario sin expansión, se consideró también un fondo FLRW para incorporar la expansión cosmológica de manera auto-consistente.

En el marco de la relatividad general, el espacio-tiempo no es fijo ni estático, sino que evoluciona de acuerdo con el contenido energético del Universo. Por ello, la medición de distancias en cosmología es más sutil que en la física clásica o en geometrías euclidianas. La métrica del espacio-tiempo determina cómo se miden las distancias y los intervalos de tiempo, y en el caso cosmológico esta dependencia está gobernada por el factor de escala $a(t)$, que describe la expansión del Universo con el tiempo.

Existen dos formas comunes de medir distancias en cosmología: La relatividad general nos dice que la métrica del espacio-tiempo determina cómo se mide la distancia y el tiempo, y esa métrica depende del factor de escala $a(t)$, que describe cómo se expande el Universo con el tiempo [1, 3]. Existen dos formas comunes de medir distancias:

- Distancia comóvil: permanece constante con el tiempo, ya que sigue la cuadrícula de coordenadas que se expande con el Universo.
- Distancia física: cambia con el tiempo porque crece a medida que el Universo se expande.

Ninguna de las dos mide siempre lo que realmente nos interesa en observaciones astronómicas. Un ejemplo es la luz proveniente de una galaxia lejana: si la galaxia emitió la luz cuando el Universo tenía un factor de escala mucho menor (por ejemplo, a un corrimiento al rojo $z = 3$) y la luz llega hoy tras una gran expansión del Universo, no es evidente qué distancia debe usarse para relacionar propiedades como la luminosidad de la galaxia con el flujo observado.

Por ello, el punto de partida para calcular distancias cosmológicas es la **distancia comóvil**, que se define sobre la rejilla de coordenadas del Universo y es matemáticamente sencilla. En este marco, durante un intervalo de tiempo pequeño dt , la luz recorre una distancia comóvil $dx = dt/a$. Por lo tanto, la distancia comóvil total recorrida por la luz que comenzó su viaje desde un objeto en el tiempo t , cuando el factor de escala era a (o el corrimiento al rojo era $z = 1/a - 1$)[1] es:

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_{a(t)}^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (1.5)$$

Aquí hemos cambiado la variable de integración de t' a a' , lo cual introduce el factor adicional $\dot{a} = aH$ en el denominador, y finalmente a z' . Como deja claro la expresión final, para valores pequeños de z , podemos escribir la distancia comóvil cosmológica como $\chi \approx z/H_0$. Como se muestra en la Figura 1.1, las distintas definiciones de distancia en cosmología distancia comóvil, distancia angular y distancia de luminosidad difieren debido a la expansión del Universo.

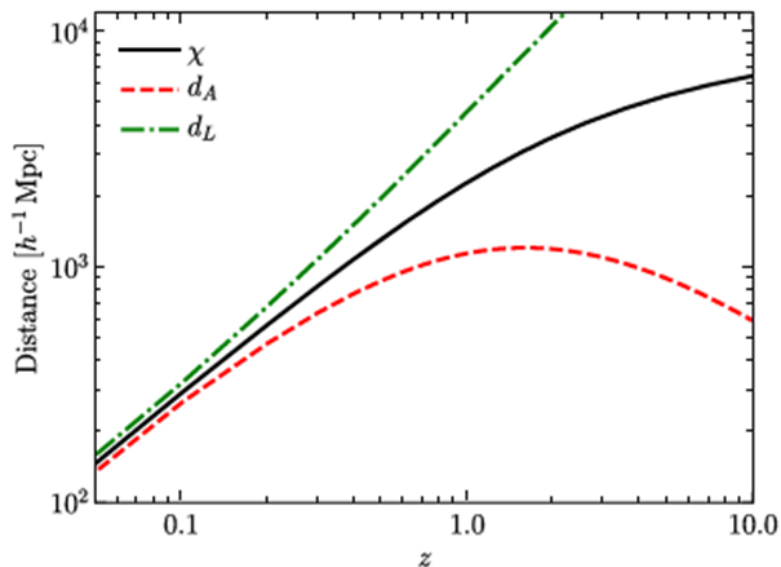


Figura 1.1: Tres medidas de distancia en el Universo euclidiano en expansión, dentro del modelo cosmológico de concordancia: la distancia comóvil χ , la distancia angular d_A y la distancia de luminosidad d_L [1].

En el estudio del Universo en expansión, homogéneo e isotrópico, el análisis se centra en la caracterización de sus componentes fundamentales, tales como la materia, la radiación y otras formas de contenido energético. La isotropía del espacio impone restricciones estrictas sobre las cantidades físicas relevantes: en particular, la existencia

de un momento o una velocidad promedio no nula introduciría direcciones privilegiadas, rompiendo dicha simetría. En consecuencia, la descripción macroscópica del contenido del Universo se realiza exclusivamente en términos de cantidades promedio, siendo la densidad de energía y la presión las variables dinámicas esenciales.

De manera análoga a como la energía y el momento de una partícula se combinan en el cuatrimomento relativista, la densidad de energía y la presión se integran en un único objeto tensorial, el tensor energía-momento. En el marco de la relatividad general, este tensor describe la distribución de materia y energía en el espacio-tiempo y actúa como fuente de la curvatura gravitacional.

La distribución de materia y energía se representa mediante el tensor energía-momento T_ν^μ . Para un fluido perfecto, compatible con la homogeneidad e isotropía del Universo descrito por la métrica de FLRW, dicho tensor adopta una forma diagonal en el sistema de coordenadas comóviles, dada por

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P), \quad (1.6)$$

donde ρ denota la densidad promedio de energía y P la presión isotrópica del fluido que modela el contenido del Universo. Aunque esta expresión coincide formalmente con la de un fluido ideal en reposo, no todos los componentes cosmológicos se comportan estrictamente como fluidos clásicos.

El tensor energía-momento desempeña un papel central en las ecuaciones de campo de Einstein, y su evolución temporal refleja la conservación local de la energía y el momento. En el límite clásico, en ausencia de gravedad y para velocidades pequeñas, dicha conservación se describe mediante las ecuaciones de continuidad y de Euler. Sin embargo, en relatividad general no es posible emplear derivadas ordinarias, ya que estas dependen del sistema de coordenadas. En su lugar, se introduce la derivada covariante, lo que conduce a la condición de conservación

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu \equiv \frac{\partial T_\nu^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T_\nu^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha T_\alpha^\mu = 0. \quad (1.7)$$

Esta ecuación constituye la formulación relativista general de las ecuaciones de continuidad y de Euler, o, de manera más general, la expresión matemática de la conservación local de la energía y el momento.

Otro objeto fundamental en la descripción geométrica del espacio-tiempo es el tensor de Riemann, el cual contiene información completa sobre su curvatura. Este tensor se define como

$$R_{\alpha\mu\nu}^{\beta} \equiv \Gamma_{\alpha\nu,\mu}^{\beta} - \Gamma_{\gamma\nu}^{\beta}\Gamma_{\alpha\mu}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^{\beta} + \Gamma_{\gamma\mu}^{\beta}\Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma}, \quad (1.8)$$

y satisface la relación de conmutación de derivadas covariantes

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]V^{\beta} = R_{\alpha\mu\nu}^{\beta}V^{\alpha}. \quad (1.9)$$

Un aspecto relevante del tensor de Riemann es que, al expandir la métrica hasta segundo orden en las coordenadas x^{μ} y fijar un sistema de referencia centrado en un punto arbitrario de la variedad riemanniana, esta puede aproximarse por

$$g_{\mu\nu} \approx \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\nu\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}, \quad (1.10)$$

donde

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda}R_{\nu\alpha\beta}^{\lambda}. \quad (1.11)$$

La expansión dada en Ec.1.10 muestra que el tensor de Riemann cuantifica las desviaciones locales de la métrica del espacio-tiempo con respecto a la métrica plana, proporcionando una medida precisa de la curvatura intrínseca de la variedad.

A partir del tensor de Riemann se define el tensor de Ricci mediante la contracción de dos de sus índices,

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\mu\beta}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\nu\alpha\mu\beta}, \quad (1.12)$$

así como el escalar de Ricci, definido por

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (1.13)$$

El tensor de Ricci es simétrico, $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$, y junto con el escalar de Ricci permite definir el tensor de Einstein como

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R. \quad (1.14)$$

El tensor de Einstein, de carácter puramente geométrico, se relaciona con el tensor energía-momento mediante las ecuaciones de campo de Einstein,

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T^{\mu\nu} \equiv \kappa T^{\mu\nu}, \quad \kappa \equiv \frac{8\pi G_N}{c^4}, \quad (1.15)$$

donde G_N es la constante gravitacional de Newton y c la velocidad de la luz. En unidades naturales, tomando $G_N = c = 1$, las ecuaciones de campo se reducen a

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

La métrica FLRW representa la geometría que mejor se adapta al principio cosmológico y a las observaciones de la expansión del Universo. El intervalo correspondiente está dado por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right], \quad (1.17)$$

Donde (t, r, θ, ϕ) son coordenadas comóviles, la dependencia temporal es agregada por medio del factor de escala. Además k es el parámetro de curvatura y puede tomar los siguientes valores: $k = 1$ para un espacio cerrado, $k = 0$ para un espacio plano y $k = -1$ para un espacio abierto. Podemos obtener una relación entre las distancias físicas (d_f) y las distancias comóviles χ , a partir del factor de escala, como sigue:

$$d_f = a(t)\chi, \quad (1.18)$$

También, se define el tiempo conforme como

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.19)$$

entonces, la métrica FLRW en términos del tiempo conforme es :

$$ds^2 = a^2(t) \left[d\tau^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right) \right], \quad (1.20)$$

El tensor métrico para la métrica FLRW es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

las componentes no nulas del tensor de Ricci y del escalar de Ricci están dadas por:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}, \quad R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right], \quad (1.22)$$

Empleando Ec.1.22, la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ de las ecuaciones de campo de Einstein Ec.1.14 conduce a

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] = 8\pi\rho, \quad (1.23)$$

que, al simplificarse, puede escribirse como

$$\frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (1.24)$$

Definiendo el parámetro de Hubble al tiempo t como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.25)$$

y sustituyendo en Ec.1.24, llegamos a la llamada ecuación de Friedmann

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (1.26)$$

La ecuación de Friedmann es también expresada en la forma

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{8\pi}{3H^2}\rho - 1 \equiv \frac{\rho}{\rho_c} - 1. \quad (1.27)$$

donde la llamada densidad crítica $\rho_c = 3H^2/8\pi$ define el valor que la densidad de energía ρ debe tomar a un tiempo t para que el lado derecho de Ec.1.27 se anule y, por lo tanto,

el espacio-tiempo (al tiempo t) sea plano, es decir, $k = 0$. Por ejemplo, al tiempo actual t_0 , con el valor medido del parámetro de Hubble $H_0 = H(t_0) \approx 67.8 \text{ km/s Mpc}$ [3].

También se puede obtener

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right), \quad (1.28)$$

Sustituyendo unidades naturales tenemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} (\rho + 3P), \quad (1.29)$$

La Ec.1.26 y Ec.1.29 se conocen como ecuaciones de Friedmann y describen la dinámica del Universo en función de la presión y la densidad total. A partir de la Ec.1.29 se obtiene la ecuación de continuidad.

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (1.30)$$

Según el tipo de componente descrito por el fluido perfecto, la ecuación de estado $P = \omega\rho$ puede adoptar distintos valores de ω

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{Radiación} \\ 0, & \text{Materia} \\ -1, & \text{Energía del vacío} \end{cases} \quad (1.31)$$

El parámetro ω depende del tipo de fluido considerado y determina su comportamiento dinámico en un Universo en expansión. La densidad total del Universo puede descomponerse en tres componentes fundamentales: la **radiación** ($\omega = \frac{1}{3}$), asociada a partículas relativistas como fotones y neutrinos; la **materia** ($\omega = 0$), correspondiente a partículas no relativistas —incluyendo la materia bariónica y la materia oscura— cuya presión es prácticamente nula ($P_m \approx 0$); y la **energía oscura** ($\omega = -1$), responsable de la expansión acelerada del Universo [4].

Al sustituir la ecuación de estado $P = \omega\rho$ en la Ec.1.30, se obtiene

$$\frac{d\rho}{\rho} + 3\frac{da}{a}(1 + \omega) = 0. \quad (1.32)$$

Al resolver directamente por integración la ecuación diferencial obtenida, se determina cómo evoluciona la densidad de energía en función del factor de escala, obteniéndose el siguiente resultado:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(\omega+1)}, \quad (1.33)$$

Al reemplazar la Ec.1.33 en la primera ecuación de Friedmann (Ec.1.24), considerando un Universo plano y compuesto únicamente por un solo fluido dominante, se obtiene la evolución del factor de escala en función del tiempo.

$$a(t) = \begin{cases} a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(\omega+1)}}, & \text{si } \omega \neq 1 \\ e^{Ht}, & \text{si } \omega = -1 \end{cases} \quad (1.34)$$

Radiación Cósmica de Fondo de Microondas (CMB)

La Radiación Cósmica de Fondo de Microondas constituye una de las principales herramientas para estudiar la evolución temprana del Universo. El límite más remoto que podemos observar corresponde a la **superficie de última dispersión**, época en la cual los electrones libres quedaron ligados a los protones para formar átomos de hidrógeno. Este proceso, conocido como recombinación o desacoplamiento, ocurrió alrededor de un corrimiento al rojo de $z \approx 1090$. Antes de este evento, los fotones se encontraban estrechamente acoplados a bariones y electrones; posteriormente, pudieron propagarse libremente a través del cosmos, conformando la radiación que hoy detectamos.

La existencia de esta radiación fue predicha por el modelo cosmológico estándar, pero no fue confirmada experimentalmente hasta 1964, cuando Arno Penzias y Robert Wilson, trabajando en los laboratorios Bell en experimentos de telecomunicaciones satelitales, detectaron de manera accidental un exceso de radiación isotrópica en la banda de microondas. Utilizando una antena enfriada con helio líquido, observaron un fondo de radiación presente a cualquier hora del día, sin poder asociarlo a fuentes terrestres o astrofísicas conocidas. La señal detectada correspondía a una frecuencia de aproximadamente 4080 MHz, es decir, una longitud de onda cercana a 7.35 cm.

Posteriormente, diversos experimentos realizados desde telescopios terrestres, satélites y globos estratosféricos confirmaron la existencia de dicha radiación, encontrando que su espectro coincidía con el de un **cuerpo negro** a una temperatura de $T_0 = 2.726$ K. En

efecto, la distribución espectral de energía de un cuerpo negro está descrita por la **ley de Planck** [3]:

$$u(\nu, T) = 8\pi h\nu^3 \cdot \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1}, \quad (1.35)$$

donde h es la constante de Planck, k_B la constante de Boltzmann, y ν la frecuencia de la radiación. Al graficar esta distribución para $T = 2.726$ K, se observa que el máximo del espectro ocurre alrededor de $\nu \approx 160.24$ GHz, en la región de microondas, lo que confirma el carácter térmico de la CMB.

Un aspecto fundamental de la radiación cósmica de fondo es que no es perfectamente isotrópica. Observaciones de alta precisión han revelado la presencia de **anisotropías de temperatura** a un nivel de una parte en cien mil. Estas pequeñas fluctuaciones corresponden a inhomogeneidades primordiales en la densidad de materia, consideradas las semillas de la formación de estructuras cósmicas posteriores, como galaxias y cúmulos.

La primera detección de anisotropías a grandes escalas angulares fue realizada en 1992 por el satélite **COBE** (Cosmic Background Explorer). Posteriormente, experimentos como **BOOMERanG**, **MAXIMA** y, de manera destacada, la misión **WMAP** (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) proporcionaron mediciones cada vez más precisas, permitiendo determinar con gran exactitud parámetros cosmológicos fundamentales [5].

Finalmente, la misión **Planck** permitió obtener un mapa de alta resolución de las anisotropías de la CMB. Dicho mapa constituye una instantánea de la luz más antigua del Universo, registrada cuando éste tenía apenas 380 000 años de edad. Como se muestra en la Figura 1.2, en él se observan diminutas fluctuaciones de temperatura que corresponden a regiones con densidades ligeramente distintas, las cuales representan las semillas de toda la estructura futura: las estrellas y galaxias que pueblan el cosmos en la actualidad [6].

1.3. Problemas del modelo del Big Bang caliente

Problema de planitud

Realicemos una extrapolación considerable y supongamos que las ecuaciones de Einstein se mantienen válidas hasta la era de Planck, momento en el cual la temperatura del Universo alcanza $T_{PI} \sim 10^{19}$ GeV. A partir de la ecuación correspondiente a la curvatura Ec.1.27.

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad \text{Teniendo: } \frac{\rho}{\rho_c} = \Omega \quad (1.36)$$

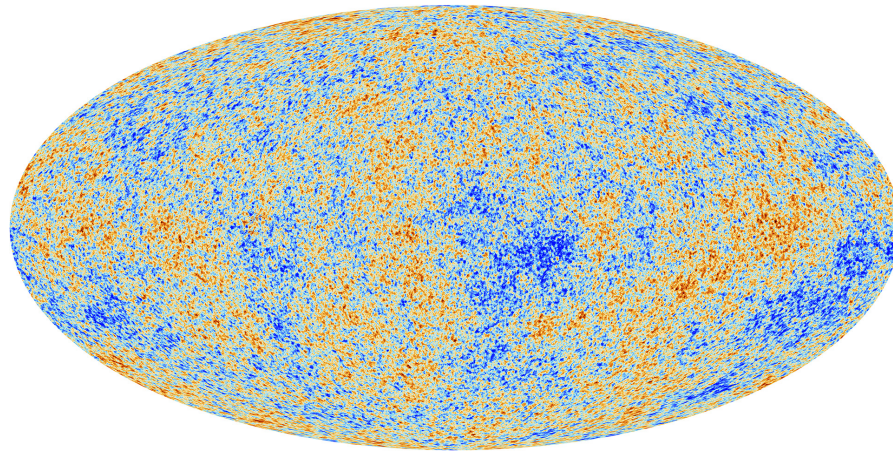


Figura 1.2: Las anisotropías del fondo cósmico de microondas (CMB) observadas por la misión Planck [6].

vemos que si el Universo es perfectamente plano, es decir $k=0$ ($\Omega = 1$), entonces lo sería en todo el tiempo, pero si existe un término de curvatura la dependencia temporal $\Omega - 1$ sería diferente [2].

Durante un período de radiación (RD):

$$\Omega - 1 \propto a^2 \quad \text{Teniendo} \quad H^2 \propto a^{-4} \quad (1.37)$$

Durante un período de materia (MD):

$$\Omega - 1 \propto a, \quad (1.38)$$

En ambos casos, $\Omega - 1$ disminuye al retroceder en el tiempo. Dado que hoy en día $\Omega_0 - 1$ es del orden de la unidad.

Esto significa que, para obtener el valor actual cercano a 1, el valor inicial de $(\Omega - 1)$ debió estar ajustado a un número increíblemente próximo a cero, pero sin ser exactamente cero [2]. Por eso este problema también se conoce como el **problema del ajuste fino** [4].

Problema de horizonte

El problema del horizonte constituye una de las principales limitaciones del modelo del Big Bang caliente y surge al confrontar la teoría con la homogeneidad observada en la radiación cósmica de fondo (CMB). Para un rayo de luz radial en un espacio plano descrito por la métrica FLRW se cumple [4]:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dr^2 = 0, \quad (1.39)$$

lo cual permite calcular la distancia recorrida por la luz entre dos instantes como:

$$r = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.40)$$

De aquí se define el *horizonte de partículas*, que representa la región causalmente conectada desde el inicio del Universo hasta un tiempo t :

$$r_{hp}(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{a(t)} \frac{d \ln a}{aH}, \quad (1.41)$$

En un Universo dominado por radiación o materia se obtiene

$$r_{hp} = \frac{2}{1+3w} (aH)^{-1}, \quad (1.42)$$

donde $w = p/\rho$ es el parámetro de estado. En estos casos, el horizonte de partículas crece con el tiempo, pero siempre es menor que el radio de Hubble comóvil $R_H = (aH)^{-1}$.

El problema del horizonte surge porque, según la cosmología estándar, en el momento del desacoplamiento de la radiación cósmica de fondo, las regiones del Universo que hoy conforman nuestro horizonte observable no pudieron haber estado en contacto causal. El cálculo muestra que la longitud correspondiente al radio de Hubble actual proyectada a la época del desacoplamiento, $\lambda_H(T_{ls})$, es mucho mayor que el horizonte causal en ese tiempo, H_{ls}^{-1} . Al comparar los volúmenes asociados se obtiene:

$$\frac{\lambda_H^3(T_{ls})}{H_{ls}^{-3}} = \left(\frac{T_0}{T_{ls}} \right)^{-3/2} \approx 10^6. \quad (1.43)$$

Esto implica que el Universo visible contenía aproximadamente un millón de regiones desconectadas causalmente. Sin embargo, las observaciones muestran que todas esas regiones tienen hoy la misma temperatura promedio ($T = 2.725K$) con fluctuaciones diminutas del orden de $\Delta T/T \sim 10^{-5}$. Es decir, regiones que nunca pudieron comunicarse presentan un espectro de cuerpo negro casi perfecto y una isotropía sorprendente.

El problema del horizonte puede ilustrarse mediante la Figura 1.3, en la cual la línea verde representa la escala del horizonte, mientras que la línea roja corresponde a una escala física genérica. Si interpretamos esta última como la distancia entre dos fotones que hoy observamos, la Ec.1.43 muestra que, en el instante de la emisión (última dispersión), dichos fotones no pudieron haber estado en causalidad, ya que la línea roja sobrepasa a la verde.

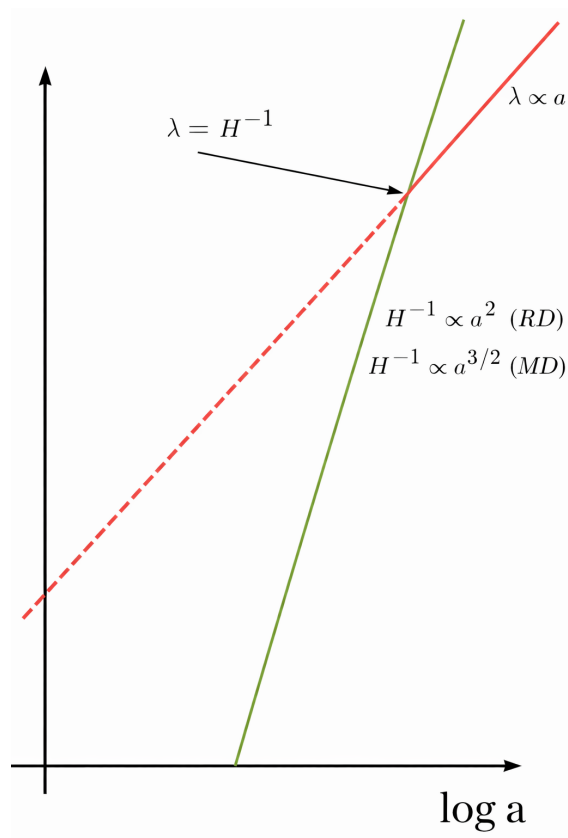


Figura 1.3: La escala del horizonte (línea verde) y una escala física (línea roja) en función del factor de escala a [2].

Capítulo 2

FUNDAMENTOS DE LA INFLACIÓN

2.1. Inflación

La teoría inflacionaria constituye una extensión del modelo del Big Bang con el objetivo de solucionar diversos problemas fundamentales en cosmología. Entre estos se encuentran el problema del horizonte, la isotropía observada en el CMB, la planitud del Universo y la ausencia de monopolos magnéticos predichos por teorías de gran unificación. La inflación propone una etapa de expansión acelerada del Universo, dominada por la energía potencial de un campo escalar llamado inflatón. Esta expansión tiene lugar en una fracción de segundo, pero es suficiente para expandir causalmente una región minúscula del Universo primitivo hasta dimensiones mucho mayores que el horizonte observable actual [1].

Una etapa acelerada ($\ddot{a} > 0$) requiere presión efectiva negativa $(\rho + 3P) < 0$, en particular $P < -\rho/3$. En el caso extremo $P = -\rho$ (fase de **Sitter**), las ecuaciones de Friedmann junto con la conservación de la energía implican una densidad de energía y una tasa de Hubble constantes durante la inflación, $\rho = \text{constante}$ y $H_I = \text{constante}$. En este régimen, la expansión del Universo es exponencial y el factor de escala evoluciona como:

$$a(t) = a_I e^{H_I(t-t_I)}, \quad (2.1)$$

donde t_I denota el instante de inicio de la inflación y $a_I \equiv a(t_I)$ es el valor del factor de escala en dicho momento.

Inflación y el problema del horizonte

Durante la fase inflacionaria, el parámetro de Hubble es aproximadamente constante, $H \simeq H_I$, por lo que el radio de Hubble físico H_I^{-1} permanece prácticamente constante. En cambio, el horizonte de partículas físico crece aproximadamente como

$$R_H(t) = a(t) \int_{t_I}^t \frac{dt'}{a(t')} \simeq \frac{a(t)}{H_I}, \quad (2.2)$$

donde se ha utilizado que $a(t) \propto e^{H_I t}$ durante inflación. Por otra parte, el radio de Hubble comóvil $(aH)^{-1}$ decrece exponencialmente,

$$(aH)^{-1} = (H_I^{-1}) e^{-H_I(t-t_I)}. \quad (2.3)$$

Como consecuencia, escalas físicas que inicialmente se encontraban dentro del horizonte causal pueden expandirse rápidamente y salir del radio de Hubble durante la inflación. Esto implica que regiones que hoy aparecen causalmente desconectadas pudieron haber estado en contacto causal antes o durante la fase inflacionaria.

Si denotamos por t_I y t_f el inicio y el final de la inflación, respectivamente, el crecimiento del factor de escala durante esta etapa se caracteriza mediante el número de *e-folds*

$$N \equiv \ln\left(\frac{a_f}{a_I}\right) = H_I(t_f - t_I). \quad (2.4)$$

Para que la inflación resuelva el problema del horizonte, es necesario que el horizonte observable actual H_0^{-1} haya estado contenido dentro de una región causal antes de la inflación. Imponiendo esta condición y asumiendo que la temperatura al final de la inflación es aproximadamente la temperatura de recalentamiento, $T_f \simeq T_{\text{RH}}$, se obtiene una estimación típica

$$N \gtrsim 67 + \ln\left(\frac{T_f}{H_I}\right), \quad (2.5)$$

lo que conduce a un valor característico de

$$N \sim \mathcal{O}(70). \quad (2.6)$$

suficiente para explicar la homogeneidad observada en el fondo cósmico de microondas y, por lo tanto, resolver el problema del horizonte.

Inflación y el problema de la planitud

Durante inflación, $H \simeq$ constante además:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \propto \frac{1}{a^2}. \quad (2.7)$$

Identificando el comienzo de la fase radiativa con el fin de inflación,

$$\frac{|\Omega - 1|_{t=t_f}}{|\Omega - 1|_{t=t_I}} = \left(\frac{a_I}{a_f}\right)^2 = e^{-2N}. \quad (2.8)$$

Tomando $|\Omega - 1|_{t=t_I} \sim \mathcal{O}(1)$, basta $N \approx 70$ para explicar $\Omega_0 \simeq 1$ con gran precisión observacional (localmente el Universo aparece muy plano)[1].

Inflación y el problema de la entropía

Si la expansión fuese no adiabática durante un intervalo temprano, la entropía comóvil podría aumentar. Parametrizamos el salto entrópico entre el inicio y el fin de la inflación como

$$S_f = Z^3 S_I, \quad (2.9)$$

donde Z es un factor numérico. Dado que la entropía inicial S_I debió ser del orden de la unidad, se requiere $Z \sim 10^{30}$ para alcanzar la entropía actual del Universo, $S_U \sim 10^{90}$. Usando la relación $S \propto (aT)^3$, se obtiene

$$\frac{a_f}{a_I} = e^N \simeq 10^{30} \left(\frac{T_I}{T_f} \right), \quad (2.10)$$

lo que de nuevo sugiere $N \sim 70$ (hasta factores logarítmicos). El grueso de la entropía se produce en la transición no adiabática (recalentamiento) que inicia la era radiativa [2].

Dinámica del inflatón

Una forma simple de satisfacer la condición $P < -\rho/3$ es considerar un campo escalar ϕ , denominado inflatón, dotado de un potencial $V(\phi)$, cuya dinámica se describe mediante la siguiente acción [7, 8, 9]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_{Pl}^2 R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.11)$$

donde R es el escalar de Ricci y $M_{Pl}^2 \equiv 1/(8\pi G_N)$ es la masa de Planck reducida. La ecuación de movimiento del inflatón se obtiene aplicando el principio de mínima acción, imponiendo $\delta S/\delta \phi = 0$. En un espacio-tiempo FLRW, esta ecuación toma la forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + V'(\phi) = 0, \quad (2.12)$$

donde el punto sobre una variable denota derivada respecto al tiempo cósmico t , es decir, $\dot{\phi} \equiv d\phi/dt$ y $\ddot{\phi} \equiv d^2\phi/dt^2$, mientras que $V'(\phi) \equiv dV/d\phi$ representa la derivada del potencial con respecto al campo escalar. Además, el término $3H\dot{\phi}$ actúa como una de fricción cosmológica. La densidad de energía y la presión asociadas al campo escalar son

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{(\nabla\phi)^2}{2a^2}, \quad (2.13)$$

$$P_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{(\nabla\phi)^2}{6a^2}. \quad (2.14)$$

Separando $\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(t) + \delta\phi$, la contribución del *modo cero* domina la evolución clásica,

$$\rho_\phi \simeq \frac{\dot{\phi}_0^2}{2} + V(\phi_0), \quad (2.15)$$

$$P_\phi \simeq \frac{\dot{\phi}_0^2}{2} - V(\phi_0). \quad (2.16)$$

Si $V(\phi_0) \gg \dot{\phi}_0^2$, entonces $P_\phi \simeq -\rho_\phi$, por lo que la energía potencial del inflatón impulsa la fase inflacionaria.

Condiciones de *slow-roll*

Las ecuaciones de Friedmann que gobiernan la expansión cósmica bajo el régimen de *slow-roll* ($\dot{\phi}_0^2 \ll V$ y $|\ddot{\phi}_0| \ll |3H\dot{\phi}_0|$) toman la forma general [2, 10]:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right), \quad (2.17)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{Pl}^2} \dot{\phi}^2. \quad (2.18)$$

Definimos los parámetros de *slow-roll*

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{\phi}_0^2}{2M_{Pl}^2 H^2} = \frac{1}{16\pi G_N} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (2.19)$$

$$\eta \equiv \frac{1}{8\pi G_N} \frac{V''}{V} = \frac{1}{3} \frac{V''}{H^2}, \quad (2.20)$$

$$\delta \equiv \eta - \varepsilon = -\frac{\ddot{\phi}_0}{H\dot{\phi}_0}, \quad (2.21)$$

La aceleración requiere

$$\ddot{a}/a = (1 - \varepsilon)H^2 > 0 \iff \varepsilon < 1.$$

En primera orden (tratando ε, η aproximadamente constantes), el número total de e-folds es

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt \simeq -\frac{1}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (2.22)$$

y los e-folds restantes desde un valor dado $\phi_{\Delta N}$ hasta el final

$$\Delta N \simeq \frac{1}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_f}^{\phi_{\Delta N}} \frac{V}{V'} d\phi. \quad (2.23)$$

Para los modos que salen del radio de Hubble ($k = aH$), se obtiene

$$\frac{d \ln H_k^2}{d \ln k} = -2\varepsilon. \quad (2.24)$$

Una estimación útil del *timing* de salida del horizonte para una escala física λ es

$$\Delta N_\lambda \simeq 65 + \ln\left(\frac{\lambda}{3000 \text{ Mpc}}\right) + 2 \ln\left(\frac{V^{1/4}}{10^{14} \text{ GeV}}\right) - \ln\left(\frac{T_f}{10^{10} \text{ GeV}}\right), \quad (2.25)$$

de modo que las escalas relevantes para la CMB suelen corresponder a $\Delta N \sim 60$.

2.2. Transición post-inflacionaria

Al finalizar la inflación, el campo inflatón abandona el régimen de *slow-roll* y comienza a oscilar coherentemente alrededor del mínimo de su potencial, como se ilustra en la Figura 2.1. Durante esta etapa, la energía almacenada en el condensado homogéneo del inflatón debe transferirse a otros grados de libertad, dando inicio al proceso de recalentamiento. La dinámica de esta transición es altamente no trivial y puede involucrar el desarrollo rápido de inhomogeneidades, cuya evolución no lineal tiene consecuencias observables en el Universo temprano [2].

En particular, cuando el inflatón se encuentra acoplado a otros campos, la transferencia de energía puede ocurrir no solo mediante decaimientos perturbativos, sino también a través de mecanismos colectivos no perturbativos. Entre estos, el precalentamiento por resonancia paramétrica constituye un proceso especialmente eficiente, caracterizado por la amplificación exponencial de modos de campo en bandas específicas del espacio de momentos [11, 12].

Aunque la rápida aparición de inhomogeneidades durante el precalentamiento puede actuar como una fuente clásica de ondas gravitacionales estocásticas [9], en este trabajo el énfasis se coloca en la dinámica de los campos escalares y en la redistribución de energía asociada al fenómeno de resonancia paramétrica, que constituye el punto de partida para el análisis numérico posterior.

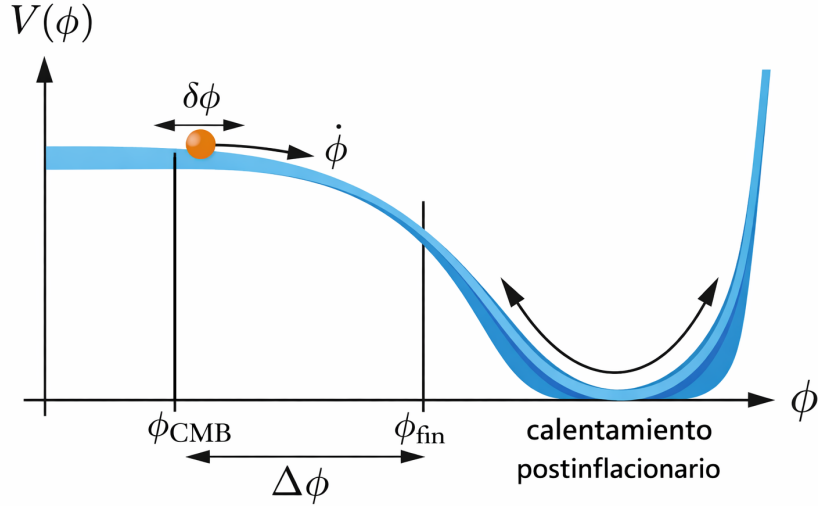


Figura 2.1: Esquema del potencial del inflatón $V(\phi)$, mostrando la evolución del inflatón (representado por el punto rojo), desde ϕ_{CMB} hasta ϕ_{fin} y su posterior oscilación en una región de potencial cuártico asociada al calentamiento postinflacionario [Elaboración propia].

Precaentamiento por resonancia paramétrica

Consideremos un inflatón ϕ acoplado a un campo escalar ligero χ , descritos por la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (2.26)$$

con potencial

$$V(\phi, \chi) = V(\phi) + \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2 - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2, \quad (2.27)$$

donde g denota el acoplamiento entre ambos campos. En este trabajo se considera el caso paradigmático de un potencial inflacionario cuártico acoplado a un campo escalar secundario, modelo ampliamente utilizado en estudios del precaentamiento por resonancia paramétrica [13].

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (2.28)$$

que conduce, tras el fin de la inflación, a una ecuación de estado efectiva $w \simeq 1/3$ para el inflatón oscilante.

Es conveniente introducir el tiempo conforme τ , definido por $dt = a(\tau) d\tau$, y reescalar el campo inflatón como [12]:

$$\varphi(\tau) \equiv a(\tau) \phi(\tau). \quad (2.29)$$

En el régimen cuártico temprano se verifica $a''/a \simeq 0$ (donde $a' \equiv da/d\tau$), y la ecuación de movimiento del fondo se reduce a:

$$\varphi'' + \lambda \varphi^3 = 0, \quad (2.30)$$

cuyas soluciones periódicas pueden expresarse en términos de funciones elípticas de Jacobi. Una parametrización estándar es

$$\varphi(\tau) = \tilde{\varphi} f(x), \quad (2.31)$$

donde $f(x)$ satisface

$$f'^2 = \frac{1}{2} (1 - f^4), \quad (2.32)$$

con solución

$$f(x) = \text{cn} \left(x - x_0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (2.33)$$

donde $\text{cn}(u, k)$ denota la función elíptica de Jacobi coseno, la cual generaliza al coseno usual y describe oscilaciones periódicas no armónicas.

Ecuaciones de modo y estructura resonante

Linealizando las ecuaciones de movimiento y descomponiendo en modos de Fourier, los modos del campo secundario satisfacen

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + g^2\phi^2(t) \right) \chi_k = 0, \quad (2.34)$$

mientras que los modos del inflatón obedecen

$$\ddot{\phi}_k + 3H\dot{\phi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + 3\lambda\phi^2(t) \right) \phi_k = 0. \quad (2.35)$$

Al introducir la variable reescalada $X_k \equiv a \chi_k$ y trabajar en tiempo conforme, se elimina el término de fricción cosmológica, obteniéndose

$$X_k'' + \left[k^2 + a^2 g^2 \phi^2(\tau) - \frac{a''}{a} \right] X_k = 0. \quad (2.36)$$

En el régimen cuártico, donde $a''/a \simeq 0$, y usando la solución periódica del inflatón, esta ecuación adopta la forma de una ecuación de Lamé,

$$\frac{d^2 X_k}{dz^2} + \left[\kappa^2 + q \operatorname{cn}^2\left(z, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] X_k = 0, \quad (2.37)$$

donde se han definido las cantidades adimensionales

$$\kappa^2 \equiv \frac{k^2}{\lambda \tilde{\varphi}^2}, \quad q \equiv \frac{g^2}{\lambda}, \quad z = \sqrt{\lambda} \tilde{\varphi} \tau. \quad (2.38)$$

Esta ecuación posee coeficientes periódicos, por lo que su análisis se enmarca naturalmente en la teoría de Floquet. El teorema de Floquet garantiza que las soluciones pueden escribirse como

$$X_k(z) = e^{\mu_k z} P_k(z), \quad (2.39)$$

donde $P_k(z)$ es una función periódica y μ_k es el exponente de Floquet. La condición $\mu_k > 0$ define bandas de inestabilidad en el espacio (κ^2, q) , responsables de la amplificación exponencial de los modos y, por ende, del proceso de precalentamiento.

Backreaction y ruptura del régimen lineal

A medida que los modos excitados crecen, la energía transferida al campo secundario y a las fluctuaciones del inflatón deja de ser despreciable. El precalentamiento lineal termina cuando los efectos de retro-reacción modifican de manera sustancial la dinámica del modo homogéneo del inflatón, invalidando la aproximación lineal basada en ecuaciones de modo. En esta etapa, la energía de gradiente y las contribuciones cinéticas de los campos se vuelven comparables, dando lugar a una dinámica altamente no lineal [11, 14].

Este régimen marca la transición hacia una fase turbulenta, caracterizada por una redistribución de energía entre escalas y por la progresiva pérdida de coherencia del condensado inflacionario. La identificación del inicio de la retro-reacción y su dependencia con el parámetro de acoplamiento q constituye uno de los objetivos centrales del análisis numérico presentado en los capítulos siguientes.

Implementación en CosmoLattice

En CosmoLattice, este escenario se implementa mediante el modelo `lphi4`, con potencial

$$V(\phi, \chi) = \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{1}{2} q \phi^2 \chi^2, \quad (2.40)$$

donde $q = g^2/\lambda$. Las simulaciones en retícula permiten seguir de manera no perturbativa la fragmentación del condensado inflacionario, el crecimiento de las fluctuaciones y la redistribución de energía entre los distintos componentes del sistema [15, 16].

Capítulo 3

METODOLOGÍA

3.1. Metodología numérica

Las simulaciones numéricas presentadas en este trabajo se realizaron con el código CosmoLattice, el cual permite resolver de manera clásica y no lineal las ecuaciones de movimiento de campos escalares acoplados sobre una red tridimensional discreta. En particular, se empleó el benchmark `lphi4`, diseñado para estudiar la dinámica de un modelo con dos campos escalares reales: el inflatón y un campo escalar secundario.

Este enfoque resulta adecuado para el estudio del pre-calentamiento, ya que durante esta etapa la amplificación resonante de modos, la retro-reacción y la transferencia de energía entre campos conducen rápidamente a un régimen no lineal, en el cual las aproximaciones perturbativas dejan de ser válidas.

Con el fin de caracterizar de manera controlada el proceso de resonancia paramétrica, se consideraron dos escenarios complementarios: un fondo sin expansión cosmológica y un fondo en expansión autoconsistente. La comparación entre ambos casos permitió distinguir los efectos intrínsecos de la resonancia paramétrica de aquellos asociados a la expansión del espacio-tiempo.

Asimismo, es importante señalar que el código no evoluciona directamente las variables en unidades SI, sino en variables reescaladas internas del programa. En el benchmark utilizado, dicho reescalado queda fijado por

$$\alpha = 1, \quad f_{\star} = \phi_i, \quad \omega_{\star} = \sqrt{\lambda} \phi_i, \quad (3.1)$$

de modo que las magnitudes analizadas en las simulaciones se interpretan principalmente en términos adimensionales. En consecuencia, el objetivo del presente trabajo no fue realizar una fijación observacional exhaustiva de parámetros a partir del CMB, sino estudiar la dinámica no lineal del pre-calentamiento y su dependencia con el acoplamiento entre campos.

3.2. Modelo y potencial

Se estudió un modelo con dos campos escalares reales: el inflatón ϕ y un campo secundario χ . La dinámica del sistema estuvo gobernada por el potencial

$$V(\phi, \chi) = \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{1}{2} q \phi^2 \chi^2, \quad (3.2)$$

En la implementación utilizada, el acoplamiento entre campos se parametrizó mediante la relación

$$g^2 = q \lambda, \quad (3.3)$$

donde λ representa el autoacoplamiento del inflatón, mientras que g caracteriza el acoplamiento entre ϕ y el campo χ a través del término de interacción $\frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2$. por lo que el parámetro q se identifica naturalmente como el parámetro de resonancia, no introduce un nuevo acoplamiento independiente, sino que mide la intensidad relativa de la interacción inflatón–campo hijo respecto al autoacoplamiento cuártico del inflatón.

En todas las simulaciones se fijó $\lambda = 9 \times 10^{-14}$, mientras que el parámetro q se varió con el fin de explorar distintos regímenes dinámicos y analizar su efecto sobre la amplificación de fluctuaciones y la transferencia de energía desde el inflatón hacia el campo secundario.

3.3. Configuración numérica

Las ecuaciones de movimiento se resolvieron en una red cúbica tridimensional de tamaño $N^3 = 32^3$, imponiendo condiciones periódicas de contorno. Aquí, el parámetro $N = 32$ representa la resolución lineal de la retícula y no el número de e-folds de la evolución cosmológica.

La integración temporal se realizó mediante un esquema de segundo orden tipo Velocity–Verlet (VV2), con un paso temporal fijo

$$\Delta t = 0.01. \quad (3.4)$$

Las simulaciones se extendieron hasta un tiempo máximo

$$t_{\max} = 5000, \quad (3.5)$$

lo cual permitió cubrir tanto la fase lineal inicial como el desarrollo de la resonancia paramétrica y la aparición posterior de efectos de retro–reacción.

Adicionalmente, se utilizó una escala infrarroja fija y un corte en el espacio de momentos para la inicialización de las fluctuaciones, de modo que la evolución numérica se restringiera al rango de modos relevante para el fenómeno resonante dentro del marco de la simulación.

3.4. Fondos cosmológicos considerados

Con el fin de evaluar el papel de la expansión cosmológica en la dinámica del pre–calentamiento, se consideraron dos configuraciones distintas:

- **Fondo sin expansión.** Se fijó el factor de escala a la unidad (`expansion = false`), de modo que la evolución de los campos tuvo lugar en un espacio–tiempo de Minkowski. Este escenario permitió aislar los efectos propios de la resonancia paramétrica, sin la amortiguación inducida por la expansión cosmológica.
- **Fondo en expansión.** Se activó la evolución autoconsistente del factor de escala (`expansion = true`), resolviendo la dinámica en un fondo FLRW espacialmente plano. En este caso, el factor de escala y el parámetro de Hubble evolucionaron simultáneamente con los campos de acuerdo con las ecuaciones de Friedmann, lo que permitió evaluar la influencia de la dilución cosmológica sobre la eficiencia de la resonancia y el inicio de la retro–reacción.

La comparación sistemática entre ambos escenarios permitió distinguir de forma clara los efectos asociados exclusivamente a la dinámica resonante de aquellos debidos a la expansión del Universo.

3.5. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales correspondieron a un condensado homogéneo del inflatón con amplitud inicial distinta de cero, mientras que el campo secundario se inicializó sin componente homogénea. En particular,

$$\phi(t = 0) = \phi_0, \quad \dot{\phi}(t = 0) = \dot{\phi}_0, \quad \chi(t = 0) = 0, \quad \dot{\chi}(t = 0) = 0. \quad (3.6)$$

Los valores de ϕ_0 y $\dot{\phi}_0$ se tomaron del benchmark `lphi4` empleado en `CosmoLattice`, por lo que en este trabajo se utilizaron como condiciones iniciales de referencia adecuadas para estudiar la dinámica post–inflacionaria dentro del marco numérico considerado. En este sentido, no se realizó una determinación independiente de estas cantidades a partir de una fijación observacional con datos del CMB.

Sobre este fondo homogéneo se superpusieron fluctuaciones inhomogéneas gaussianas que representan el vacío inicial del sistema discretizado. Dichas fluctuaciones se truncaron mediante un corte en el espacio de momentos. En concreto, se impuso un corte comóvil

$$k_{\text{cut}} = 4, \quad (3.7)$$

de modo que únicamente se incluyeron modos con $|\mathbf{k}| \leq k_{\text{cut}}$.

Este procedimiento restringió la inicialización a un rango finito de momentos adecuado para el estudio de la resonancia paramétrica, evitando además la incorporación de modos

de alta frecuencia, asociados a longitudes de onda muy cortas, que no participan de manera relevante en la amplificación resonante y que podrían introducir ruido numérico.

3.6. Observables y criterios de análisis

Para caracterizar la dinámica del sistema se analizaron los siguientes observables, extraídos de los archivos de salida generados por `CosmoLattice`:

- El valor medio espacial del inflatón, $\langle \tilde{\phi} \rangle$.

- La raíz de la varianza espacial del inflatón,

$$\sqrt{\langle \delta \tilde{\phi}^2 \rangle},$$

obtenida directamente como $\text{rms}(\tilde{\phi})$.

- Las fracciones de energía cinética, de gradiente y potencial asociadas a ambos campos.

Dado que la simulación se efectuó en variables reescaladas del programa, los observables se interpretaron principalmente en términos adimensionales. En particular, la evolución temporal se analizó mediante el tiempo conforme adimensional $\tilde{\eta}$.

En el caso con expansión cosmológica, el número de e-folds no se introdujo como parámetro fundamental de entrada, sino que se reconstruyó posteriormente a partir de la evolución del factor de escala,

$$N_e = \ln \left(\frac{a}{a_i} \right), \quad (3.8)$$

utilizando los datos almacenados durante la simulación y el correspondiente postprocesado.

El inicio del régimen de resonancia paramétrica se identificó operacionalmente mediante el crecimiento sostenido de las fluctuaciones del campo, mientras que la aparición de efectos de retro-reacción se asoció con la saturación de dicho crecimiento y la consiguiente pérdida de coherencia del modo homogéneo del inflatón.

En la Tabla 3.1 se resumen los valores de los parámetros utilizados en las simulaciones.

3.7. Estructura de la simulación

La estructura general del algoritmo de simulación se ilustró mediante los flujogramas mostrados en las Figuras 3.1 y 3.2. La simulación se organizó como un algoritmo iterativo que avanzó en pasos temporales discretos.

Cuadro 3.1: Parámetros utilizados en las simulaciones.

Parámetro	Valores utilizados
λ	9×10^{-14}
q	0, 6.3×10^{-3} , 0.1, 1, 2, 5, 10, 20, 30, 100, 500, 1000
N	32
Δt	0.01
t_{\max}	5000
k_{cut}	4

En cada iteración se calcularon las derivadas espaciales de los campos sobre la retícula, se evaluaron las fuerzas asociadas al potencial y se integraron las ecuaciones de movimiento mediante un esquema de segundo orden. De manera periódica se extrajeron los observables de interés y se almacenaron estados del sistema para permitir el postprocesado y, cuando fue necesario, la reanudación de las simulaciones.

En el escenario con expansión cosmológica, la evolución del factor de escala y del parámetro de Hubble se incorporó de forma autoconsistente en cada paso temporal, modificando tanto los términos de gradiente como los términos de amortiguamiento en las ecuaciones de movimiento. Esta estructura algorítmica permitió seguir de manera robusta la transición desde el régimen lineal inicial hasta la fase no lineal dominada por la retro-reacción.

Implementación computacional

La implementación numérica se llevó a cabo en un entorno de desarrollo en la nube proporcionado por GitHub Codespaces, el cual permite ejecutar y compilar código directamente desde el navegador en un sistema basado en Linux. Este entorno facilitó la gestión del repositorio y la reproducibilidad del proceso computacional sin requerir instalación local.

El código fuente de CosmoLattice fue obtenido desde la plataforma GitHub y compilado utilizando el sistema de construcción CMake. Para ello, se creó un directorio de compilación independiente (*out-of-source build*), con el fin de separar los archivos generados del código fuente. El procedimiento seguido fue:

```
mkdir build
cd build
cmake ..
make
```

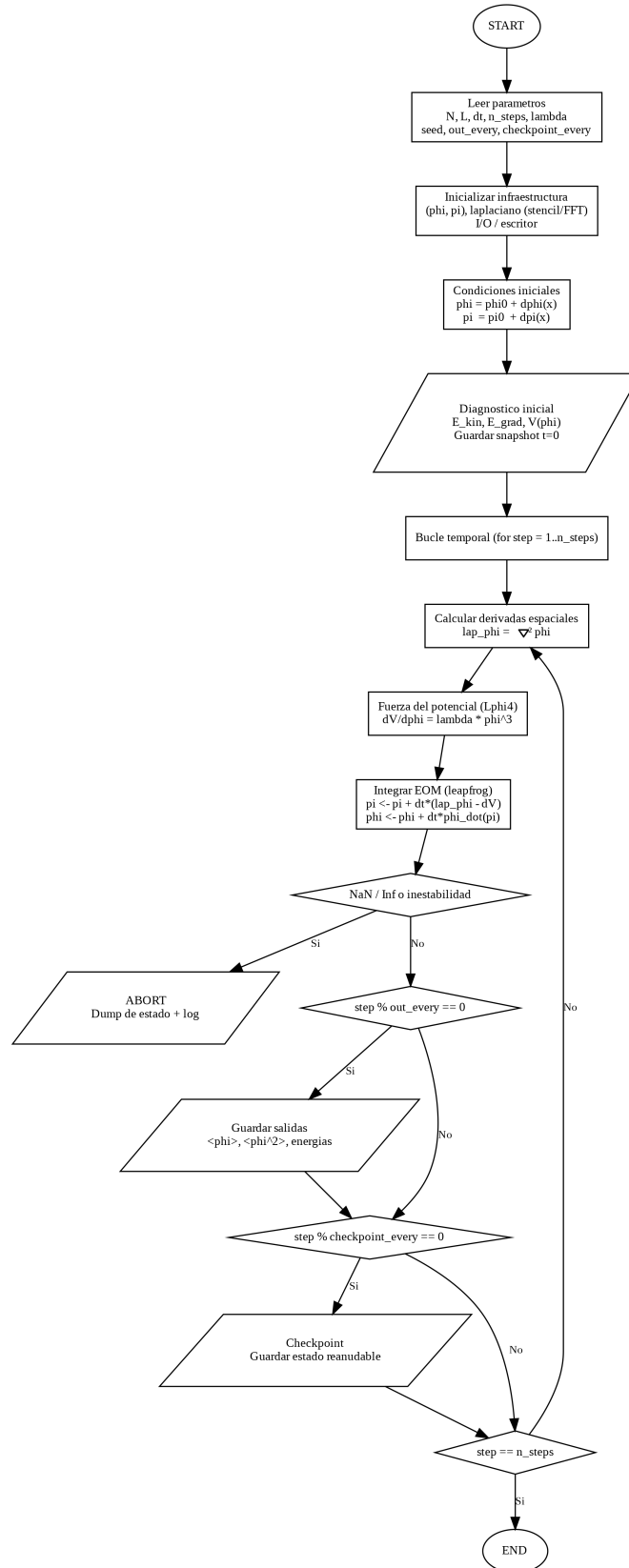


Figura 3.1: Flujograma de la simulación del modelo $L\phi^4$ sin expansión cosmológica (espacio-tiempo de Minkowski).

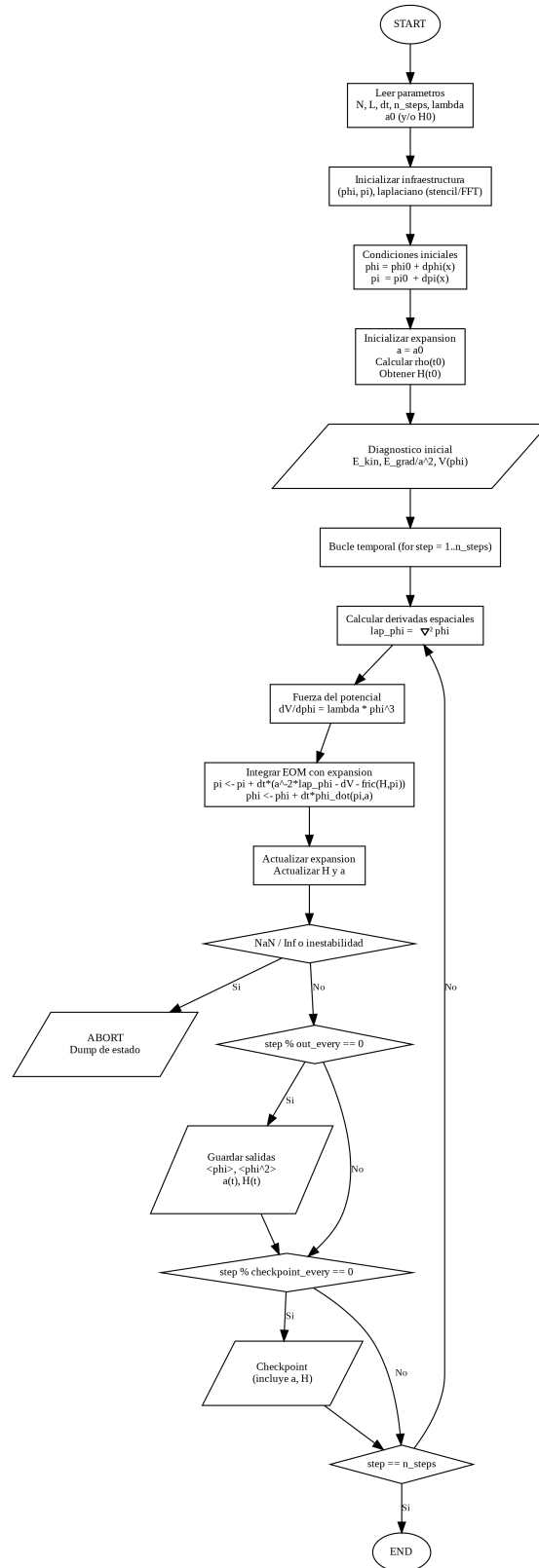


Figura 3.2: Flujograma de la simulación del modelo $L\phi^4$ con expansión cosmológica tipo FLRW.

Durante la compilación fue necesario instalar dependencias externas, en particular la biblioteca FFTW, utilizada para el cálculo de transformadas rápidas de Fourier requeridas en la evolución de los campos.

El proceso de compilación generó un ejecutable específico asociado al modelo seleccionado, denominado `lphi4`. La simulación se ejecutó mediante dicho ejecutable, utilizando un archivo de parámetros de entrada:

```
./lphi4 input=./src/models/parameter-files/lphi4.in
```

Es importante destacar que el programa requiere que el archivo de parámetros sea pasado explícitamente mediante el argumento `input`, ya que de lo contrario no se cargan correctamente las variables necesarias para la simulación.

Durante la implementación se resolvieron diversos inconvenientes técnicos, incluyendo errores en la selección del directorio de compilación, ausencia de dependencias externas y falta de parámetros obligatorios en los archivos de entrada. La correcta resolución de estos aspectos permitió la ejecución estable de las simulaciones numéricas.

Capítulo 4

RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de simulaciones numéricas de la dinámica post-inflacionaria del inflatón, realizadas mediante el código COSMOLATICE. El análisis se centra en el estudio del régimen de pre-calentamiento dominado por resonancia paramétrica, así como en la transición hacia el régimen no lineal en el que los efectos de retro-reacción se vuelven relevantes. Dado que las simulaciones se efectuaron en las variables reescaladas internas del programa, los resultados deben interpretarse principalmente en términos de tiempos adimensionales, crecimiento relativo de fluctuaciones y redistribución de energía entre campos.

Con el objetivo de caracterizar de manera sistemática la dependencia de la dinámica con el acoplamiento inflatón-campo secundario, se explora un conjunto amplio de valores del parámetro adimensional q , abarcando desde el régimen de resonancia débil hasta el de resonancia ancha. En particular, se consideran doce valores distintos de q (se muestran en la tabla 4.1, lo que permite identificar regularidades, transiciones y comportamientos universales asociados a cada tipo de resonancia.

Asimismo, se analizan dos configuraciones físicas que comparten el mismo potencial escalar,

$$V(\phi, \chi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{1}{2}q\phi^2\chi^2, \quad (4.1)$$

pero difieren en el tratamiento de la expansión cosmológica: un escenario con expansión auto-consistente, determinado por las ecuaciones de Friedmann, y un escenario sin expansión, correspondiente a un fondo estático de tipo Minkowski ($a = 1$)[16].

La comparación directa entre ambos escenarios se realiza únicamente para un subconjunto representativo de valores de q , seleccionados de modo que cubran los distintos regímenes de resonancia identificados. Esta elección responde a que el efecto de la expansión actúa de manera cualitativamente similar dentro de cada régimen, de modo que el análisis detallado de casos representativos resulta suficiente para capturar su impacto físico sin redundancia innecesaria.

El capítulo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 4.1 se muestra la evolución del inflatón promediado en volumen y de sus fluctuaciones para los distintos valores del parámetro de acoplamiento q , identificando las fases de resonancia paramétrica y

el inicio del régimen de retro-reacción. A continuación, en la Sección 4.2 se analiza el efecto de la expansión cosmológica sobre la dinámica de las fluctuaciones, mediante una comparación directa entre escenarios con y sin expansión para valores representativos de q .

Posteriormente, en la Sección 4.3 se examina la evolución temporal de las fracciones de energía del sistema para los distintos valores de q , con el fin de caracterizar la eficiencia de la transferencia de energía y determinar el comienzo del régimen no lineal. Finalmente, en la Sección 4.4 se presenta una comparación entre escenarios con y sin expansión cosmológica en términos de las fracciones de energía, permitiendo evaluar de manera integrada el impacto de la expansión en la dinámica post-inflacionaria.

Cuadro 4.1: Clasificación operativa de los regímenes de resonancia utilizados en este trabajo según el valor del parámetro q .

Rango de q	Tipo de resonancia	Característica principal
$q < 1$	Narrow (estrecha/débil)	Bandas angostas
$1 \leq q \leq 5$	Régimen de transición	Narrow \rightarrow Broad
$10 \leq q \leq 30$	Broad resonance (moderada)	Amplificación eficiente
$q \geq 100$	Broad resonance fuerte	Backreaction temprano

4.1. Evolución del inflatón promediado en volumen

En esta sección se presenta la evolución temporal del inflatón promediado sobre el volumen de simulación, junto con el crecimiento de sus fluctuaciones, para distintos valores del parámetro de acoplamiento q .

Las figuras muestran simultáneamente el comportamiento del modo homogéneo del inflatón,

$$\langle \tilde{\phi}(\tilde{\eta}) \rangle, \quad (4.2)$$

y la amplitud de las fluctuaciones espaciales,

$$\sqrt{\langle \delta \tilde{\phi}^2(\tilde{\eta}) \rangle}, \quad (4.3)$$

como funciones del tiempo adimensional $\tilde{\eta}$. Las regiones sombreadas indican los intervalos dominados por la resonancia paramétrica y por los efectos de retro-reacción, respectivamente.

Resonancia estrecha (narrow resonance): $q \ll 1$

Para valores pequeños del acoplamiento, como $q = 0$, la evolución del sistema está dominada por el modo homogéneo del inflatón. El campo promediado en volumen $\langle \tilde{\phi} \rangle$

presenta oscilaciones coherentes y suavemente amortiguadas, mientras que la amplitud de las fluctuaciones permanece prácticamente nula durante toda la evolución considerada. Este comportamiento es característico de un régimen dinámico cercano al lineal, en el cual la transferencia de energía hacia modos inhomogéneos resulta ineficiente [7, 11].

La ausencia de un crecimiento apreciable de $\sqrt{\langle\delta\tilde{\phi}^2\rangle}$ es consistente con la ausencia de resonancia paramétrica eficiente en el rango temporal explorado. En este caso, la expansión cosmológica y la dinámica del fondo amortiguan las oscilaciones del modo homogéneo [12, 17, 18], mientras que las fluctuaciones permanecen subdominantes durante toda la evolución considerada.

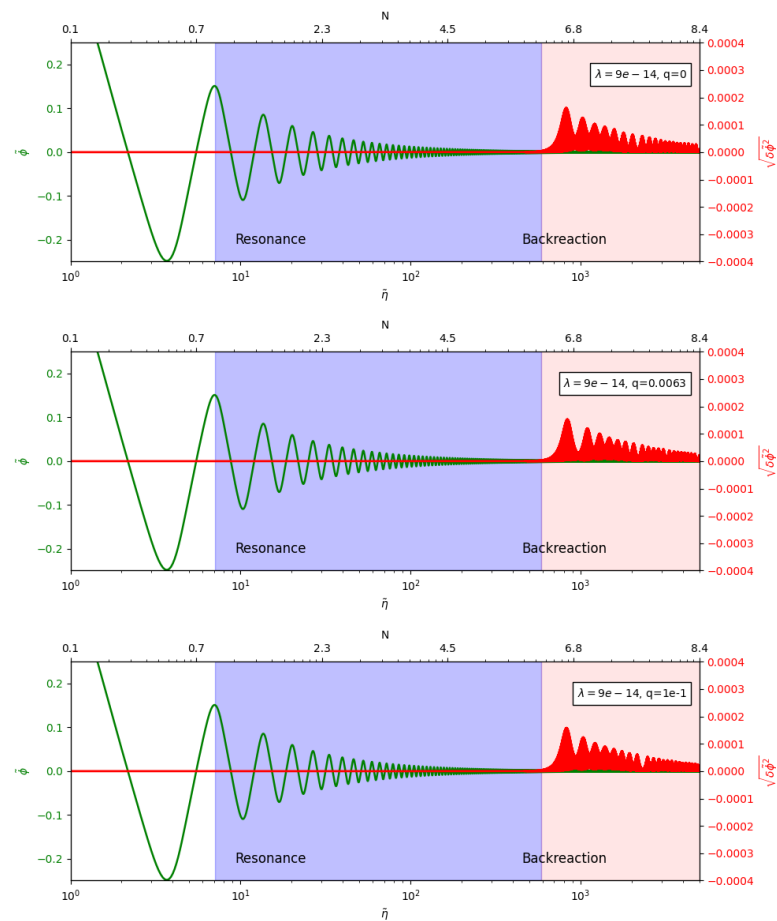


Figura 4.1: Evolución temporal del inflatón promediado en volumen $\langle\tilde{\phi}(\tilde{\eta})\rangle$ (línea verde) y de la amplitud de sus fluctuaciones espaciales $\sqrt{\langle\delta\tilde{\phi}^2(\tilde{\eta})\rangle}$ (línea roja), para valores pequeños del parámetro de acoplamiento $q = 0$, $q = 6.3 \times 10^{-3}$ y $q = 0.1$. En este régimen, las fluctuaciones permanecen suprimidas y el sistema evoluciona cercano al régimen lineal, indicando la ausencia de resonancia paramétrica eficiente.

Régimen de transición: $1 \lesssim q \lesssim 5$

Para valores intermedios del acoplamiento, como $q = 1$, se observa un cambio cualitativo en la dinámica del inflatón. Aunque el modo homogéneo continúa oscilando de manera coherente durante la fase inicial, las fluctuaciones comienzan a amplificarse dentro de la región identificada como resonancia. Este crecimiento, sin embargo, es limitado y no estrictamente exponencial, lo que refleja un régimen de resonancia todavía poco eficiente, situado en la transición entre la resonancia estrecha y la resonancia ancha. La amplificación observada sigue siendo sensible al valor de q y no conduce todavía a una desestabilización temprana del condensado homogéneo.[11, 19].

En este caso, la retro-reacción aparece de forma tardía y con una intensidad moderada, de modo que el inflatón conserva gran parte de su coherencia durante un intervalo temporal prolongado. Este comportamiento es consistente con estudios previos que muestran que, para valores intermedios de q , la eficiencia del pre-calentamiento es limitada y altamente sensible a la estructura fina de las bandas resonantes [12, 17].

Resonancia ancha moderada: $10 \leq q \leq 30$

En el régimen de resonancia ancha moderada, ilustrado por $q = 20$ y $q = 30$, el crecimiento de las fluctuaciones del inflatón se vuelve claramente visible. Durante la fase de resonancia, la cantidad $\sqrt{\langle \delta\tilde{\phi}^2 \rangle}$ aumenta rápidamente, mientras que la amplitud del modo homogéneo comienza a disminuir de forma apreciable. Este comportamiento indica una transferencia eficiente de energía desde el condensado homogéneo hacia modos inhomogéneos del sistema, característica de un proceso de pre-calentamiento no perturbativo [11, 14].

El inicio del régimen de retro-reacción coincide con la saturación del crecimiento de las fluctuaciones y con la pérdida progresiva de coherencia del campo homogéneo, marcando el quiebre de la aproximación lineal basada en ecuaciones de modo. A partir de este punto, los efectos no lineales dominan la dinámica y modifican de manera sustancial la estructura de las bandas de resonancia [20].

Resonancia ancha fuerte: $q \gg 1$

Para valores grandes del acoplamiento, como $q = 100$, $q = 500$ y $q = 1000$, la dinámica está dominada por una resonancia paramétrica ancha y altamente eficiente. En estos casos, las fluctuaciones del inflatón crecen de manera explosiva y alcanzan amplitudes comparables a las del modo homogéneo en escalas temporales relativamente cortas, lo que evidencia una transferencia extremadamente rápida de energía hacia los modos inhomogéneos [11].

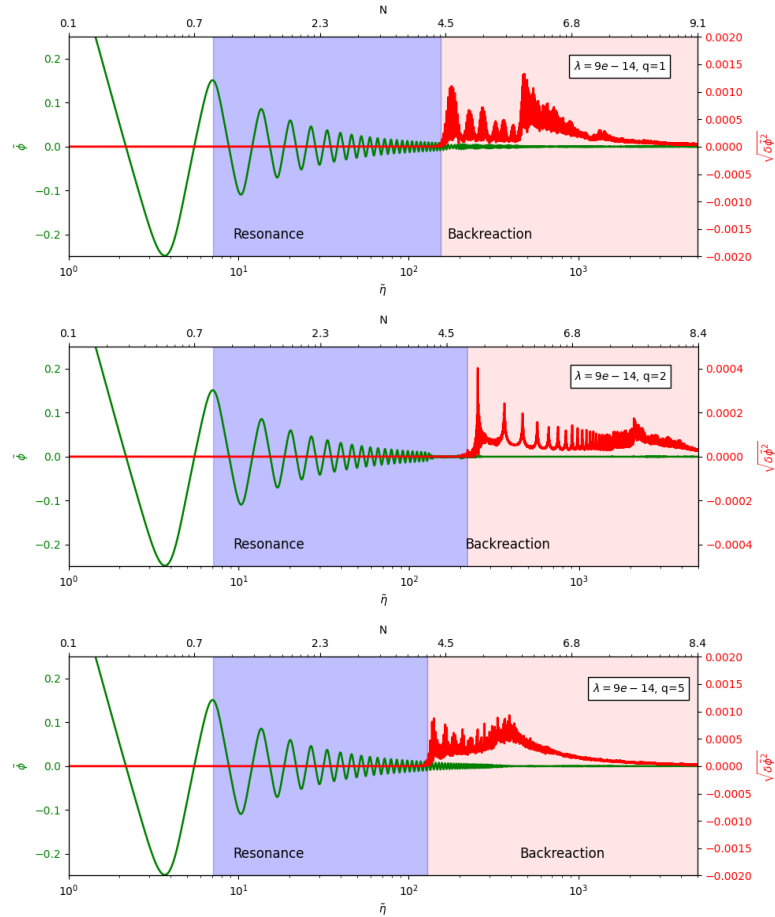


Figura 4.2: Evolución del inflatón promediado en volumen y de sus fluctuaciones para valores intermedios del parámetro de acoplamiento $q = 1$, $q = 2$ y $q = 5$. Se observa el inicio de la amplificación de las fluctuaciones durante la fase de resonancia, aunque con crecimiento limitado y retro-reacción tardía, característicos de un régimen de transición entre resonancia estrecha y resonancia ancha.

La aparición de la retro-reacción es temprana y conduce a una rápida supresión de las oscilaciones coherentes del inflatón. El sistema entra entonces en un régimen fuertemente no lineal, caracterizado por oscilaciones irregulares de $\langle\tilde{\phi}\rangle$ y por una evolución no monótona de las fluctuaciones. Este comportamiento es consistente con simulaciones en retícula que muestran que, en el régimen de resonancia ancha, la dinámica posterior está dominada por efectos colectivos y no perturbativos [14, 17].

La Tabla 4.2 resume los valores del tiempo conforme adimensional $\tilde{\eta}_{\text{br}}$ en los cuales se identifica el inicio de la retro-reacción para distintos valores del parámetro de acoplamiento $q = g^2/\lambda$. Este tiempo se determina operacionalmente como el instante en el que el crecimiento de la raíz de la varianza del inflatón $\sqrt{\langle\delta\tilde{\phi}^2\rangle}$ comienza a modificar de manera apreciable la dinámica del modo homogéneo $\langle\tilde{\phi}\rangle$.

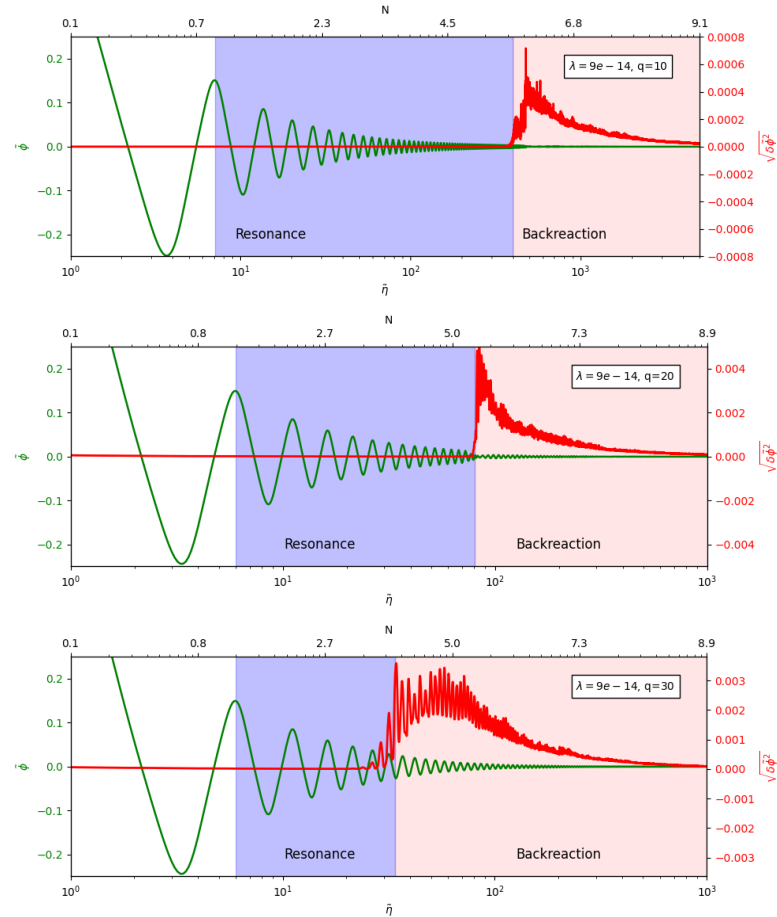


Figura 4.3: Evolución temporal del modo homogéneo del inflatón y de la amplitud de sus fluctuaciones para valores del parámetro de acoplamiento correspondientes a resonancia ancha moderada ($q = 10$, $q = 20$ y $q = 30$). Durante la fase de resonancia se observa un crecimiento rápido de las fluctuaciones, acompañado por una disminución progresiva de la coherencia del modo homogéneo, indicando una transferencia eficiente de energía y el inicio del régimen no lineal.

Para $q = 0$ y valores extremadamente pequeños de q , no se observa resonancia paramétrica eficiente en el intervalo temporal considerado. En consecuencia, el valor de $\tilde{\eta}_{\text{br}}$ reportado en estos casos debe interpretarse únicamente como una escala temporal de referencia asociada a una modificación tardía y débil de la dinámica, y no como una retro-reacción resonante bien desarrollada. En contraste, para $q \gtrsim 1$ la resonancia paramétrica se vuelve activa y el inicio de la retro-reacción se adelanta de manera significativa.

La dependencia de $\tilde{\eta}_{\text{br}}$ con q resulta no monótona, reflejando la estructura de bandas de inestabilidad de Floquet asociadas a la ecuación de Lamé del modelo cuártico. En particular, se identifican regímenes de transición donde la eficiencia resonante no aumenta

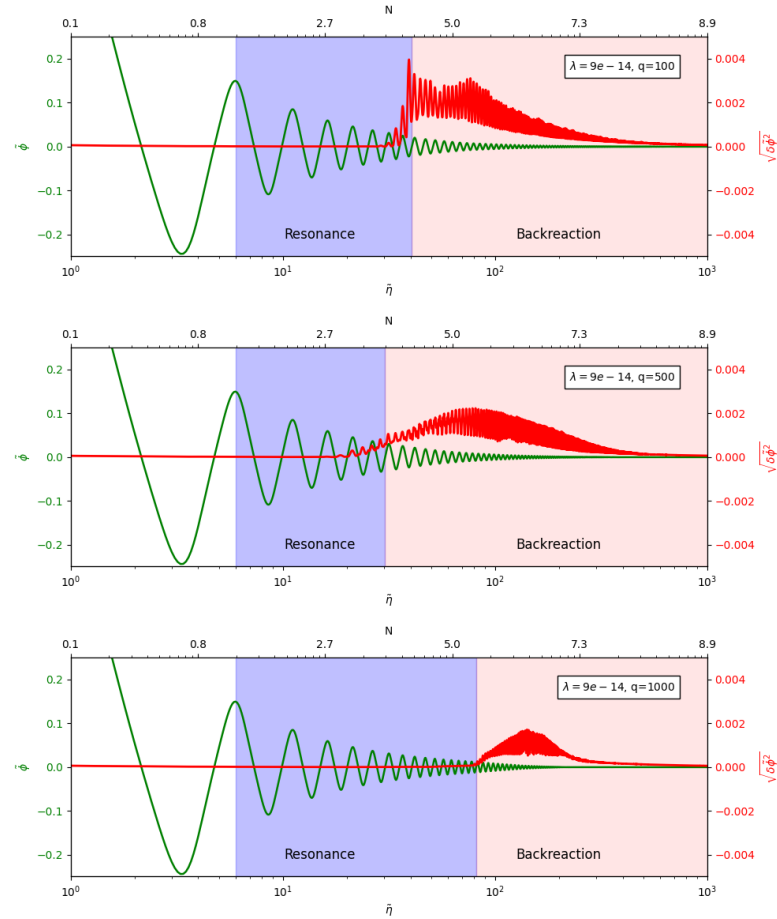


Figura 4.4: Evolución del inflatón promediado en volumen y de sus fluctuaciones espaciales para valores grandes del parámetro de acoplamiento $q = 100$, $q = 500$ y $q = 1000$. En este régimen de resonancia ancha fuerte, las fluctuaciones crecen de manera explosiva y alcanzan amplitudes comparables al modo homogéneo en tiempos cortos, dando lugar a una retro-reacción temprana y a una dinámica fuertemente no lineal.

de forma estrictamente creciente con q , así como un régimen de resonancia ancha para $q \gtrsim 100$, en el cual la retro-reacción ocurre de manera temprana y robusta.

Estos resultados confirman que el parámetro q controla no solo la presencia de resonancia paramétrica, sino también la escala temporal en la cual el régimen lineal se rompe, lo que justifica la clasificación de resonancia débil, estrecha, moderada y ancha empleada a lo largo de este trabajo.

Con el fin de cuantificar la dependencia del inicio de la retro-reacción con el parámetro de acoplamiento, se construye la Figura 4.5, donde se representa el tiempo conforme adimensional $\tilde{\eta}_{br}$ en función de $q = g^2/\lambda$, obtenido a partir del análisis de la evolución del inflatón promediado en volumen y de sus fluctuaciones.

Cuadro 4.2: Tiempo conforme adimensional $\tilde{\eta}_{\text{br}}$ asociado al inicio operacional de la pérdida de coherencia del modo homogéneo para distintos valores del parámetro de acoplamiento $q = g^2/\lambda$ para los casos eficientes es el inicio de la retro-reacción, estimado a partir del crecimiento de las fluctuaciones del inflatón y de la modificación apreciable de su dinámica promedio. En los casos sin resonancia eficiente, este valor debe interpretarse únicamente como una escala temporal de referencia dentro del intervalo simulado.

q	$\tilde{\eta}_{\text{br}}$
0	589.30
6.3×10^{-3}	589.30
0.1	589.30
1	162.30
2	219.20
5	129.50
10	400.40
20	80.20
30	35.50
100	40.60
500	30.40
1000	81.60

4.2. Efecto de la expansión cosmológica en las fluctuaciones

En esta sección se analiza la evolución temporal del modo homogéneo del inflatón, $\langle\tilde{\phi}\rangle$, junto con la amplitud de sus fluctuaciones, $\sqrt{\langle\delta\tilde{\phi}^2\rangle}$, para distintos valores del parámetro de acoplamiento q , comparando explícitamente los casos con expansión cosmológica auto-consistente y en un fondo estático de tipo Minkowski. Este análisis permite identificar de manera clara el impacto de la expansión del Universo sobre la eficiencia de la resonancia paramétrica y sobre la dinámica de la retro-reacción.

Caso desacoplado: $q = 0$

En las figuras correspondientes a $q = 0$ se observa que, tanto con expansión como sin ella, el inflatón evoluciona oscilando alrededor del mínimo del potencial cuártico. En el caso desacoplado se observa como la amplitud de las oscilaciones del inflatón permanecen constantes al no tener atenuación por parte de la expansión, el modo homogéneo presenta oscilaciones regulares, mientras que las fluctuaciones no son observables en ninguna parte del intervalo temporal analizado.

La amplitud de las fluctuaciones, $\sqrt{\langle\delta\tilde{\phi}^2\rangle}$, permanece siempre pequeña, indicando la ausencia de un mecanismo eficiente de amplificación resonante. Esto confirma que, en ausencia de acoplamiento con el campo secundario, no se produce resonancia paramétrica

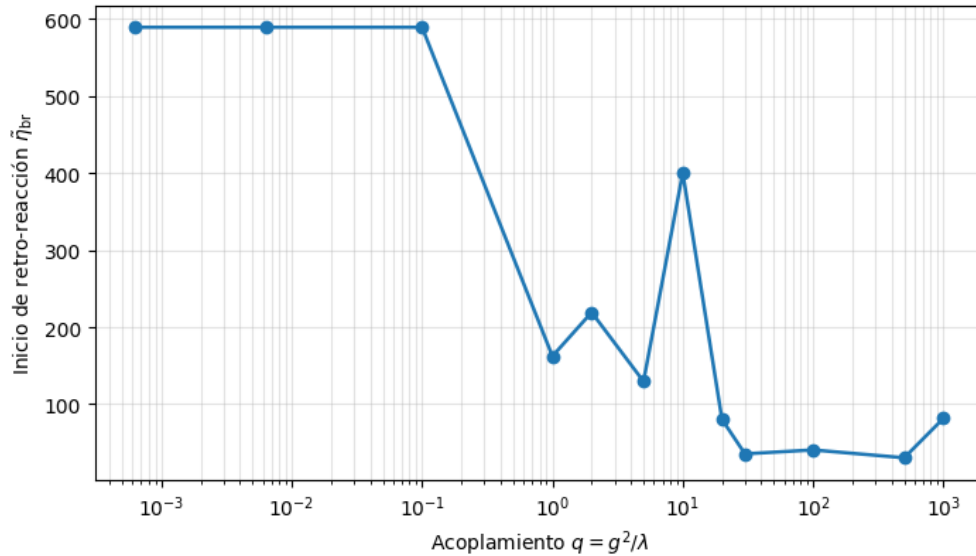


Figura 4.5: Tiempo conforme adimensional $\tilde{\eta}_{br}$ asociado al inicio operacional de la retro-reacción o, en los casos sin resonancia eficiente, a una escala de referencia tardía de la dinámica, como función del parámetro de acoplamiento $q = g^2/\lambda$. Para valores pequeños de q , la ausencia de amplificación resonante apreciable desplaza este tiempo hacia valores grandes. A medida que q aumenta, el inicio de la pérdida de coherencia del condensado homogéneo se adelanta de manera no monótona, reflejando la estructura de bandas de inestabilidad asociada al modelo cuártico. En el régimen de resonancia ancha, la retro-reacción aparece tempranamente, indicando una transferencia de energía más eficiente hacia modos inhomogéneos.

ni transferencia significativa de energía hacia modos inhomogéneos. La aparición tardía de fluctuaciones de muy baja amplitud puede atribuirse a efectos puramente numéricos o a excitaciones débiles inducidas por la discretización.

La comparación entre el fondo Minkowski y el Universo en expansión muestra que la expansión introduce únicamente una amortiguación global de la amplitud del modo homogéneo, sin modificar cualitativamente la dinámica, dado que no existen términos resonantes activos.

Resonancia paramétrica intermedia: $q = 5$

El caso $q = 5$ corresponde a un régimen de resonancia paramétrica intermedia, donde la interacción entre el inflatón y el campo secundario es suficientemente fuerte como para generar inestabilidades, pero sin alcanzar aún el régimen de resonancia ancha.

En el escenario sin expansión, el modo homogéneo del inflatón mantiene oscilaciones de gran amplitud durante la fase resonante, lo que se traduce en una amplificación

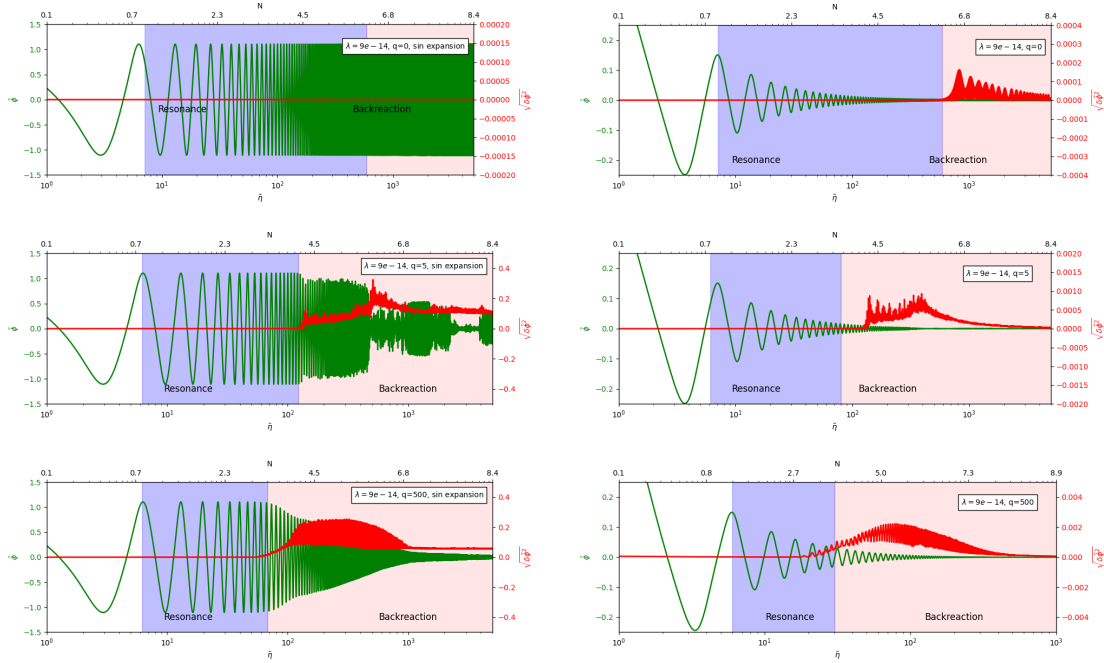


Figura 4.6: Comparación de la evolución del inflatón promediado en volumen y de sus fluctuaciones espaciales en escenarios sin expansión cosmológica (columna izquierda) y con expansión cosmológica auto-consistente (columna derecha). Las filas superior, intermedia e inferior corresponden a $q = 0$, $q = 5$ y $q = 500$, respectivamente. La expansión cosmológica introduce un término de fricción que amortigua el crecimiento de las fluctuaciones y retrasa el inicio de la retro-reacción, sin suprimir la resonancia en el régimen de acoplamiento fuerte.

rápida y eficiente de $\sqrt{\langle \delta \tilde{\phi}^2 \rangle}$. La transición hacia el régimen de retro-reacción ocurre de forma abrupta, observándose una pérdida rápida de coherencia del modo homogéneo, acompañada por fluctuaciones de gran amplitud. Este comportamiento es característico de un sistema gobernado por ecuaciones de tipo Lamé con exponentes de Floquet relativamente grandes.

Por el contrario, cuando se incluye la expansión cosmológica, la dinámica cambia de manera significativa. El término de fricción cosmológica $3H\dot{\phi}$ amortigua progresivamente las oscilaciones del inflatón, reduciendo la eficiencia de la resonancia. Como consecuencia, el crecimiento de las fluctuaciones es más gradual y la transición hacia la fase de retro-reacción se retrasa en el tiempo. La amplitud máxima alcanzada por $\sqrt{\langle \delta \tilde{\phi}^2 \rangle}$ es menor que en el caso sin expansión, lo que indica una transferencia de energía menos eficiente hacia los modos inhomogéneos.

Este resultado ilustra de manera clara cómo la expansión del Universo actúa como un mecanismo regulador de la resonancia paramétrica, suavizando la transición hacia el

régimen no lineal.

Resonancia ancha: $q = 500$

Para valores grandes del parámetro de acoplamiento, como $q = 500$, el sistema entra en un régimen de resonancia ancha, caracterizado por la superposición de múltiples bandas de inestabilidad en el espacio de momentos.

En el caso sin expansión, la resonancia es extremadamente eficiente: el crecimiento de las fluctuaciones es muy rápido y conduce a una fase de retro-reacción temprana y altamente no lineal. La amplitud del modo homogéneo del inflatón se ve severamente afectada, mostrando una rápida pérdida de periodicidad y una redistribución significativa de energía hacia los modos inhomogéneos.

Cuando se considera la expansión cosmológica, la resonancia sigue siendo efectiva, pero su intensidad se ve moderada. Aunque $\sqrt{\langle \delta\tilde{\phi}^2 \rangle}$ alcanza valores comparables a los del caso sin expansión, el crecimiento ocurre en un intervalo temporal más amplio y la saturación de la resonancia es más suave. La expansión provoca un corrimiento dinámico de los modos resonantes y reduce parcialmente la coherencia de las oscilaciones del inflatón, retrasando el inicio de la retro-reacción.

Este comportamiento confirma que, incluso en el régimen de resonancia ancha, la expansión cosmológica desempeña un papel no trivial en la dinámica post-inflacionaria, afectando tanto la tasa de crecimiento de las inestabilidades como el tiempo característico de aparición de la retro-reacción.

4.3. Evolución de las fracciones de energía

En esta sección se analizan las fracciones de energía asociadas a los distintos términos cinéticos, de gradiente y potencial del inflatón y del campo escalar acoplado, obtenidas a partir de simulaciones numéricas con el código CosmoLattice. Para cada simulación se define la fracción de energía como

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_{\text{tot}}(t)}, \quad (4.4)$$

donde ρ_{tot} es la densidad de energía total del sistema. Las contribuciones etiquetadas como Ω_{k0} , Ω_{g0} y Ω_{v0} corresponden a los términos cinético, de gradiente y potencial del inflatón, respectivamente, mientras que Ω_{k1} , Ω_{g1} y Ω_{v1} representan las contribuciones análogas del campo secundario χ .

Resonancia estrecha (narrow resonance): $q \ll 1$

Las Figuras correspondientes a $q = 0$, $q = 0.006$ y $q = 10^{-1}$ muestran el comportamiento característico del régimen de resonancia estrecha. En este caso, la dinámica está dominada casi por completo por el inflatón. La fracción de energía potencial del inflatón, Ω_{v0} , permanece cercana a la unidad durante toda la evolución, mientras que las contribuciones asociadas al campo secundario se mantienen varios órdenes de magnitud por debajo, típicamente en el rango $\Omega_1 \sim 10^{-12}$ – 10^{-15} .

No se observa un crecimiento sostenido de las fracciones de energía del campo χ , lo que indica que las bandas de resonancia son angostas y excitan únicamente un conjunto muy reducido de modos. Como consecuencia, la transferencia de energía desde el inflatón resulta ineficiente y el sistema permanece cercano al régimen homogéneo durante toda la simulación.

Régimen de transición: $1 \lesssim q \lesssim 5$

Para valores intermedios del acoplamiento, $q = 1, 2$ y 5 , se observa un cambio cualitativo en la evolución de las fracciones de energía. En este régimen, las contribuciones cinéticas y de gradiente del campo χ comienzan a crecer de manera apreciable a partir de tiempos $t \sim 10^2$, aunque dicho crecimiento no es estrictamente exponencial ni sostenido.

La transferencia de energía desde el inflatón hacia el campo acoplado es parcial, y las fracciones de energía exhiben un comportamiento intermitente, con fases de amplificación seguidas de oscilaciones. Este comportamiento es característico de un régimen de transición entre resonancia estrecha y resonancia ancha, en el cual las bandas de inestabilidad comienzan a ensancharse, pero aún no se solapan de manera suficiente como para producir una amplificación explosiva.

Resonancia ancha moderada: $10 \leq q \leq 30$

En las simulaciones con $q = 10, 20$ y 30 , la resonancia paramétrica se vuelve claramente eficiente. Las fracciones de energía asociadas al campo χ crecen rápidamente varios órdenes de magnitud, y Ω_{k1} y Ω_{g1} alcanzan valores comparables a los del inflatón en tiempos relativamente cortos.

De manera simultánea, se observa una disminución significativa de la energía potencial del inflatón, Ω_{v0} , lo que evidencia una transferencia no perturbativa de energía. El crecimiento de las contribuciones del campo acoplado se detiene posteriormente, marcando el inicio del régimen de retro-reacción, cuando las fluctuaciones modifican de forma sustancial la dinámica del modo homogéneo del inflatón y apagan las bandas de resonancia.

Resonancia ancha fuerte: $q \gg 1$

Para valores grandes del parámetro de acoplamiento, $q = 100, 500$ y 1000 , el sistema entra en el régimen de resonancia ancha fuerte. En este caso, las bandas de inestabilidad son amplias y se solapan, excitando simultáneamente un gran número de modos del campo secundario.

La energía asociada al campo χ crece de manera explosiva y alcanza fracciones significativas de la energía total en tiempos muy tempranos. La retro-reacción aparece rápidamente, dando lugar a una saturación temprana del crecimiento resonante. La evolución posterior se caracteriza por oscilaciones irregulares de las fracciones de energía, reflejando un régimen altamente no lineal en el que la coherencia del inflatón se pierde casi por completo.

4.4. Efecto de la expansión cosmológica en las fracciones de energía

En ausencia de acoplamiento ($q=0$), el inflatón permanece esencialmente homogéneo. En un fondo de Minkowski, la energía de gradiente se mantiene constante, reflejando únicamente las fluctuaciones iniciales. En contraste, al incluir la expansión cosmológica, la dilución de los modos comóviles y la fricción de Hubble introducen oscilaciones suaves en la energía de gradiente, sin que ello implique la presencia de resonancia paramétrica ni crecimiento no lineal.

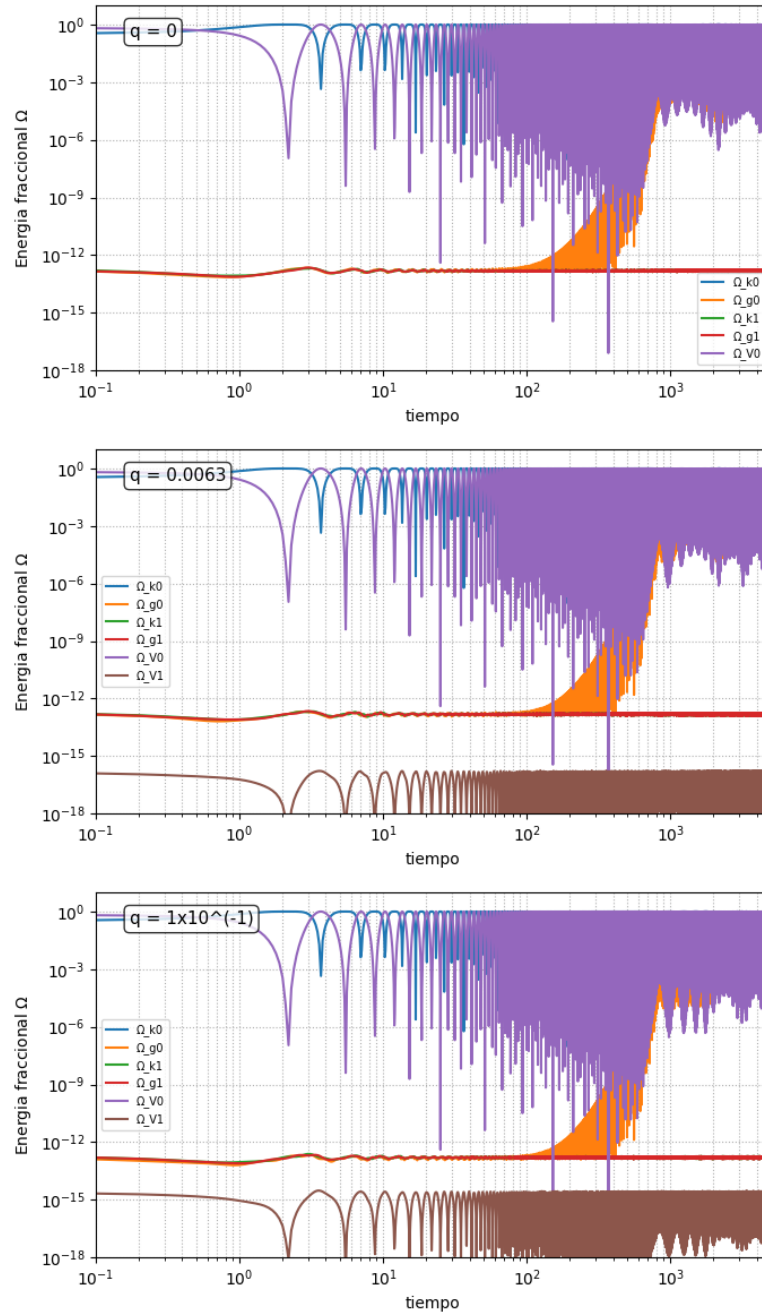


Figura 4.7: Evolución temporal de las fracciones de energía del sistema en tiempo conforme $\tilde{\eta}$ para valores pequeños del parámetro de acoplamiento $q = 0$, $q = 6 \times 10^{-3}$ y $q = 10^{-1}$, correspondientes al régimen de resonancia estrecha. La energía está dominada por el inflatón, con la fracción de energía potencial $\Omega_{v,0}$ cercana a la unidad durante toda la evolución. Las contribuciones cinéticas y de gradiente del campo secundario permanecen suprimidas varios órdenes de magnitud, indicando una transferencia de energía ineficiente y la ausencia de resonancia paramétrica efectiva.

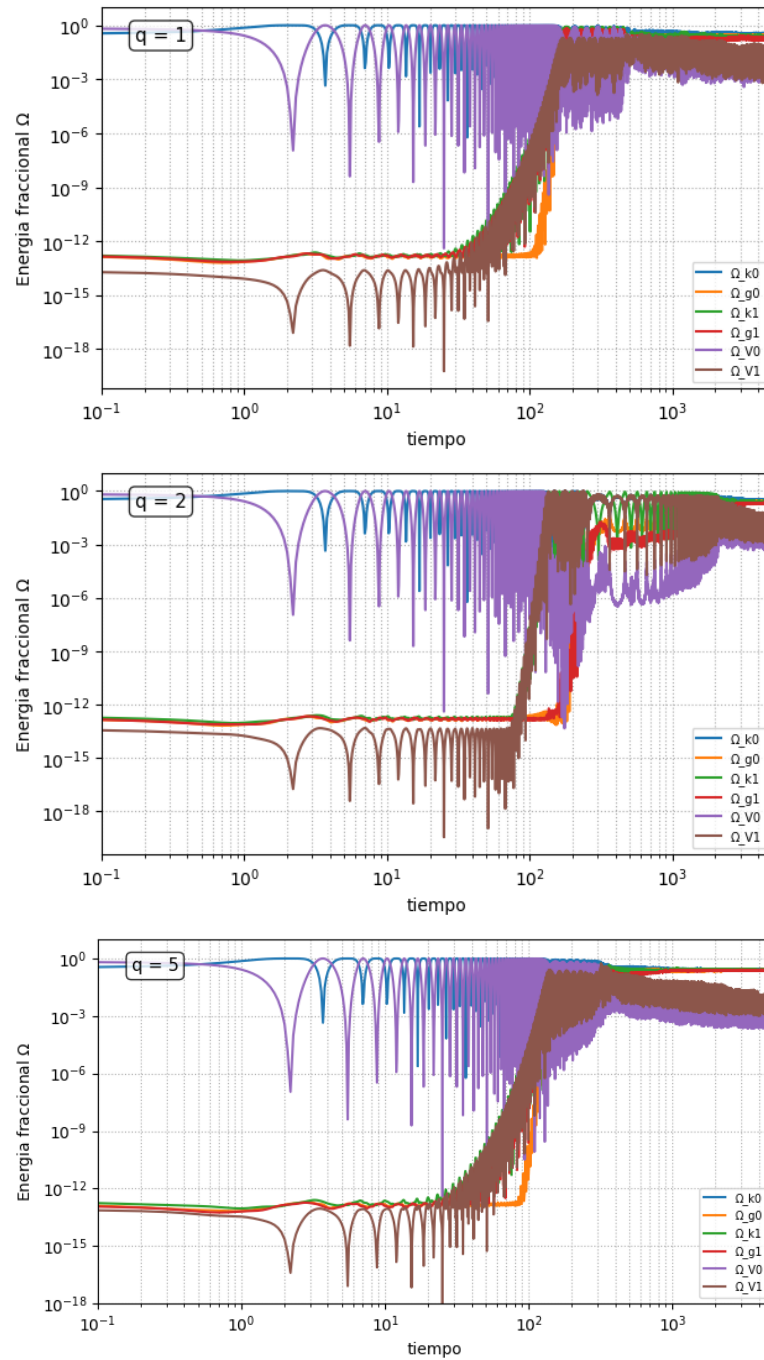


Figura 4.8: Fracciones de energía en función del tiempo conforme $\tilde{\eta}$ para valores intermedios del acoplamiento $q = 1$, $q = 2$ y $q = 5$, correspondientes al régimen de transición entre resonancia estrecha y resonancia ancha. Las contribuciones cinéticas y de gradiente del campo secundario comienzan a crecer, aunque sin presentar una amplificación sostenida. La transferencia de energía desde el inflatón es parcial y se manifiesta en un comportamiento intermitente, característico de bandas de resonancia aún poco desarrolladas.

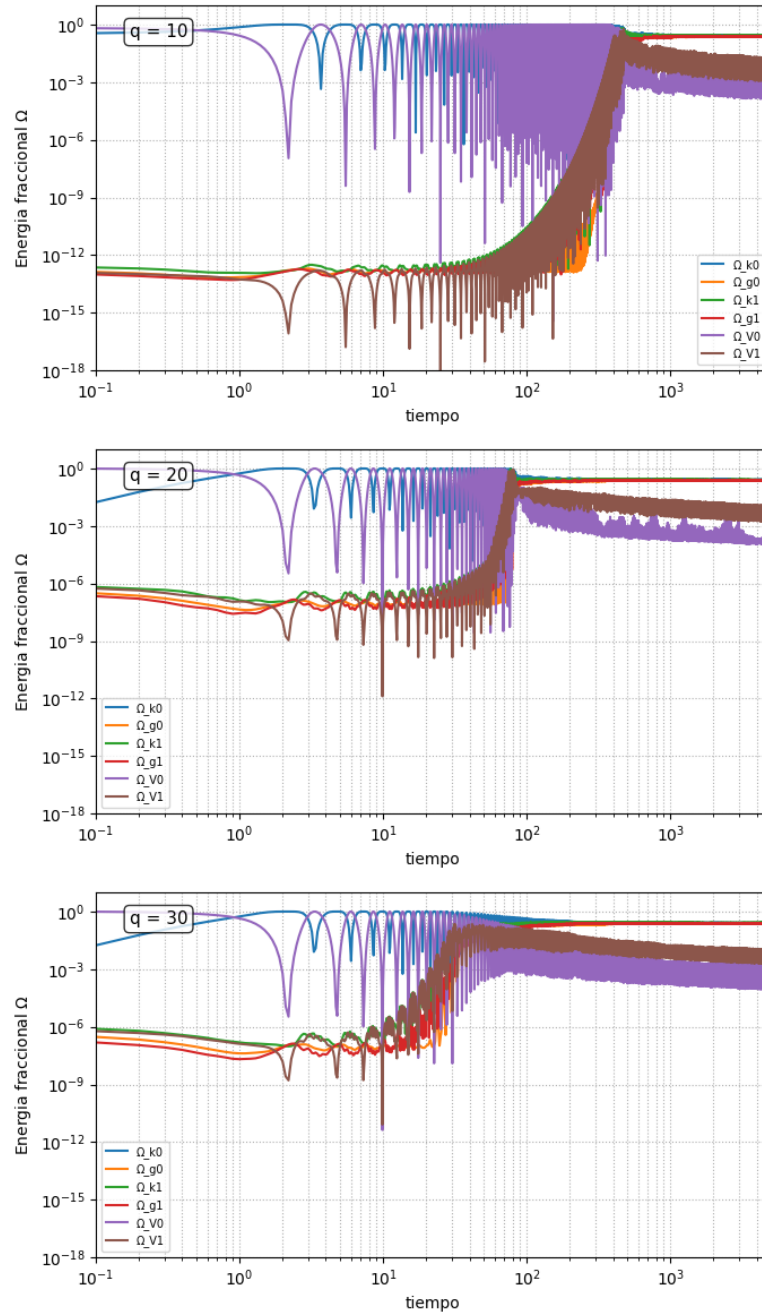


Figura 4.9: Evolución de las fracciones de energía del sistema para $q = 10$, $q = 20$ y $q = 30$, representativos del régimen de resonancia ancha moderada. Se observa un crecimiento rápido de las fracciones de energía asociadas al campo secundario, Ω_{k1} y Ω_{g1} , acompañado por una disminución significativa de la energía potencial del inflatón Ω_{v0} . Este comportamiento indica una transferencia de energía no perturbativa y marca el inicio del régimen de retro-reacción, donde la dinámica deja de estar dominada por el modo homogéneo.

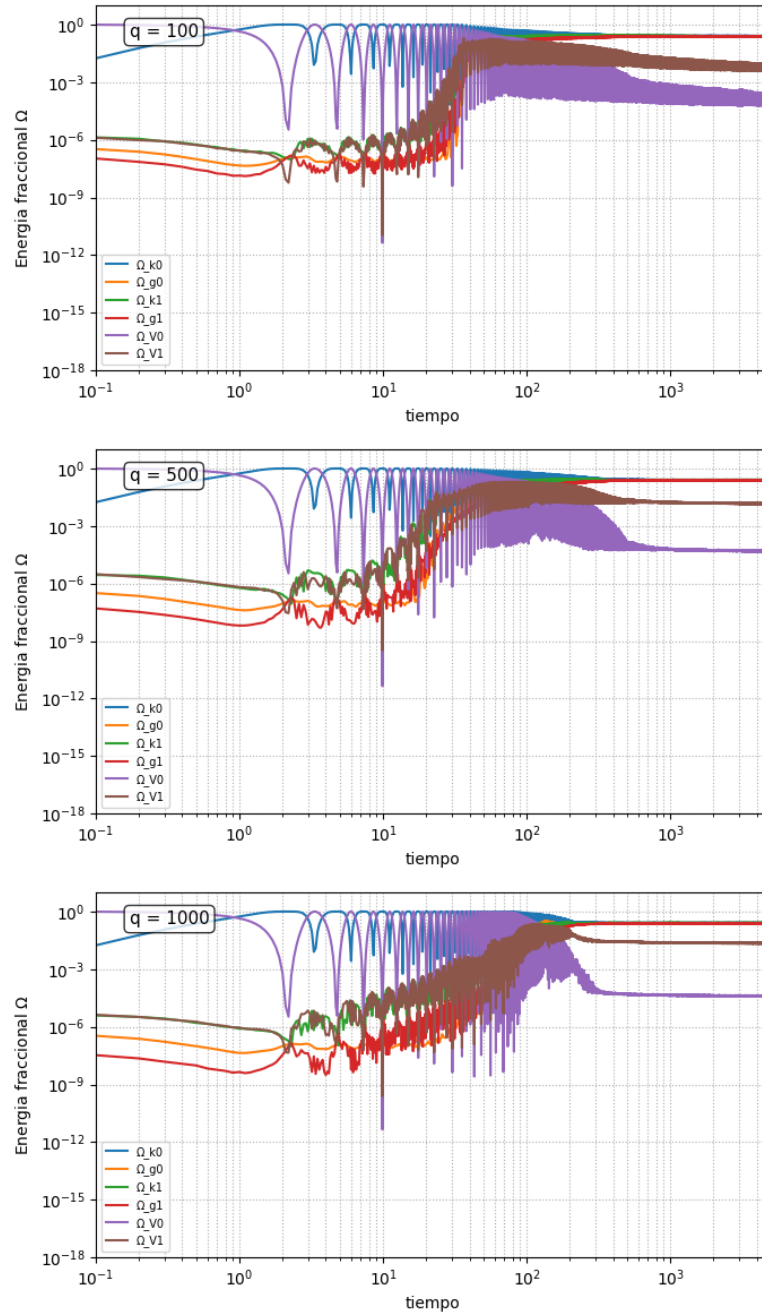


Figura 4.10: Fracciones de energía en tiempo conforme $\tilde{\eta}$ para valores grandes del acoplamiento $q = 100$, $q = 500$ y $q = 1000$, correspondientes al régimen de resonancia ancha fuerte. Las contribuciones del campo secundario crecen de manera explosiva y alcanzan fracciones significativas de la energía total en tiempos tempranos. La retro-reacción aparece rápidamente, dando lugar a una saturación temprana del crecimiento resonante y a una evolución altamente no lineal, caracterizada por oscilaciones irregulares y pérdida de coherencia del inflatón.

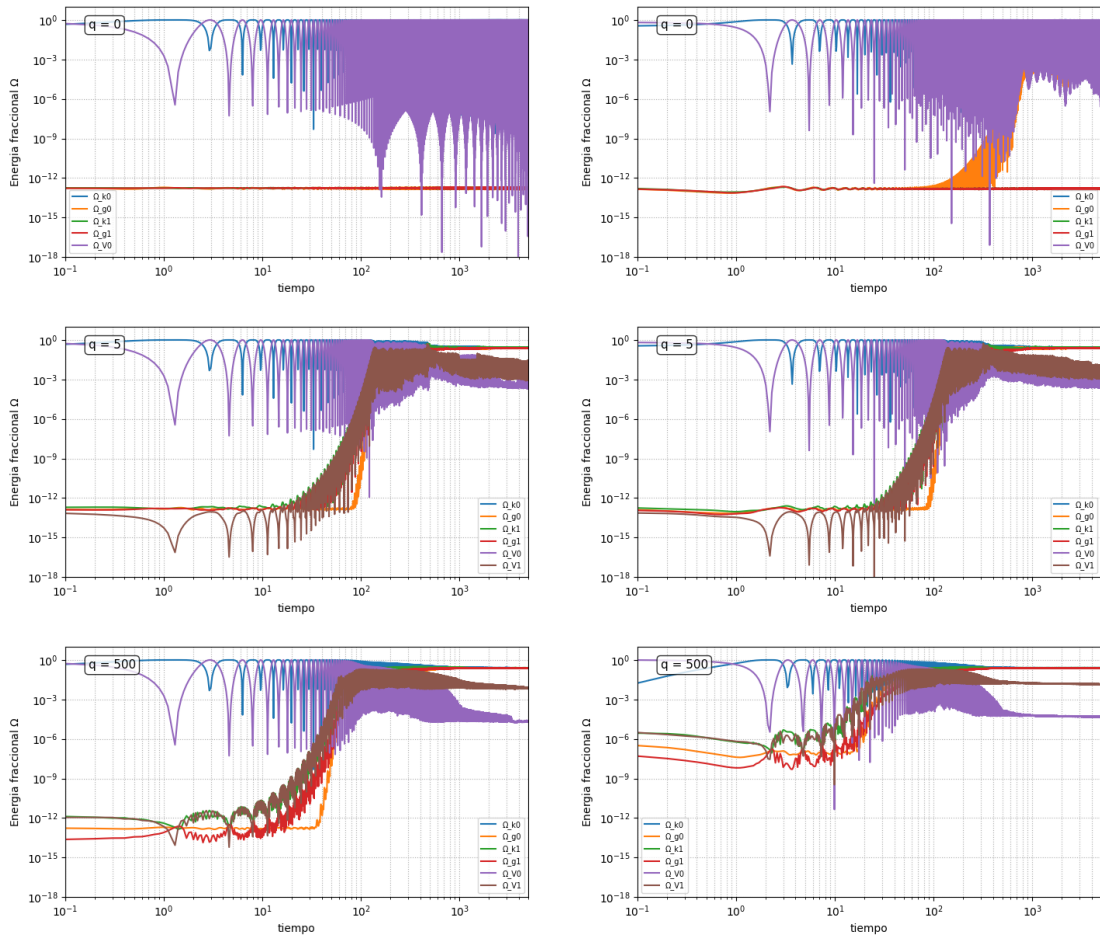


Figura 4.11: Comparación de las fracciones de energía del sistema para universos sin expansión (izquierda) y con expansión cosmológica (derecha), para $q = 0$ (fila superior), $q = 5$ (fila intermedia) y $q = 500$ (fila inferior). En ausencia de expansión, la resonancia paramétrica conduce a una transferencia de energía más eficiente y a un crecimiento más abrupto de las contribuciones del campo secundario. La inclusión de la expansión cosmológica introduce fricción de Hubble, suavizando el crecimiento resonante, retrasando el inicio de la retro-reacción y modificando la redistribución de energía entre los distintos componentes del sistema.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la dinámica del precalentamiento postinflacionario en un modelo inflacionario cuártico en el que el inflatón se encuentra acoplado a un campo escalar secundario. El objetivo principal fue analizar la aparición de resonancia paramétrica y evaluar su efecto sobre la transferencia de energía y la transición hacia el régimen no lineal.

Desde el punto de vista numérico, se implementó el código *CosmoLattice* para estudiar de manera no perturbativa la evolución del sistema. Las simulaciones permitieron seguir la evolución temporal del inflatón promediado en volumen, el crecimiento de sus fluctuaciones espaciales y la redistribución de la energía entre sus componentes cinética, potencial y de gradiente. Asimismo, se compararon escenarios con expansión cosmológica auto-consistente y escenarios sin expansión, descritos por un fondo estático de tipo Minkowski.

Los resultados mostraron una dependencia clara de la dinámica con el parámetro q . Para valores pequeños de q , la resonancia paramétrica resultó ineficiente y el sistema permaneció dominado por el modo homogéneo del inflatón, con crecimiento débil de las fluctuaciones y transferencia de energía limitada. Para valores intermedios, se observó un régimen de transición caracterizado por una amplificación parcial e intermitente. En cambio, para valores grandes de q , emergió un régimen de resonancia ancha en el que la transferencia no perturbativa de energía hacia los modos inhomogéneos se volvió mucho más eficiente y la retro-reacción apareció en tiempos más tempranos.

El análisis de las fracciones de energía confirmó esta tendencia. En el régimen de acoplamiento fuerte, las contribuciones energéticas asociadas al campo secundario adquirieron una fracción significativa de la energía total del sistema, mientras que la energía potencial del inflatón disminuyó de manera apreciable. Este comportamiento es consistente con una transferencia eficiente de energía durante el precalentamiento y con la pérdida progresiva de coherencia del condensado homogéneo.

La comparación entre los escenarios con y sin expansión permitió establecer que la expansión cosmológica modifica de manera importante la evolución del sistema. En particular, la expansión amortigua el crecimiento de las fluctuaciones, retrasa el inicio de la retro-reacción y suaviza la transición hacia el régimen no lineal. No obstante, en

el régimen de acoplamiento fuerte, la expansión no impide el desarrollo del precalentamiento, sino que altera principalmente sus escalas temporales y la forma en que se redistribuye la energía entre los distintos componentes del sistema.

En conjunto, los resultados obtenidos muestran que la resonancia paramétrica desempeña un papel central en la dinámica del precalentamiento dentro del modelo estudiado y ponen de relieve la utilidad de las simulaciones no perturbativas para describir la evolución temprana del sistema cuando las aproximaciones lineales dejan de ser suficientes.

Limitaciones y trabajo futuro

Este trabajo se desarrolló dentro de un modelo específico de precalentamiento y se centró en la dinámica no lineal de los campos escalares en las variables reescaladas internas del programa. En consecuencia, los resultados se interpretan principalmente en términos adimensionales y dentro del marco del benchmark considerado.

Además, no se incorporaron términos disipativos explícitos ni un tratamiento térmico del plasma producido. En particular, no se analizó la generación de radiación térmica ni la etapa posterior de termalización. Por ello, los resultados presentados deben entenderse como una caracterización del régimen de precalentamiento no perturbativo, más que como una descripción completa de todo el proceso de recalentamiento.

Como continuación natural de este trabajo, sería de interés incorporar términos disipativos efectivos, estudiar con mayor detalle la evolución espectral de las excitaciones producidas y extender el análisis hacia etapas posteriores del recalentamiento, incluyendo procesos de termalización y conexiones fenomenológicas más directas con observables cosmológicos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Scott Dodelson y Fabian Schmidt. *Modern Cosmology*. 2.^a ed. Academic Press, 2021. ISBN: 978-0-12-815948-4. DOI: 10.1016/B978-0-12-815948-4.00007-3. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128159484000073>.
- [2] Antonio Riotto. *Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations*. 2017. arXiv: hep-ph/0210162 [hep-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210162>.
- [3] S. Ramos-Sánchez y O. M. Vidal. *Relatividad para futuros físicos*. Textos contemporáneos. Copit-Arxives, 2018. ISBN: 9781938128189. URL: <https://books.google.com/sv/books?id=mulfDwAAQBAJ>.
- [4] Wilson Alberto Barrera Vásquez. «Cálculo del espectro de potencia primordial para potenciales inflacionarios». Tesis de licenciatura. San Salvador, El Salvador: Universidad de El Salvador, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, 2023.
- [5] Alexander Larin. «Pruebas de modelos inflacionarios basadas en observaciones de radiación cósmica de fondo». Tesis de licenciatura. San Salvador, El Salvador: Universidad de El Salvador, 2021.
- [6] ESA and the Planck Collaboration. *Planck Cosmic Microwave Background temperature map*. Credit: ESA and the Planck Collaboration. 2018. URL: https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Planck.
- [7] A. B. Henriques y R. G. Moorhouse. «Cosmic microwave background and parametric resonance in reheating». En: *Physical Review D* 65.10 (mayo de 2002). ISSN: 1089-4918. DOI: 10.1103/physrevd.65.103524. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.65.103524>.
- [8] Jennie Traschen y Robert Brandenberger. «Particle Production during Out-of-Equilibrium Phase Transitions». En: *Phys. Rev. D* 42 (1990), págs. 2491-2504.
- [9] M. C. Guzzetti et al. «Gravitational waves from inflation». En: *La Rivista del Nuovo Cimento* 39.9 (ago. de 2016), págs. 399-495. DOI: 10.1393/ncr/i2016-10127-1. URL: <https://doi.org/10.1393/ncr/i2016-10127-1>.
- [10] Siddharth S. Bhatt et al. *Numerical simulations of inflationary dynamics: slow roll and beyond*. 2024. arXiv: 2212.00529 [gr-qc]. URL: <https://arxiv.org/abs/2212.00529>.
- [11] Lev Kofman, Andrei Linde y Alexei A. Starobinsky. «Towards the theory of reheating after inflation». En: *Physical Review D* 56.6 (sep. de 1997), págs. 3258-3295. ISSN: 1089-4918. DOI: 10.1103/physrevd.56.3258. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.56.3258>.

- [12] P. B. Greene et al. «Structure of resonance in preheating after inflation». En: *Physical Review D* 56 (1997), págs. 6175-6192. DOI: 10.1103/PhysRevD.56.6175. arXiv: hep-ph/9705347 [hep-ph].
- [13] J. P. Zibin, R. Brandenberger y Douglas Scott. «Backreaction and the parametric resonance of cosmological fluctuations». En: *Physical Review D* 63.4 (ene. de 2001). ISSN: 1089-4918. DOI: 10.1103/physrevd.63.043511. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.63.043511>.
- [14] Raphael Micha e Igor I. Tkachev. «Turbulent thermalization». En: *Physical Review D* 70.4 (ago. de 2004). ISSN: 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.70.043538. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.70.043538>.
- [15] Daniel G. Figueroa et al. «The art of simulating the early universe. Part I. Integration techniques and canonical cases». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2021.04 (abr. de 2021), pág. 035. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2021/04/035>.
- [16] Daniel G. Figueroa et al. «CosmoLattice: A modern code for lattice simulations of scalar and gauge field dynamics in an expanding universe». En: *Computer Physics Communications* 283 (feb. de 2023), pág. 108586. ISSN: 0010-4655. DOI: 10.1016/j.cpc.2022.108586. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2022.108586>.
- [17] Mustafa A. Amin et al. «Nonperturbative dynamics of reheating after inflation: A review». En: *International Journal of Modern Physics D* 24.01 (dic. de 2014), pág. 1530003. ISSN: 1793-6594. DOI: 10.1142/S0218271815300037. URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218271815300037>.
- [18] Paulo M. Sá y Alfredo B. Henriques. «Parametric resonance and cosmological gravitational waves». En: *Physical Review D* 77.6 (mar. de 2008). ISSN: 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.77.064002. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.77.064002>.
- [19] Bruce Bassett. «Preheating–gravitational-wave correspondence». En: *Physical Review D* 56.6 (sep. de 1997), págs. 3439-3445. ISSN: 1089-4918. DOI: 10.1103/physrevd.56.3439. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.56.3439>.
- [20] Mohammed Shafi et al. *Formation and decay of oscillons after inflation in the presence of an external coupling, Part-I: Lattice simulations*. 2024. arXiv: 2406.00108 [hep-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/2406.00108>.

Apéndice A

GRAFICAS

A.1. Graficas de fracciones de energía

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # n=32, t=5000, q=500
5 # --- Cargar datos ---
6 # Si subiste el archivo a /content en Colab:
7 ruta = "/content/average_energies_q500.txt"
8 d = np.loadtxt(ruta)
9
10 t = d[:,0]
11 cols = d[:,1:]
12 rho_tot = cols[:,-1]
13
14 # --- evitar log(0) ---
15 mask = (t > 0) & (rho_tot > 0)
16 t = t[mask]
17 cols = cols[mask,:]
18 rho_tot = rho_tot[mask]
19
20 # --- L mites log que pediste ---
21 x_min, x_max = 1e-1, 5000 # X: 10^-1      10^3
22 y_min, y_max = 0, 1e1 # Y: 10^-7      10^1
23
24
25 # ===== Plot 1: Energ as absolutas =====
26 plt.figure(figsize=(7,4))
27 for i in range(cols.shape[1]):
28     plt.plot(t, cols[:,i], label=f"E_col_{i+1}")
29
30 plt.xscale("log")
31 plt.yscale("log")
32 plt.xlim(x_min, x_max)

```

```

33 plt.ylim(y_min, y_max)
34 plt.xlabel("time"); plt.ylabel("energy")
35 plt.legend(fontsize=7)
36 plt.grid(True, which="both", ls=":")
37 plt.show()
38
39
40 # ===== Plot 2: Fracciones      = Ei/E_tot =====
41 labels2 = [ "_k0 ", "_g0 ", "_k1 ", "_g1 ", "_V0 ", "_V1 "
42            ]
43 plt.figure(figsize=(7,4))
44 for i in range(cols.shape[1]-1): # todas menos la total
45     Omega = cols[:,i] / rho_tot
46     valid = Omega > 0
47     if np.any(valid):
48         plt.plot(t[valid], Omega[valid], label=labels2[i])
49
50 plt.xscale("log")
51 plt.yscale("log")
52 plt.xlim(x_min, x_max)
53 plt.ylim(y_min, y_max)
54 plt.xlabel("time"); plt.ylabel("fractional_energy_ ")
55 plt.legend(fontsize=7)
56 plt.grid(True, which="both", ls=":")
57 plt.show()

```

Listing A.1: Cálculo de fracciones de energía a partir de los datos de CosmoLattice

A.2. Gráficas del inflatón promediado en volumen

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # =====
5 # CONFIGURACION
6 # =====
7 FILE_AVG_SCALAR = "average_scalar_0.txt"
8 FILE_AVG_A      = "average_scale_factor.txt"
9
10 # Parámetros de detección (ajustables)

```

```

11 GROWTH_THRESH = 0.05      # umbral m nimo de pendiente de log
    (rms) para "resonancia"
12 MIN_INDEX_START = 5      # ignorar puntos muy tempranos
13 EPS           = 1e-30    # evitar log(0)
14
15 # Par metros para anotaci n
16 LAMBDA_VALUE = 9e-14
17 Q_VALUE      = 5
18
19 def load_scalar_average(fname):
20     """
21     Lee average_scalar_0.txt (CosmoLattice).
22     col 0: eta_tilde
23     col 1: <phi>
24     col 5: rms(phi) = sqrt(<phi^2> - <phi>^2)
25     """
26     data = np.loadtxt(fname)
27     eta_tilde = data[:, 0]
28     phi_mean  = data[:, 1]
29     phi_rms   = data[:, 5]
30     return eta_tilde, phi_mean, phi_rms
31
32 def load_scale_factor(fname):
33     """
34     Lee average_scale_factor.txt.
35     col 0: eta_tilde
36     col 1: a(eta_tilde)
37     """
38     data = np.loadtxt(fname)
39     eta_a = data[:, 0]
40     a     = data[:, 1]
41     return eta_a, a
42
43 def detect_phases(mt, phi_mean, delta_phi):
44     """
45     Detecta autom ticamente:
46     - inicio de resonancia: cuando d/d(mt) log(delta_phi)
        supera un umbral

```

```

47     - inicio de backreaction: cuando  $\Delta\phi^2 \geq \phi_{\text{mean}}^2$ 
48         ^2
49     Devuelve ndices : idx_res, idx_back
50     """
51     log_delta = np.log(delta_phi + EPS)
52     growth = np.gradient(log_delta, mt)
53
54     # Inicio de resonancia
55     candidates = np.where(growth > GROWTH_THRESH)[0]
56     candidates = candidates[candidates > MIN_INDEX_START]
57
58     idx_res = candidates[0] if len(candidates) > 0 else
59         MIN_INDEX_START
60
61     # Inicio de backreaction
62     delta_phi2 = delta_phi**2
63     phi2 = phi_mean**2
64
65     back_candidates = np.where(delta_phi2 >= phi2)[0]
66     back_candidates = back_candidates[back_candidates > idx_res
67         ]
68
69     if len(back_candidates) > 0:
70         idx_back = back_candidates[0]
71     else:
72         # fallback: primer punto donde el crecimiento cae (
73         #     aprox. saturaci n)
74         growth_negative = np.where(growth < 0)[0]
75         growth_negative = growth_negative[growth_negative >
76             idx_res]
77         idx_back = growth_negative[0] if len(growth_negative) >
78             0 else (len(mt) - 1)
79
80     return idx_res, idx_back
81
82 def main():
83     # =====

```

```

79 # 1) Cargar datos
80 # =====
81 eta_tilde, phi_mean, phi_rms = load_scalar_average(
      FILE_AVG_SCALAR)
82 eta_a, a = load_scale_factor(FILE_AVG_A)
83
84 # Identificaci n mt ~ eta_tilde (seg n tu convenci n de
      analisis)
85 mt = eta_tilde
86 delta_phi = phi_rms
87
88 # =====
89 # 2) N mero de e-folds N(eta)
90 # =====
91 a_on_phi = np.interp(mt, eta_a, a)
92 N = np.log(a_on_phi / a_on_phi[0])
93
94 # =====
95 # 3) Detectar resonancia / backreaction
96 # =====
97 idx_res, idx_back = detect_phases(mt, phi_mean, delta_phi)
98 mt_res_start = mt[idx_res]
99 mt_back_start = mt[idx_back]
100
101 print(f"Inicio de Resonancia (aprox): {mt[idx_res]:.3e}")
102 print(f"Inicio de Backreaction (aprox): {mt[idx_back]:.3e}")
103
104 # =====
105 # 4) Rango del eje X (log)
106 # =====
107 x_min = max(1e-1, mt[0])
108 x_max = min(1e4, mt[-1])
109
110 # =====
111 # 5) Figura: doble eje Y + eje superior N
112 # =====

```

```

113 fig, ax_left = plt.subplots(figsize=(9, 4))
114
115 # Eje izquierdo: <math>\langle \phi \rangle</math>
116 line_phi, = ax_left.plot(
117     mt, phi_mean,
118     color="green", lw=1.8,
119     label=r"$\langle \tilde{\phi} \rangle$"
120 )
121 ax_left.set_xlabel(r"$mt$")
122 ax_left.set_ylabel(r"$\langle \tilde{\phi} \rangle$", color="
    green")
123 ax_left.tick_params(axis="y", labelcolor="green")
124
125 ax_left.set_xscale("log")
126 ax_left.set_xlim(x_min, x_max)
127
128 # Ajusta según tu figura
129 ax_left.set_ylim(-0.25, 0.25)
130
131 # Eje derecho: sqrt(varianza)
132 ax_right = ax_left.twinx()
133 line_rms, = ax_right.plot(
134     mt, delta_phi,
135     color="red", lw=2.0,
136     label=r"$\sqrt{\langle \delta \tilde{\phi} \rangle^2}$"
137 )
138 ax_right.set_ylabel(r"$\sqrt{\langle \delta \tilde{\phi} \rangle^2 \
    rangle}$", color="red")
139 ax_right.tick_params(axis="y", labelcolor="red")
140
141 # Ajusta según tu figura (si quieres log, descomenta)
142 ax_right.set_ylim(-0.005, 0.005)
143 # ax_right.set_yscale("log")
144
145 # Eje superior: N (e-folds)
146 ax_top = ax_left.twinx()
147 ax_top.set_xscale("log")
148 ax_top.set_xlim(ax_left.get_xlim())

```

```

149
150     xticks = np.logspace(np.log10(x_min), np.log10(x_max), 5)
151     N_at_ticks = np.interp(xticks, mt, N)
152
153     ax_top.set_xticks(xticks)
154     ax_top.set_xticklabels([f"{Ni:.1f}" for Ni in N_at_ticks])
155     ax_top.set_xlabel(r"N mero\de\le-folds\_$N\$")
156
157     # =====
158     # 6) Franjas: resonancia / backreaction
159     # =====
160     ax_left.axvspan(mt_res_start, mt_back_start, color="violet"
161                    , alpha=0.25)
162     ax_left.axvspan(mt_back_start, x_max, color="red", alpha
163                    =0.10)
164
165     x_res_text = np.sqrt(mt_res_start * mt_back_start)
166     x_back_text = np.sqrt(mt_back_start * x_max)
167     y_center = 0.5 * (ax_left.get_ylim()[0] + ax_left.get_ylim
168                    ()[1])
169
170     ax_left.text(x_res_text, y_center, "Resonance", ha="center"
171                , va="center", fontsize=11)
172     ax_left.text(x_back_text, y_center, "Backreaction", ha="
173                center", va="center", fontsize=11)
174
175     # =====
176     # 7) Caja con par metros
177     # =====
178     ax_left.text(
179         0.95, 0.85,
180         rf"\lambda_\_{LAMBDA\_VALUE:.2e}\$, \_q=\{Q\_VALUE\}\$",
181         transform=ax_left.transAxes,
182         ha="right",
183         bbox=dict(facecolor="white", edgecolor="black")
184     )
185
186     # =====

```

```

182     # 8) Leyenda combinada
183     # =====
184     lines = [line_phi, line_rms]
185     labels = [l.get_label() for l in lines]
186     ax_left.legend(lines, labels, loc="upper_left", fontsize=9)
187
188     ax_left.grid(True, which="both", ls=":")
189     plt.tight_layout()
190     plt.show()
191
192 if __name__ == "__main__":
193     main()

```

Listing A.2: Script utilizado para calcular la evolución temporal del inflatón promediado en volumen, $\langle \tilde{\phi}(\tilde{\eta}) \rangle$, y de sus fluctuaciones espaciales $\sqrt{\langle \delta \tilde{\phi}^2(\tilde{\eta}) \rangle}$ a partir de las salidas de CosmoLattice. El código procesa los archivos de promedios, interpola el factor de escala para construir el número de e-folds, y genera la figura con doble eje vertical y franjas sombreadas que indican los intervalos identificados como resonancia y retro-reacción.