

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

**FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**SECCIÓN DE MATEMÁTICA**



**INFORME FINAL DEL CURSO DE ESPECIALIZACIÓN:  
EN 3-VARIEDADES Y NUDOS TOPOLÓGICOS**

**TÍTULO DEL INFORME FINAL:  
ESPACIOS LENTES  $L(P,Q)$**

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA**

**PRESENTADO POR:**

**JESICA MELANY QUINTANILLA QUINTANILLA N° CARNET QQ18002**

**DOCENTE ASESOR:**

**M.S. JOSÉ JOAQUÍN APARICIO RAMÍREZ**

**SEPTIEMBRE 2024**

**SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA**

# UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

## AUTORIDADES



M.SC. JUAN ROSA QUINTANILLA

**RECTOR**

DRA. EVELYN BEATRÍZ FARFÁN

**VICERRECTORA ACADÉMICA**

M.SC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

**VICERRECTOR ADMINISTRATIVO**

LIC. PEDRO ROSALÍO ESCOBAR CASTANEDA

**SECRETARIO GENERAL**

LIC. CARLOS ALMILCAR SERRANO RIVERA

**FISCAL GENERAL**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

**AUTORIDADES**



**M.SC. CARLOS IVÁN HERNÁNDEZ FRANCO**

**DECANO**

**DRA. NORMA AZUCENA FLORES RETANA**

**VICEDECANA**

**LIC. CARLOS DE JESÚS SANCHÉZ**

**SECRETARIO**

**ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA MARTÍNEZ**

**JEFE DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**

**M.SC. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ**

**COORDINADORA DEL PROCESO DE GRADO DEL DEPARTAMENTO DE**

**CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Preliminares en Topología de 3-Variedades . . . . .	5
1.2. Acciones de Grupos en Espacios Topológicos . . . . .	7
1.3. La Esfera Tridimensional $S^3$ . . . . .	8
1.4. Grupo Fundamental . . . . .	10
1.5. Espacios de Recubrimiento . . . . .	11
<b>2. Espacios Lentes <math>L(p, q)</math></b>	<b>12</b>
2.1. Propiedades de los Espacios Lentes . . . . .	15
2.2. Clasificación de Espacios Lentes . . . . .	16
2.3. Ejemplos . . . . .	17
2.4. Espacios Lentes $L(p, q)$ ; Llenado de Dehn . . . . .	17
<b>Referencias Bibliografías</b>	<b>29</b>

## Resumen

Esta investigación presenta una introducción a los Espacios Lentes  $L(p,q)$  en 3-variedades, tomando conceptos básicos de topología sobre 3-variedades. La topología de 3-variedades, es el estudio de espacios tridimensionales, que localmente se comportan como el espacio euclidiano tridimensional. Estos espacios conocidos como 3-variedades, son esenciales en el análisis de estructuras geométricas y topológicas. Un ejemplo simple de una 3-variedad es el propio espacio en el que vivimos  $\mathbb{R}^3$ , como también existen ejemplos mas abstractos, como la recta real  $\mathbb{R}$ , la circunferencia  $S^1$ , la esfera tridimensional  $S^3$ , el toro  $T^n$  y nudos topológicos, y luego centrarse en los Espacios Lentes  $L(p,q)$ , los cuales son una clase especial de variedades tridimensionales derivadas de la 3-esfera  $S^3$  mediante la acción de un grupo cíclico, estos espacios son de interés debido a sus propiedades geométricas y topológicas únicas. Los espacios lentes fueron introducidos a principios del siglo XX, por Heinrich Tietze en 1908. Su nombre proviene de la apariencia: en forma de lente, que surge al analizar su construcción mediante celdas tridimensionales y sus identificaciones en la frontera. Los Espacios Lentes  $L(p,q)$  también pueden aplicarse en la topología algebraica, teoría de nudos, física teórica y en la clasificación de 3-variedades, como lo es en esta investigación.

## Palabras claves:

Espacios Lentes,  $L(p, q)$ , 3-variedades, Topología, 3-esfera ( $S^3$ ), Grupo Cíclico, Geometría, Propiedades Topológicas.

## Abstract

This research provides an introduction to Lens Spaces  $L(p, q)$  within 3-manifolds, drawing on basic concepts of topology in the study of 3-manifolds. The topology of 3-manifolds is the study of three-dimensional spaces that locally behave like three-dimensional Euclidean space. These spaces, known as 3-manifolds, are essential for analyzing geometric and topological structures. A simple example of a 3-manifold is the space we live in,  $\mathbb{R}^3$ . There are also more abstract examples, such as the real line  $\mathbb{R}$ , the circle  $S^1$ , the  $n$ -dimensional sphere  $S^n$ , the  $n$ -dimensional torus  $T^n$ , and topological knots. This study then focuses on Lens Spaces  $L(p, q)$ , which are a special class of three-dimensional manifolds derived from the 3-sphere  $S^3$  through the action of a cyclic group. These spaces are of interest due to their unique geometric and topological properties. Lens Spaces were introduced in the early 20th century by Heinrich Tietze in 1908. Their name comes from their lens-like appearance, which arises when analyzing their construction using three-dimensional cells and their boundary identifications. Lens Spaces  $L(p, q)$  can also be applied in algebraic topology, knot theory, theoretical physics, and the classification of 3-manifolds, as explored in this research.

## Keywords:

Lens Spaces,  $L(p, q)$ , 3-manifolds, Topology, 3-sphere ( $S^3$ ), Cyclic Group, Geometry, Topological Properties.

## Introducción

Una 3-variedad es una variedad topológica o diferencial tridimensional. Esto significa que es un espacio localmente se asemeja al espacio tridimensional euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , pero con propiedades topológicas o geométricas adicionales, que puede tener una estructura topológica mas complicada, como agujeros, asas o características distintas.

La topología es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades geométricas invariantes bajo deformaciones continuas. En este contexto, los Espacios Lentes juegan un papel crucial en la clasificación de 3-variedades, que son espacios tridimensionales que localmente se parecen al espacio euclidiano. Este informe tiene como objetivo explorar en profundidad los espacios lentes  $L(p, q)$ , describiendo sus características topológicas, su importancia en la clasificación de variedades y sus aplicaciones.

Para ello, en el Capitulo I, se parte de los conceptos de topología de 3-variedades, acciones de grupos en Espacios Topológicos y espacios de recubrimiento, se habla sobre la Esfera Tridimensional y el Grupo Fundamental que son temas importantes para la comprensión de los Espacios Lentes  $L(p, q)$ .

En el Capitulo II, se introduce a lo que es los Espacios Lentes  $L(p, q)$ , donde se explica por medio de definiciones, clasificación y ejemplos, hasta llegar a las propiedades específicas de los espacios lentes y su relevancia en geometría y topología, además se hace referencia a la relación de los Espacios Lentes  $L(p, q)$  con el Llenado de Dehn y el Diagrama de Heegaard que serán de mucha importancia.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Preliminares en Topología de 3-Variedades

Antes de introducir los espacios lentes, es importante entender algunos conceptos básicos en la topología de 3-variedades.

#### Variedades Topológicas

**Definición 1.1.1.** *Una variedad topológica de dimensión  $n$ , es un espacio topológico  $M$  que debe cumplir:*

- *Ser Hausdorff.*
- *Segundo numerable.*
- *Ser localmente euclídeo (i.e., para cada punto  $x \in M$  existe un abierto  $U$  entorno de  $x$ , homeomorfo mediante  $\varphi : U \rightarrow V$  a un abierto en  $\mathbb{R}^n$ ).*

#### Ejemplos de Variedades

- **Recta Real**  $\mathbb{R}$ : una variedad de dimensión 1.
- **Circunferencia**  $S^1$ : una variedad compacta de dimensión 1.
- **Esfera**  $S^n$ : una variedad compacta de dimensión  $n$ .
- **Toro**  $T^n$ : producto cartesiano de  $n$  circunferencias, una variedad compacta de dimensión  $n$ .

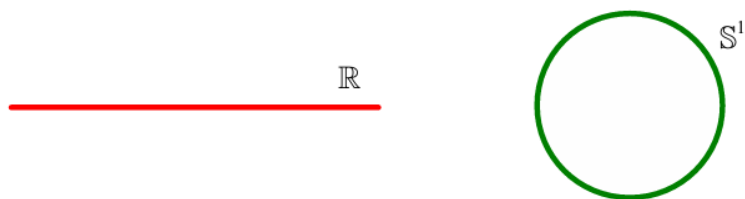


Figura 1.1: Dimensión 1

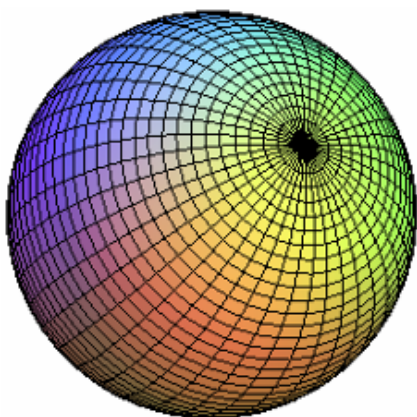


Figura 1.2: Genero 0 (Esfera)

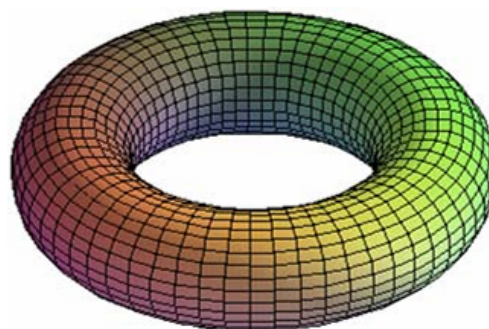


Figura 1.3: Genero 1 (Toro)



Figura 1.4: Genero 2 (2-Toro)

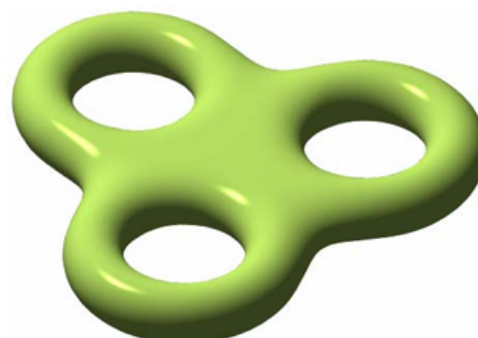


Figura 1.5: Genero 3 (3-Toro)

## Variedades

Una *variedad* es un espacio topológico que localmente se parece a un espacio euclidiano. Más formalmente, una  $n$ -variedad es un espacio topológico en el que cada punto tiene un entorno que es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Las 1-variedades incluyen curvas y las 2-variedades incluyen superficies, como la esfera o el toro.

**Definición 1.1.2.** Una 3-variedad  $M$  se dice que es simplemente conexa si es conexa y su grupo fundamental  $\pi_1(M)$  es trivial, es decir,  $\pi_1(M) = 0$ .

Si el grupo fundamental es trivial, todos los grupos de equivalencia de lazos cerrados se pueden

contraer a un punto. Si el grupo fundamental de la 3-variedad  $M$  es trivial, cualquier lazo cerrado se puede deformar continuamente hasta un punto sin dejar la variedad. En otras palabras, si  $\pi_1(M) = 0$  esto implica que no hay “agujeros” no triviales en la variedad, y cualquier lazo cerrado puede “contraerse” continuamente a un punto. Esta propiedad es bastante fuerte y tiene importantes implicaciones en la topología y la geometría de la 3-variedad.

**Definición 1.1.3.** Una 3-variedad  $M$  es irreducible si cada esfera suave en  $M$  es el borde de una bola.

Esto significa que para cualquier esfera suave  $S$  en  $M$ , es posible encontrar una bola  $B$  que esté completamente contenida en  $M$  y cuyo borde sea precisamente  $S$ .

La irreducibilidad es una propiedad importante en la topología de las 3-variedades. Implica que no existen “cortes” no triviales en la variedad, es decir, no se puede separar la 3-variedad en dos partes desconectadas mediante una esfera suave.

$R^3$  es irreducible, ya que si se toma una esfera en  $R^3$ , esta esfera bordea una bola.

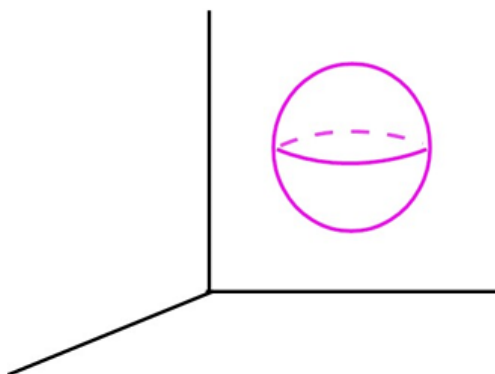


Figura 1.6: Ejemplo de 3-variedad irreducible

## 1.2. Acciones de Grupos en Espacios Topológicos

**Definición 1.2.1.** Una **acción de un grupo**  $G$  en un espacio topológico  $X$  es un homomorfismo de grupos  $\phi : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ , donde  $\text{Homeo}(X)$  es el grupo de homeomorfismos de  $X$ . Es decir, cada elemento de  $G$  actúa como una transformación continua invertible en  $X$ .

### Órbitas y Espacios Cociente

La acción de  $G$  en  $X$  particiona  $X$  en **órbitas**, y el **espacio cociente**  $X/G$  se define como el conjunto de órbitas con la topología cociente inducida por la aplicación natural  $\pi : X \rightarrow X/G$ .

## Ejemplos

- La acción de  $\mathbb{Z}_n$  en  $S^1$  mediante rotaciones.
- La acción de grupos cíclicos en  $S^3$  para construir espacios lentes.

## Grupos y Acciones de Grupos

Un grupo es un conjunto  $G$  junto con una operación binaria  $\cdot$  que satisface las siguientes propiedades:

- **Cerradura:** Para cualesquiera  $a, b \in G$ , se tiene que  $a \cdot b \in G$ .
- **Elemento identidad:** Existe un elemento  $e \in G$  tal que para todo  $g \in G$ ,  $g \cdot e = e \cdot g = g$ .
- **Inverso:** Para todo  $g \in G$ , existe un elemento  $g^{-1} \in G$  tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .
- **Asociatividad:** Para todo  $a, b, c \in G$ , se cumple  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .

En particular, un grupo  $G$  puede actuar sobre un conjunto  $X$  de manera que cada elemento del grupo permute los elementos de  $X$ . Esta acción está definida por una función  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  que satisface las siguientes condiciones:

- $e \cdot x = x$  para todo  $x \in X$ , donde  $e$  es el elemento identidad en  $G$ .
- $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$  para todos  $g_1, g_2 \in G$  y  $x \in X$ .

En el contexto de los espacios lentes, la acción del grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p$  sobre la esfera tridimensional  $S^3$  es clave para la construcción de estas 3-variedades.

## Coberturas y Acciones de Grupos

Un concepto clave en la construcción de espacios lentes es el de *cobertura*. Una cobertura de una variedad  $M$  es un mapa continuo  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  tal que localmente parece una proyección. Un grupo  $G$  actúa sobre una variedad  $\tilde{M}$  si hay una función de  $G \times \tilde{M}$  a  $\tilde{M}$  que es compatible con la estructura de grupo y topología de  $\tilde{M}$ . Los espacios lentes se construyen mediante la identificación de puntos bajo la acción de un grupo cíclico.

### 1.3. La Esfera Tridimensional $S^3$

Geoméricamente,  $S^3$  es el análogo tridimensional de la esfera ordinaria  $S^2$  en  $\mathbb{R}^3$ , pero embebida en un espacio de dimensión 4.

**Definición 1.3.1.** La esfera tridimensional  $S^3$  se define como el conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^4$  que están a una distancia unidad del origen:

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

Alternativamente, puede ser vista en términos complejos como:

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

### Propiedades

- Es una variedad compacta, cerrada y sin borde de dimensión 3.
- Es simplemente conexa, es decir,  $\pi_1(S^3) = \{e\}$ .
- Puede ser considerada como el grupo de cuaterniones unitarios, lo que le otorga una estructura de grupo de Lie.

Recordemos que la 3-esfera consiste en todos los puntos en el espacio de 4 dimensiones que están a 1 unidad del origen:

$$S^3 = \{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}.$$

Un modelo de  $S^3$  consiste en dos bolas sólidas en  $\mathbb{R}^3$ , cuyas esferas 2-dimensionales en el límite están identificadas punto por punto, como en la figura siguiente. La figura muestra un camino desde el punto  $a$  hasta el punto  $b$  en  $S^3$ , que pasa a través del punto  $p$  en el límite de la bola sólida de la izquierda antes de entrar en la bola sólida de la derecha a través del punto en su límite con el cual  $p$  ha sido identificado (también llamado  $p$ ).

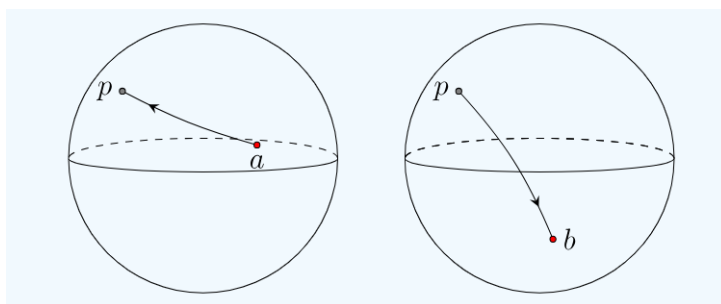


Figura 1.7: Esfera Tridimensional  $S^3$

La 3-esfera tiene características interesantes, a menudo accesibles por analogía con la 2-esfera. Si cortas la 2-esfera con un plano en  $\mathbb{R}^3$ , la intersección es un círculo (o un único punto si el plano es tangente a la 2-esfera). Además, el círculo de intersección es una geodésica en la 2-esfera si es un círculo máximo: un círculo de radio máximo dibujado en la 2-esfera. Al aumentar una dimensión, si “cortas” la 3-esfera con  $\mathbb{R}^3$ , la intersección es una 2-esfera (o un único punto si el corte es tangente a  $S^3$ ). Además, la 2-esfera de intersección es una gran 2-esfera si es una 2-esfera de diámetro máximo dibujada en  $S^3$ . La 2-esfera límite común a ambas bolas sólidas en la figura es una gran 2-esfera de  $S^3$ .

## 1.4. Grupo Fundamental

El grupo fundamental describe propiedades topológicas y algebraicas de un espacio topológico, específicamente la manera en que las curvas cerradas en ese espacio pueden ser clasificadas en clases de equivalencia bajo deformaciones continuas.

**Definición 1.4.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . Un lazo con base  $x_0$  es una aplicación continua  $f : [0, 1] \rightarrow X$  que verifica que  $f(0) = f(1) = x_0$ .

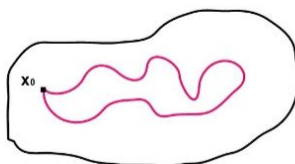


Figura 1.8: Lazo

Es decir que, un lazo es una trayectoria o camino cerrado en el espacio topológico  $X$ , donde el punto inicial y el punto final de la trayectoria coinciden. En otras palabras, un lazo es una función continua que recorre un camino desde un punto inicial hasta un punto final, volviendo al punto inicial al finalizar.

**Definición 1.4.2.** El grupo fundamental de un espacio topológico  $X$ , denotado  $\pi_1(X, x_0)$ , es el conjunto de clases de homotopía de lazos basados en un punto fijo  $x_0$  en  $X$ , con la operación de concatenación de caminos.

### Importancia

El grupo fundamental es un invariante topológico que captura información sobre la estructura de bucles en un espacio. Es esencial para distinguir entre diferentes tipos de espacios topológicos y para

estudiar propiedades como la simple conexidad.

### Ejemplos

- $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{e\}$ : trivial, ya que  $\mathbb{R}^n$  es simplemente conexo.
- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ : cada lazo se clasifica por el número de veces que rodea la circunferencia.
- $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ : producto de dos circunferencias.

**Definición 1.4.3.** *El grupo fundamental  $\pi_1(M)$  de una variedad  $M$  es un invariante topológico que captura la estructura de bucles en  $M$ . Intuitivamente, mide cuántas formas diferentes hay de recorrer un bucle en  $M$  que no pueden ser deformadas unas en otras. Este concepto será fundamental al estudiar los espacios lentes.*

## 1.5. Espacios de Recubrimiento

**Definición 1.5.1.** *Un espacio de recubrimiento de un espacio topológico  $X$  es un espacio topológico  $\tilde{X}$  junto con una aplicación continua y sobreyectiva  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  tal que para cada punto  $x \in X$ , existe un entorno abierto  $U$  de  $x$  donde  $p^{-1}(U)$  es una unión disjunta de abiertos en  $\tilde{X}$ , cada uno de los cuales es mapeado homeomórficamente sobre  $U$  por  $p$ .*

### Propiedades

- Los espacios de recubrimiento están íntimamente relacionados con el grupo fundamental del espacio base.
- Permiten estudiar propiedades locales y globales de los espacios topológicos.

### Ejemplos

- La aplicación exponencial  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $p(t) = e^{2\pi it}$  es un recubrimiento.
- La esfera  $S^3$  es un recubrimiento de los espacios lentes  $L(p, q)$ .

### Cocientes de Espacios

Dado un espacio topológico  $X$  y un grupo  $G$  que actúa sobre  $X$ , el cociente  $X/G$  es el conjunto de órbitas de la acción del grupo. Es decir, cada punto de  $X/G$  representa una clase de equivalencia de puntos de  $X$  que son identificados entre sí bajo la acción de  $G$ .

## Capítulo 2

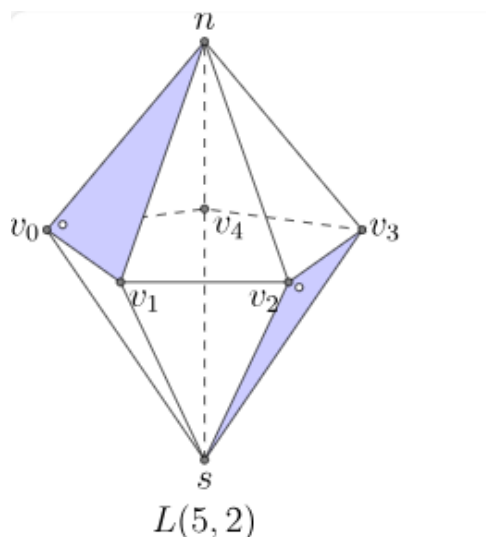
# Espacios Lentos $L(p, q)$

### Espacios Lentos

Los espacios lentos  $L(p, q)$  forman una familia infinita de variedades elípticas en 3 dimensiones. Supongamos que  $p > q$  son enteros positivos cuyo máximo común divisor es 1. Los espacios lentos pueden definirse de la siguiente manera. Considera la bola sólida unitaria en  $\mathbb{R}^3$  cuyo límite es la esfera 2-dimensional unitaria. La bola está compuesta por todos los puntos  $(x, y, z)$  tales que  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Cualquier punto en el límite de la esfera 2-dimensional se puede expresar en coordenadas  $(z, t)$  donde  $z$  es un número complejo,  $t$  es real, y  $|z|^2 + t^2 = 1$ . El espacio lente  $L(p, q)$  se obtiene de la bola sólida identificando cada punto  $(z, t)$  en el límite de la esfera 2-dimensional con el punto  $(e^{(2\pi q/p)}iz, -t)$ .

Nota que el polo norte del límite de la esfera 2-dimensional es  $(0, 1)$  y se identifica con el polo sur  $(0, -1)$ . Cualquier otro punto  $u$  en el hemisferio norte se identifica con un único punto en el hemisferio sur. Este punto se encuentra reflejando  $u$  a través del plano  $xy$ , y luego rotando alrededor del eje  $z$  por  $2\pi q/p$  radianes. Cada punto en el ecuador se identifica con  $p-1$  otros puntos. El espacio lente  $L(p, q)$  se puede obtener de una división celular de la bola sólida unitaria. La división celular tiene  $p+2$  vértices: el polo norte  $n$ , el polo sur  $s$ , y  $p$  vértices igualmente espaciados a lo largo del ecuador, etiquetados como  $v_0, v_1, \dots, v_{p-1}$ .

La figura ilustra esta escena para  $p = 5$ . Hay un borde conectando  $v_i$  con cada uno de sus vecinos en el ecuador, creando  $p$  bordes alrededor del ecuador. Hay un borde conectando cada  $v_i$  con  $n$  y un borde conectando cada  $v_i$  con  $s$ , como se muestra, para un total de  $3p$  bordes. Los vértices y bordes crean  $2p$  caras triangulares en la esfera límite, la mitad de ellas en el hemisferio norte. El 3-complejo tiene una



sola 3-célula, correspondiente al interior de la bola sólida.

Sea  $N_i$  la cara en el hemisferio norte cuyos vértices son  $v_i, v_{i+1}, n$ . Sea  $S_i$  la cara en el hemisferio sur cuyos vértices son  $v_i, v_{i+1}, s$ . El espacio lente  $L(p, q)$  se crea al identificar la cara  $N_i$  con la cara  $S_{i+q}$ , donde la suma  $i + q$  se toma módulo  $p$ .

Por ejemplo, en  $L(5, 2)$ , la cara sombreada  $N_0$  en la figura se identifica con la cara sombreada  $S_2$  (y el círculo de puntos en  $N_0$  se mapea al círculo de puntos en  $S_2$ ). Las caras  $N_1$  y  $S_3$  están identificadas, al igual que  $N_2$  con  $S_4$ ,  $N_3$  con  $S_0$ , y  $N_4$  con  $S_1$ .

Los espacios lentes  $L(p, q)$  son ejemplos de cocientes de la esfera tridimensional  $S^3$  bajo una acción del grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p$ . Para  $p > 0$  y  $q$  coprimo con  $p$  (es decir,  $\gcd(p, q) = 1$ ), el espacio lente  $L(p, q)$  se define como:

$$L(p, q) = S^3 / \sim$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia inducida por la acción de  $\mathbb{Z}_p$  en  $S^3$  descrita por:

$$(z_1, z_2) \sim (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2)$$

Aquí,  $e^{2\pi i/p}$  es una raíz  $p$ -ésima de la unidad en el plano complejo.

**Definición 2.0.1.** Un *espacio lente*  $L(p, q)$  es una variedad tridimensional que se obtiene como el cociente de la esfera tridimensional  $S^3$  bajo la acción de un grupo cíclico de orden  $p$ .

## Construcción

Consideremos el grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p$  generado por un elemento  $g$  que actúa en  $S^3$  de la siguiente manera:

$$g \cdot (z_1, z_2) = (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2)$$

donde:

- $p$  es un entero positivo.
- $q$  es un entero coprimo con  $p$  tal que  $0 < q < p$ .

El espacio lente  $L(p, q)$  se define entonces como el espacio cociente:

$$L(p, q) = S^3 / \mathbb{Z}_p$$

## Visualización

La construcción geométrica de  $L(p, q)$  puede visualizarse como identificar puntos en  $S^3$  mediante rotaciones específicas, lo que resulta en una variedad tridimensional con propiedades topológicas interesantes y complejas.

**Definición 2.0.2.** *Un espacio lente  $L(p, q)$  es una 3-variedad que se obtiene mediante la identificación de puntos en la 3-esfera  $S^3$  bajo la acción del grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p$ . Consideremos la 3-esfera  $S^3$  como el conjunto de puntos en  $\mathbb{C}^2$  definidos por:*

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

*El grupo  $\mathbb{Z}_p$  actúa en  $S^3$  de la siguiente manera:*

$$(z_1, z_2) \sim (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2),$$

*donde  $p$  y  $q$  son enteros coprimos,  $p > 0$  y  $0 \leq q < p$ . El cociente  $S^3 / \sim$  define el espacio lente  $L(p, q)$ .*

## Grupo Fundamental $L(p,q)$

El grupo fundamental de un espacio topológico  $X$ , denotado  $\pi_1(X)$ , es un invariante topológico que mide las clases de equivalencia de bucles en  $X$ . En el caso de los espacios lentes  $L(p, q)$ , el grupo fundamental es:

$$\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$$

Esto significa que los bucles cerrados en  $L(p, q)$  pueden ser contraídos, a la identidad después de pasar  $p$  veces por el bucle.

## Homeomorfismos

Dos espacios lentes  $L(p, q)$  y  $L(p', q')$  son homeomorfos (topológicamente equivalentes) si y solo si  $p = p'$  y  $q' \equiv q^{\pm 1} \pmod{p}$ . Este hecho refleja una simetría en la forma en que los puntos de la esfera tridimensional se identifican bajo la acción del grupo cíclico.

## 2.1. Propiedades de los Espacios Lentes

Los espacios lentes tienen diversas propiedades interesantes, incluyendo:

- $L(1, 0)$  es homeomorfo a  $S^3$ .
- $L(2, 1)$  es homeomorfo a  $\mathbb{RP}^3$  (el espacio proyectivo real de dimensión 3).
- Dos espacios lentes  $L(p, q)$  y  $L(p, q')$  son homeomorfos si y solo si  $q' \equiv q^{\pm 1} \pmod{p}$ .

### Propiedades Topológicas

- Grupo Fundamental

El grupo fundamental de  $L(p, q)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_p$ :

$$\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$$

Esto se debe a que  $S^3$  es simplemente conexa y la acción del grupo cíclico induce un recubrimiento de grado  $p$ .

- Homología

Los grupos de homología de  $L(p, q)$  son:

- $H_0(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}$
- $H_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$
- $H_2(L(p, q)) \cong 0$
- $H_3(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}$

## 2.2. Clasificación de Espacios Lentes

Dos espacios lentes  $L(p, q)$  y  $L(p', q')$  son **homeomorfos** si y solo si:

$$p = p' \quad \text{y} \quad q' \equiv q^{\pm 1} \pmod{p}$$

Sin embargo, pueden ser **homotópicamente equivalentes** incluso si no son homeomorfos. La clasificación completa considera también invariantes como el emparejamiento de Reidemeister y las formas bilineales asociadas.

### Grupo Fundamental

El grupo fundamental de  $L(p, q)$  es  $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$ . Esto significa que el espacio lente tiene un grupo fundamental cíclico de orden  $p$ , lo que refleja que cualquier bucle en  $L(p, q)$  puede ser reducido a un punto al menos después de recorrerlo  $p$  veces.

### Homeomorfismo y Equivalencia

Dos espacios lentes  $L(p, q)$  y  $L(p', q')$  son homeomorfos si y solo si  $p = p'$  y  $q' \equiv q^{\pm 1} \pmod{p}$ . Esta condición muestra la simetría inherente en los espacios lentes y es crucial para su clasificación topológica.

### Estructura Geométrica

Los espacios lentes admiten una **estructura geométrica esférica**, es decir, pueden equiparse con una métrica de curvatura constante positiva. Esto los incluye en la clasificación de Thurston de 3-variedades geométricas.

Los espacios lentes pueden llevar una métrica de curvatura constante, lo que los convierte en ejemplos de 3-variedades con geometría de tipo esférico. Esta propiedad geométrica es esencial para entender

su estructura interna y su comportamiento bajo deformaciones.

## 2.3. Ejemplos

Algunos ejemplos simples de espacios lentes son:

- $L(5, 1)$ : Un ejemplo de espacio lente no trivial, que muestra cómo la identificación de puntos puede llevar a una estructura topológica más compleja.
- $L(2, 1)$ : Este espacio es homeomorfo a la **3-esfera**  $S^3$ . La acción del grupo cíclico es equivalente a la antipodal, lo que identifica puntos opuestos en  $S^3$ , pero debido a la simple conexidad de  $S^3$ , el resultado es topológicamente equivalente a la esfera misma.
- $L(3, 1)$ : Este es un ejemplo de un espacio lente que no es simplemente conexo y tiene propiedades topológicas distintas de  $S^3$ . Su grupo fundamental es  $\mathbb{Z}_3$ , y es un caso sencillo para estudiar las diferencias entre espacios lentes.
- $L(5, 2)$ : En este caso, el espacio lente presenta una estructura más compleja, y su estudio implica analizar cómo diferentes valores de  $q$  afectan la topología y la geometría del espacio resultante.

## 2.4. Espacios Lentes $L(p, q)$ ; Llenado de Dehn

### Llenado de Dehn

El llenado de Dehn es una operación fundamental en la topología de 3-variedades, especialmente en la construcción y clasificación de espacios lentes. Dado un toro frontera en una 3-variedad, el llenado de Dehn consiste en agregar un sólido toroidal para obtener una nueva 3-variedad cerrada. Matemáticamente, si tenemos una 3-variedad  $M$  con frontera toroidal  $T$ , el llenado de Dehn de  $M$  se denota como  $M(\alpha, \beta)$ , donde  $(\alpha, \beta)$  es una curva simple cerrada en  $T$ .

Cuando aplicamos el llenado de Dehn a un espacio lente, podemos obtener diversas 3-variedades interesantes, y el estudio de este proceso es crucial para entender la estructura de los espacios lentes.

### Relación entre Espacios Lentes y Llenado de Dehn

Una pregunta natural en la topología de 3-variedades es entender cómo los espacios lentes pueden obtenerse mediante el llenado de Dehn de otras 3-variedades. Se sabe que algunos espacios lentes pueden

construirse a partir de llenados de Dehn sobre nudos en la 3-esfera  $S^3$ . Este proceso y sus implicaciones han sido objeto de estudio en profundidad.

Por ejemplo, el espacio lente  $L(p, q)$  se puede obtener mediante el llenado de Dehn sobre el nudo toroidal correspondiente en  $S^3$ . Este proceso es esencial para la clasificación de los espacios lentes y su estudio ha dado lugar a importantes resultados en la teoría de 3-variedades.

### Relleno de Dehn

Si una variedad tridimensional  $M$  tiene un componente de frontera esférico, podemos cerrarlo con una bola. Si  $M$  tiene un componente de frontera tórica, no hay una forma canónica de cerrarlo: el objeto más simple que podemos adjuntar a él es un toro sólido  $D \times S^1$ , pero la variedad resultante depende del mapa de pegado. Esta operación se llama *relleno de Dehn* y ahora la estudiamos en detalle.

**Definición 2.4.1.** Sea  $M$  una variedad tridimensional y  $T \subset \partial M$  un componente toroidal de la frontera.

**Definición 2.4.2.** Un relleno de Dehn de  $M$  a lo largo de  $T$  es la operación de pegar un toro sólido  $D \times S^1$  a  $M$  mediante un difeomorfismo  $\varphi : \partial D \times S^1 \rightarrow T$ .

La curva cerrada  $\partial D \times \{x\}$  se pega a alguna curva cerrada simple  $\gamma \subset T$ , ver Fig. 2.1. El resultado de esta operación es una nueva variedad  $M^{fill}$ , que tiene un componente de frontera menos que  $M$ .

La variedad  $M^{fill}$  depende únicamente de la clase de isotopía de la curva no orientada  $\gamma$ .

Descomponemos  $S^1$  en dos segmentos cerrados  $S^1 = I \cup J$  con puntos extremos coincidentes. La adjunción de  $D \times S^1$  puede verse como la adjunción de un 2-asas  $D \times I$  a lo largo de  $\partial D \times I$ , seguida de la adjunción de un 3-asas  $D \times J$  a lo largo de su frontera completa.

Si cambiamos  $\gamma$  por una isotopía, el mapa de adjunción del 2-asas cambia por una isotopía y, por lo tanto, da la misma variedad.

Decimos que el relleno de Dehn *mata* la curva  $\gamma$ , ya que esto es lo que realmente sucede en los grupos fundamentales, como veremos a continuación.

El normalizador de un elemento  $g \in G$  en un grupo  $G$  es el subgrupo normal más pequeño  $N(g) \trianglelefteq G$  que contiene a  $g$ . El normalizador depende únicamente de la clase de conjugación de  $g^{\pm 1}$ , por lo tanto, el subgrupo  $N(\gamma) \trianglelefteq \pi_1(M)$  tiene sentido sin fijar un punto base o una orientación para  $\gamma$ .

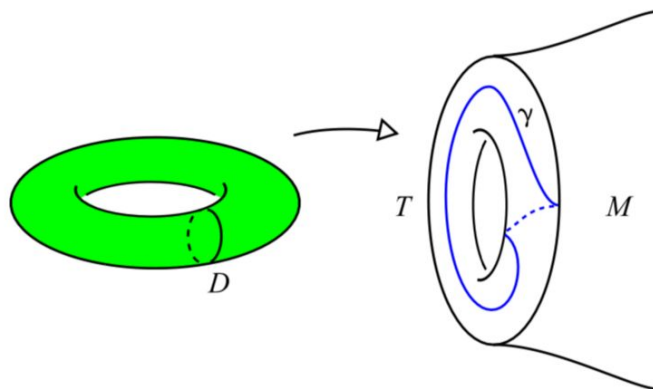


Figura 2.1: Relleno de Dehn

Sea una *pendiente* en un toro  $T$  la clase de isotopía  $\gamma$  de una curva cerrada simple no orientada homotópicamente no trivial. Si fijamos una base  $(m, l)$  para  $H_1(T, \mathbb{Z}) = \pi_1(T)$ , cada pendiente puede escribirse como  $\gamma = \pm(pm + ql)$  para algún par coprimo  $(p, q)$ . Por lo tanto, obtenemos una correspondencia uno a uno

$$S \leftrightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

al enviar  $\gamma$  a  $\frac{p}{q}$ . Si  $T$  es un componente de frontera de  $M$ , cada número  $\frac{p}{q}$  determina un relleno de Dehn de  $M$  que mata la pendiente correspondiente  $\gamma$ .

### Espacios Lentos, relleno de Dehn

La variedad más simple que puede ser rellenada mediante Dehn es el toro sólido  $M = D \times S^1$  en sí mismo. El meridiano orientado  $m = S^1 \times \{y\}$  y la longitud  $l = \{x\} \times S^1$  forman una base para  $H_1(\partial M, \mathbb{Z})$ .

**Definición 2.4.3.** El espacio lente  $L(p, q)$  es el resultado de un relleno de Dehn de  $M = D \times S^1$  que mata la pendiente  $qm + pl$ .

Un espacio lentes es una variedad tridimensional que se descompone en dos toros sólidos y demostraremos que las definiciones son coherentes. Dado que  $L(p, q) = L(-p, -q)$ , generalmente suponemos  $p > 0$ .

Tenemos  $L(0, 1) = S^2 \times S^1$  y  $L(1, 0) = S^3$ .

El espacio de lentes  $L(0, 1)$  se obtiene matando  $m$ , es decir, despejando  $D \times S^1$  a lo largo de su frontera. El espacio lentes  $L(1, 0)$  es  $S^3$  porque el complemento de un toro sólido estándar en  $S^3$  es otro toro sólido, con los roles de  $m$  y  $l$  intercambiados.

El toro sólido  $D \times S^1$  tiene un auto-defeomorfismo no trivial

$$(x, e^{i\theta}) \mapsto (xe^{i\theta}, e^{i\theta})$$

llamado un *twist* a lo largo del disco  $D \times \{y\}$ . El toro sólido también puede ser espejado a través del mapa

$$(x, e^{i\theta}) \mapsto (x, e^{-i\theta}).$$

### Equivalencia de las dos definiciones

Cuando  $p > 0$ , hemos definido el espacio de lentes  $L(p, q)$  de dos maneras diferentes: como el  $(p, q)$ -relleno de Dehn del toro sólido, y como una variedad elíptica. En esta última descripción, definimos

$$\omega = e^{2\pi i/p}, \quad f(z, w) = (\omega z, \omega^q w),$$

y definimos  $L(p, q)$  como  $S^3/\Gamma$ , donde  $\Gamma = \langle f \rangle$  es generado por  $f$ . Ahora mostraremos que las dos definiciones producen las mismas variedades.

La variedad  $S^3/\langle f \rangle$  es el  $(p, q)$ -relleno de Dehn del toro sólido.

La isometría  $f$  preserva el toro central

$$T = \{(z, w) \mid |z| = |w| = \sqrt{2}/2\},$$

que divide a  $S^3$  en dos toros sólidos

$$N_1 = \{(z, w) \mid |z| \leq \sqrt{2}/2, |w| = \sqrt{1 - |z|^2}\},$$

$$N_2 = \{(z, w) \mid |w| \leq \sqrt{2}/2, |z| = \sqrt{1 - |w|^2}\}.$$

Identificamos  $T$  con  $S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  de manera obvia, de modo que  $H_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Los meridianos de  $N^1$  y  $N^2$  son  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  respectivamente. La isometría  $f$  actúa en  $T$  como una traslación del vector  $v = \left(\frac{1}{p}, \frac{q}{p}\right)$ . El cociente  $T/\langle f \rangle$  sigue siendo un toro, con un dominio fundamental que es el paralelogramo generado por  $v$  y  $w = (0, 1)$ .

Los cocientes  $N^1/\langle f \rangle$  y  $N^2/\langle f \rangle$  son nuevamente toros sólidos. Por lo tanto,  $S^3/\langle f \rangle$  es también una unión de dos toros sólidos. Sus meridianos son las proyecciones de las líneas horizontales y verticales en  $\mathbb{R}^2$  a  $T/\langle f \rangle = \mathbb{R}^2/\langle v, w \rangle$ . En la base  $(v, w)$ , estos meridianos son  $pv - qw$  y  $w$  respectivamente. Por lo tanto,  $S^3/\langle f \rangle$  es un  $(q, p)$ -relleno de Dehn sobre el toro sólido, lo cual es difeomórfico al  $(q, p)$ -relleno de Dehn mediante un espejeo del toro sólido.

**Definición 2.4.4.** *El sistema de curvas cerradas  $u_1, \dots, u_g$  y  $v_1, \dots, v_g$  en la esfera  $N$  con  $g$  asas se dice que constituye un **diagrama de Heegaard** si se satisfacen las dos siguientes condiciones:*

1. *Las curvas  $u_1, \dots, u_g$  no se intersectan entre sí y el complemento de su unión está conectado;*
2. *Las curvas  $v_1, \dots, v_g$  no se intersectan entre sí y el complemento de su unión está conectado.*

Verifiquemos que la definición son equivalente. Es claro que los meridianos de un cuerpo de asas no se intersectan entre sí y no desconectan su superficie. Por lo tanto, solo necesitamos probar que cualquier diagrama de Heegaard en el sentido de la Definición 2 corresponde a una descomposición de Heegaard de alguna variedad.

Primero, afirmamos que si la esfera  $N$  con  $g$  asas se corta a lo largo de  $g$  círculos no intersectantes que no dividen  $N$ , obtenemos una esfera  $S^2$  de la cual se han eliminado  $2g$  discos. Supongamos que en lugar de esto obtenemos una superficie  $H$  con  $h$  asas y  $2g$  discos eliminados. La remoción de un disco disminuye la característica de Euler en 1. Por lo tanto, la característica de Euler de  $H$  es  $(2 - 2h) - 2g$ . Por otro lado, cortar a lo largo de un círculo no cambia la característica de Euler, de modo que  $2 - 2h - 2g = 2 - 2g$ , lo cual se cumple cuando  $h = 0$ , como se afirmó.

Ahora toma dos copias de la superficie  $N$ . Corta una copia a lo largo de los círculos  $u_i$  (Fig. 2.2(c)) y la otra a lo largo de  $v_i$  (Fig. 2.2(d)). En ambos casos obtenemos una esfera con  $2g$  orificios (Fig. 2.2(b) y (e)). Estas esferas pueden deformarse homeomórficamente, de modo que los círculos de los bordes correspondan a los meridianos canónicos de los cuerpos de asas con  $g$  asas (Fig. 2.2(a) y (f)). Ahora es fácil construir dos cuerpos de asas con  $g$  asas  $M_1^3$  y  $M_2^3$  junto con homeomorfismos de sus bordes sobre  $N$ , tomando los meridianos de  $M_1^3$  y  $M_2^3$  sobre los círculos  $u_i$  y  $v_i$  en  $N$ , respectivamente. Esto da la descomposición de Heegaard requerida.

## Espacios Lente

La única 3-variedad que se puede obtener pegando dos 3-discos mediante un homeomorfismo de sus bordes es la **3-esfera**  $S^3$ . A partir de dos toros sólidos, como hemos visto anteriormente, además de la esfera  $S^3$ , uno puede obtener el espacio proyectivo  $RP^3$ . Pero  $S^3$  y  $RP^3$  no son las únicas 3-variedades

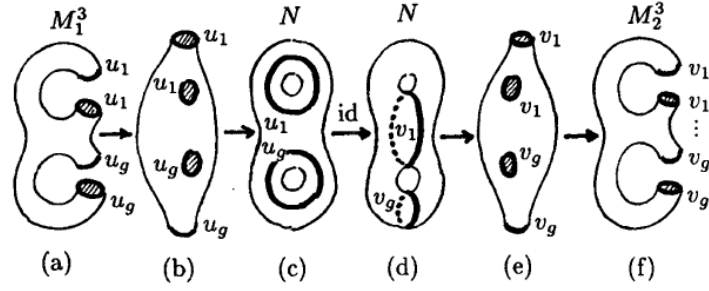


Figura 2.2: División de Heegaard correspondiente al diagrama de Heegaard

obtenibles al pegar dos toros sólidos mediante un homeomorfismo de sus fronteras. Comenzaremos dando una definición geométrica de tales variedades, basada en una acción de grupo discreta sobre  $S^3$ , y solo entonces discutiremos su presentación de Heegaard.

Supongamos que  $p$  y  $q$  son enteros positivos coprimos, y  $p \geq 3$ . En la esfera unitaria  $S^3 \subset C^2$ , consideramos la acción (sin puntos fijos) del grupo  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$  con generador  $\sigma$  dado por:

$$\sigma(z, w) = (\exp(2\pi i/p)z, \exp(2\pi iq/p)w).$$

Tomemos el cociente de  $S^3$  por esta acción de  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$ , es decir, identificamos cada punto  $x \in S^3$  con los puntos  $\sigma x, \dots, \sigma^{p-1}x$ . Dado que la acción no tiene puntos fijos, es fácil ver que el espacio cociente es una 3-variedad; se llama espacio lente y se denota por  $L(p, q)$ .

Mostremos que el cociente bajo la acción de  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$  de cada uno de los dos toros sólidos  $|z|^2 \leq 1/2$  y  $|w|^2 \leq 1/2$  es un toro sólido, de modo que el espacio lente  $L(p, q)$  puede ser pegado a partir de dos toros sólidos. Consideremos la siguiente descomposición celular de la esfera  $S^3$ :

1. Celdas de dimensión cero  $(0, \exp(2\pi ik/p))$ ;
2. Celdas de dimensión uno  $(0, \exp(2\pi i\theta)), k/p < \theta < (k+1)/p$ ;
3. Celdas de dimensión dos  $(\rho \exp(2\pi ik/p), w), 0 < \rho \leq 1, |w| = \sqrt{1 - \rho^2}$ ;
4. Celdas de dimensión tres  $(\rho \exp(2\pi i\theta), w), 0 < \rho \leq 1; k/p < \theta < (k+1)/p, |w| = \sqrt{1 - \rho^2}, k = 0, 1, \dots, p-1$ .

Hay  $p$  celdas en cada dimensión (indexadas por la letra  $k$ ). Bajo la acción del grupo  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$ , las celdas permutan entre sí, de modo que la descomposición celular anterior de la esfera  $S^3$  indica una descomposición celular del espacio lente  $L(p, q)$  con una celda en cada dimensión, de 0 a 3. Entonces,

nuestro espacio lente se puede obtener tomando una de las celdas de 3 y realizando las identificaciones apropiadas en su frontera bajo la acción de  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$ .

Desafortunadamente, la presentación coordenada de nuestras celdas 3 en el espacio de cuatro dimensiones  $\mathbb{C}^2$  no es muy conveniente para trabajar, por lo que comenzamos cambiando al sistema más natural de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , donde nuestra celda 3 será simplemente el disco unitario de  $\mathbb{R}^3$ .

Para realizar este cambio, al punto

$$(\rho \exp(2\pi i\theta), w), 0 < \rho \leq 1, k/p < \theta < (k+1)/p, |w|^2 + \rho^2 = 1,$$

asignemos el punto

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ donde } x_1 + ix_2 = w, x_3 = (2p\theta - 2k - 1)/p;$$

aquí  $|x_3| \leq p$  y  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ . Los puntos de la esfera  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ , para los cuales  $x_3 > 0$  (respectivamente  $x_3 < 0$ ), se asignan a puntos para los cuales  $\theta = (k+1)/p$  (respectivamente  $\theta = k/p$ ).

Los puntos con  $\theta = k/p$  son tomados por el generador  $\sigma \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$  a puntos para los cuales tenemos  $\theta = (k+1)/p$ . Esto se sigue de la definición de nuestra asignación de que en las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ , el elemento  $\sigma$  actúa mediante rotaciones en un ángulo  $2\pi q/p$  alrededor del origen; también identifica las celdas 2 del hemisferio superior con las celdas 2 del hemisferio inferior como se muestra en la Fig. 2.4. Estas identificaciones producen  $L(p, q)$ .

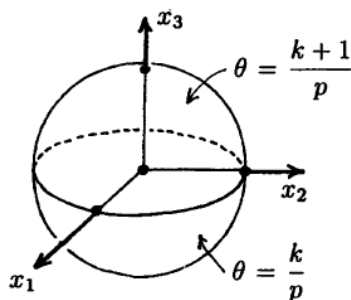


Figura 2.3: Puntos en la frontera del 3-célula

Tradicionalmente, la 3-celda con 2-celdas identificadas en la frontera se representa como un 3-disco algo aplanado que se asemeja a una lente, lo cual es aparentemente el origen del término: espacio lente.

El toro sólido  $|w|^2 \leq 1/2$  interseca la 3-celda a partir de la cual construimos el espacio lente  $L(p, q)$

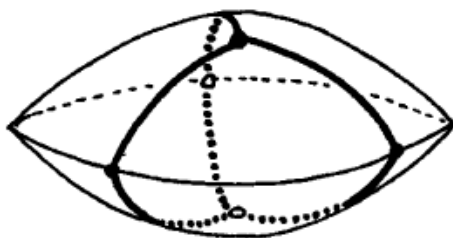


Figura 2.4: Identificar la frontera de un lente

a lo largo del cilindro sólido (con bases esféricas) determinado por las desigualdades

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1/2$$

(Fig. 2.5). Bajo las identificaciones debido a la acción del elemento  $\sigma$ , debemos pegar la base superior de este cilindro con su base inferior, tras una rotación de  $2\pi q/p$ . El resultado será el toro sólido  $M^3$ .

### Problema

Encuentra el grupo fundamental del espacio lente  $L(p, q)$ .

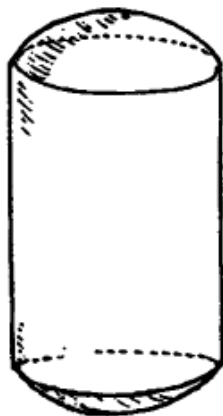


Figura 2.5: Cilindro con bases esféricas

Se deduce del resultado del problema anterior que los espacios lente  $L(p, q)$  y  $L(p', q')$  no son homeomorfos si  $p \neq q$ . Por otro lado, es obvio a partir de la construcción que los espacios lente  $L(p, q)$  y  $L(p', q')$  son homeomorfos siempre que  $q \equiv p \pmod{p}$ .

Nuestro próximo objetivo es demostrar que los espacios lente  $L(p, q)$  y  $L(p', q')$  son homeomorfos si  $qq' \equiv +1 \pmod{p}$  (entonces también serán homeomorfos cuando  $qq' \equiv -1 \pmod{p}$ ).

Para hacer esto, corta la 3-celda en tetraedros mediante  $p$  semiplanos que pasen por el eje  $x_3$  y los

0-celdas. Denotemos las caras superior e inferior del primer tetraedro como  $T_1$  y  $S_1$ , respectivamente, y las caras laterales izquierda y derecha como  $A_1$  y  $B_1$ , respectivamente. Denotemos las caras de los otros tetraedros de manera similar. Inicialmente, las caras  $B_i$  y  $A_{i+1}$  eran idénticas, mientras que la transformación  $\gamma$  identifica las caras  $S_i$  y  $T_{i+q}$  (aquí y en lo sucesivo, numeramos las caras módulo  $p$ ).

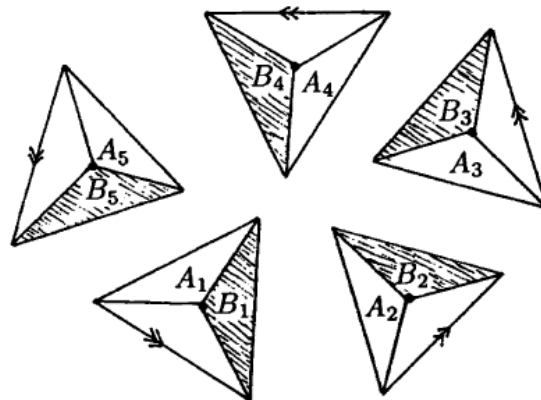


Figura 2.6: El lente cortado en tetrahedros

Ahora, en lugar de identificar primero las caras laterales, comencemos por identificar las caras superior e inferior, y solo después identificar las caras laterales. Entonces, los tetrahedros adyacentes adquirirán los números

$$j, j + q, j + 2q, \dots, j + q'q.$$

Por lo tanto, la cara  $B_j$  se identificará con la cara  $A_{j+1}$ , que es la misma que la cara  $A_{j+qq'}$ , porque por suposición el entero  $q'$  es la solución de la ecuación diofántica

$$qq' \equiv +1 \pmod{p}.$$

Dado que el resultado final no depende del orden en que se realizan las identificaciones, los dos espacios lentes son idénticos.

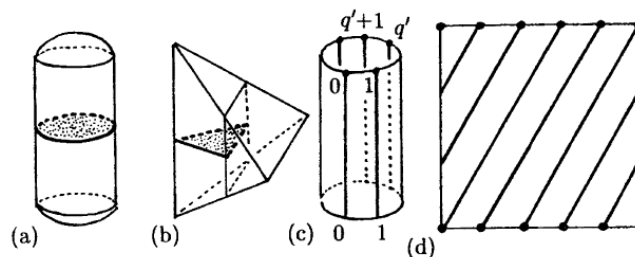


Figura 2.7: Diagrama de Heegaard de  $L(p, q)$

Ahora estamos listos para describir el diagrama de Heegaard del espacio lente  $L(p, q)$ . Para el disco meridional del toro sólido  $|w|^2 \leq 1/2$ , tomamos su sección por el plano  $x_3 = 0$ . En la figura 2.7,b, mostramos la parte del disco meridional contenida en uno de los tetraedros en los que hemos cortado nuestro lente. Esta imagen muestra que el círculo de la frontera de este disco corresponde a  $p$  segmentos en el otro toro sólido  $|w|^2 \geq 1/2$ . Pero bajo nuestras identificaciones, el punto inferior con número  $i$  se pega al punto superior  $i + q'$ , donde  $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ . Dado que los enteros  $p$  y  $q'$  son primos entre sí, obtenemos una curva cerrada en el toro. Este es el diagrama de Heegaard deseado.

## Aplicaciones

Los espacios lentes juegan un papel importante en la clasificación de 3-variedades, y aparecen en diversos contextos, como en la física teórica, especialmente en la teoría de cuerdas, donde son usados para modelar ciertas compactificaciones del espacio-tiempo.

## Aplicaciones y Relevancia

- **Topología Algebraica:** Los espacios lentes sirven como ejemplos para estudiar conceptos como recubrimientos, grupos fundamentales y homología.
- **Teoría de Nudos:** Aparecen en el estudio de cirugías de Dehn y en la clasificación de variedades obtenidas a partir de nudos en  $S^3$ .
- **Física Teórica:** Son relevantes en teorías como la gravedad cuántica y la teoría de cuerdas, donde la comprensión de espacios tridimensionales compactos es esencial.
- **Geometría de 3-Variedades:** Son ejemplos clave en la geometrización de 3-variedades y en la comprensión de estructuras geométricas posibles en dimensiones bajas.

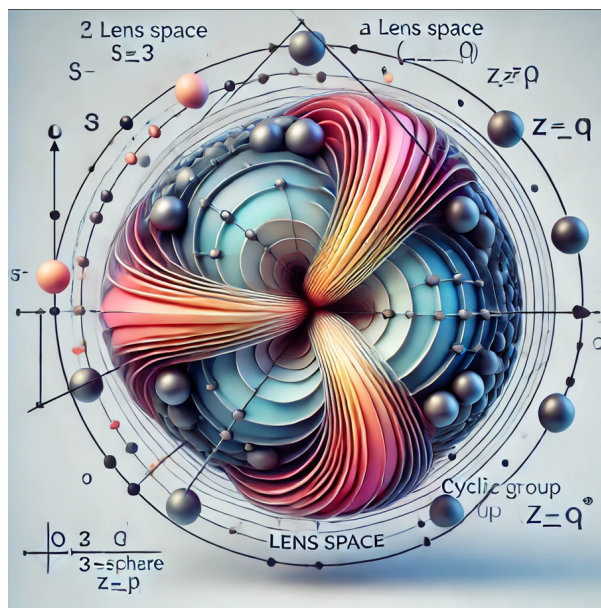


Figura 2.8: Espacios Lentes  $L(p, q)$

La imagen muestra cómo la 3-esfera  $S^3$  es transformada bajo la acción de un grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p$ , identificando puntos en la esfera para formar un espacio lente.

## Conclusión

Una 3-variedad, también conocida como variedad tridimensional, es un objeto matemático que se encuentra en el campo de la topología y la geometría. En términos simples, una 3-variedad es un espacio tridimensional que localmente se parece al espacio euclidiano tridimensional, pero puede tener características topológicas y geométricas más complicadas.

Los espacios lentes  $L(p, q)$  son una clase esencial de 3-variedades que surgen como cocientes de la 3-esfera bajo la acción de un grupo cíclico. Estas variedades tienen importantes propiedades topológicas y geométricas, lo que las convierte en objetos fundamentales para el estudio de la topología de 3-variedades. Su relevancia se extiende más allá de la matemática pura, influyendo también en áreas como la física teórica, especialmente en la teoría de cuerdas y la geometría de espacios compactos. La comprensión de estos espacios contribuye significativamente al avance en la clasificación y estudio de variedades tridimensionales.

## Referencias Bibliografias

- [1] Mahima Ranjam Adhikari. “Basic Algebraic Topology and Its Applications”. En: 1900.
- [2] E. H. Brown. “Homology and Cohomology of Lens Spaces”. En: (1991).
- [3] Andrew Hatcher. “Algebraic Topology”. En: Cambridge University Press, 2002.
- [4] “Lens Spaces”. En: 2000.