

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA



INFORME FINAL DEL CURSO DE ESPECIALIZACIÓN:
VARIEDADES TÓRICAS Y ACCIONES DE GRUPOS ALGEBRAICOS

TÍTULO DEL INFORME FINAL:
UNA PERSPECTIVA COMBINATORIA DE CUADRADOS MÁGICOS Y POLITOPOS DE
BIRKHOFF

PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

PRESENTADO POR:
MARCIA PATRICIA GARCÍA MOREIRA N° CARNET GM18060
KATHERINE GABRIELA MARTÍNEZ MORALES N° CARNET MM20020

DOCENTE ASESOR:
DR. TOBÍAS HUMBERTO MARTÍNEZ LOVO

SEPTIEMBRE DE 2025
SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES



MSC. JUAN ROSA QUINTANILLA

RECTOR

DRA. EVELYN BEATRIZ FARFÁN

VICERRECTORA ACADÉMICA

MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

LIC. PEDRO ROSALÍO ESCOBAR CASTANEDA

SECRETARIO GENERAL

LIC. CARLOS ALMILCAR SERRANO RIVERA

FISCAL GENERAL

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

AUTORIDADES



MSC. CARLOS IVÁN HERNÁNDEZ FRANCO

DECANO

DRA. NORMA AZUCENA FLORES RETANA

VICEDECANA

LIC. CARLOS DE JESÚS SÁNCHEZ

SECRETARIO

ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA MARTÍNEZ

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

LIC. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

**COORDINADORA DEL PROCESO DE GRADO DEL DEPARTAMENTO DE
CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

Índice

1	Introducción	2
1.1	Historia sobre los cuadrados mágicos	2
1.2	Algo de historia sobre los politopos	6
1.3	Historia sobre Garret Birkhoff	7
2	Cuadrados Mágicos	9
2.1	Cuadrado mágico	9
2.2	Conjunto convexo	10
2.3	La envolvente convexa	11
2.4	Poliedros convexos	12
2.5	Politopos	13
2.6	Matrices	14
3	Politopos de Birkhoff	22
4	Relación sobre cuadrados mágicos y politopos de Birkhoff	24
5	Variedad tórica apartir de un politopo	26
5.1	Variedad tórica	26
6	Puntos enteros	34
6.1	Haces y comohologia	34

Resumen.

Este documento presenta una fascinante conexión entre cuadrados mágicos y politopos de Birkhoff. Partimos de la historia y propiedades de estas estructuras para, posteriormente destacar la interacción entre combinatoria, geometría convexa y álgebra. Se describe cómo la estructura de un cuadrado mágico puede representarse como un punto entero dentro de un polígono convexo, específicamente en dilataciones del politopo de Birkhoff. Asimismo, se aborda el uso del teorema de Birkhoff–von Neumann, el polinomio de Ehrhart y técnicas de cohomología en variedades tóricas para el conteo y análisis de puntos en politopos.

Palabras clave: Cuadrados mágicos; Politopos de Birkhoff; Combinatoria; Geometría convexa; Álgebra.

Abstract.

This document presents a fascinating connection between magic squares and Birkhoff polytopes. We begin with the history and properties of these structures and then highlight the interaction between combinatorics, convex geometry, and algebra. It is described how the structure of a magic square can be represented as an integer point within a convex polytope, specifically in dilations of the Birkhoff polytope. Likewise, the use of the Birkhoff–von Neumann theorem, the Ehrhart polynomial, and cohomology techniques in toric varieties is discussed for the counting and analysis of points in polytopes.

Keywords: Magic squares; Birkhoff polytopes; Combinatorics; Convex geometry; Algebra.

1. Introducción

1.1. Historia sobre los cuadrados mágicos

El primer cuadrado mágico en la historia es el cuadrado Lo Shu que fue descubierto por un matemático desconocido chino, probablemente alrededor del siglo I a. C. Es un cuadrado de 3×3 que según la leyenda apareció en el caparazón de una tortuga que surgió de un río.

Es el siguiente cuadrado:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Es mágico porque

$$\begin{aligned}
 15 &= 4 \ 9 \ 2 = 3 \ 5 \ 7 = 8 \ 1 \ 6 \quad (\text{sumas de filas}) \\
 &= 4 \ 3 \ 8 = 9 \ 5 \ 1 = 2 \ 7 \ 6 \quad (\text{sumas de columnas}) \\
 &= 4 \ 5 \ 6 = 8 \ 5 \ 2 \quad (\text{sumas de diagonales}).
 \end{aligned}$$

Para mayor información sobre el cuadrado **Lo Shu** y su relación con la filosofía y religión china antigua, puede leer el artículo Schuyler Cammann, *The Magic Square of Three in Old Chinese Philosophy and Religion. History of Religions*,

Vol. 1, No. 1 (Summer, 1961), pp. 37–80.

Disponible en: <http://www.jstor.org/stable/1061970>)

El filósofo, alquimista, médico y nigromante alemán **Enrique Cornelio Agripa** (1486–1535) publicó en 1531 su libro *De Occulta Philosophia libri III* en el cual los siete planetas conocidos en aquel tiempo (Saturno, Júpiter, Marte, el Sol, Venus, Mercurio, la Luna) fueron relacionados con ciertos cuadrados mágicos (LIBER SECVNDVS, p. CXLIX–CLIII).

4	9	2					11	24	7	20	3
3	5	7	4	14	15	1	4	12	25	8	16
8	1	6	9	7	6	12	17	5	13	21	9
			5	11	10	8	10	18	1	14	22
			16	2	3	13	23	6	19	2	15
Saturno			Júpiter				Marte				

El pintor renacentista alemán **Alberto Durero** (1471–1528) hizo en el 1514 el grabado alegórico muy famoso “Melencolía I” donde entre otras cosas se puede observar el polítopo convexo conocido como “poliedro de Durero” (recuerden que estamos interesados en polítopos) y el siguiente cuadrado mágico:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

En este cuadrado las sumas de filas y columnas son iguales a 34. También las

sumas diagonales son 34 y los cuatro cuadrados de 2×2 en los rincones y uno en el centro, a saber

16	3	2	13	9	6	7	12	10	11
5	10	11	8	4	15	14	1	6	7

consisten de números con suma 34. Aquí nos va a interesar solamente la condición para sumas de filas y columnas.

Otro cuadrado mágico famoso fue diseñado por Euler, que publicó en 1759 un artículo con el elaborado título “*Solution d’une question curieuse que ne paroît soumise a aucune analyse*” (“Solución de una cuestión curiosa que al parecer no se había sometido a ningún análisis”) dedicado al problema de visitar todo el tablero de ajedrez con un caballo. A saber, el cuadrado de arriba tiene la siguiente propiedad: si uno sigue los números $1, 2, 3, \dots$, entonces la sucesión corresponde a movimientos de caballo (verifíquese).

41	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
53	62	11	30	25	28	19	38
54	27	56	23	48	5	63	52
31	24	29	26	37	18	14	33
2	51	16	35	4	49	1	64
15	34	3	50	17	36	22	13

Parece que la gente estaba más interesada en cuadrados que son mágicos en un sentido muy fuerte: en los ejemplos de arriba los cuadrados contienen todos los

números de 1 a n^2 sin repeticiones y no solamente filas y columnas, sino también ambas diagonales tienen la misma suma —que debe ser igual a $n(n^2 + 1)/2$ (¿por qué?). Pero no vamos a estudiar tales cuadrados mágicos, porque su número exacto todavía no es conocido:

- Salvo rotaciones y reflexiones, el cuadrado Lo Shu es el único cuadrado de 3×3 con esta propiedad (ejercicio).
- El matemático francés Bernard Frénicle de Bessy (alrededor de 1605–1675) descubrió que, salvo rotaciones y reflexiones, hay 880 tales cuadrados 4×4 (su libro *Des quarrez ou tables magiques* fue publicado póstumamente en el 1693).
- Richard Schroepel calculó en 1973 que para $n = 5$ hay 27 530 5224 tales cuadrados.
- Para $n = 6$ el número exacto no es conocido, pero hay un cálculo estimado que dice que es $\approx 1,7745 \cdot 10^{19}$.

1.2. Algo de historia sobre los politopos

Los poliedros (politopos convexos tridimensionales), especialmente los regulares, han fascinado a la humanidad desde la antigüedad. La construcción de los cinco sólidos regulares en \mathbb{R}^3 (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) en el “Libro XIII”, fue uno de los puntos más relevantes del famoso *Los Elementos* de Euclides (~ 325 – 265 A.C.). Estos poliedros reciben el nombre de *sólidos platónicos*, debido a que Platón (~ 427 – 347 A.C.) hace mención expresa de ellos en el *Timeo*. La primera demostración conocida del hecho de que sólo existen 5 poliedros regulares en \mathbb{R}^3 se remonta a los pitagóricos (Pitágoras, ~ 580 – 500 A.C.).

En el siglo XX, matemáticos como **Garrett Birkhoff** y **John von Neu-**

mann desarrollaron un enfoque algebraico y combinatorio de los politopos, destacando el *politopo de Birkhoff*, que surge al estudiar matrices doblemente estocásticas y sus relaciones con las permutaciones. Esta visión conecta directamente con los cuadrados mágicos, que pueden interpretarse como puntos enteros en dilataciones del polítopo de Birkhoff.

1.3. Historia sobre Garret Birkhoff

Garrett Birkhoff (1911–1996) fue un matemático estadounidense. Obtuvo su licenciatura en Harvard en 1932, donde trabajó como profesor por el resto de su carrera. Estuvo entre los primeros algebraistas modernos en los Estados Unidos y publicó varios libros importantes, notablemente “*A Survey of Modern Algebra*” (1941) y “*Algebra*” (1967) con Saunders Mac Lane. Sus contribuciones en matemáticas puras están relacionadas con el “álgebra universal”, que ya es una rama bastante exótica del álgebra. Durante la segunda guerra mundial empezó a trabajar en matemáticas aplicadas, radares, balística, fluidodinámica, etc.

Exploramos precisamente la intersección entre **combinatoria, geometría convexa y teoría de variedades tóricas**. A continuación se ofrece una breve descripción de cada sección:

- **Sección II: Cuadrados mágicos.** Se introduce la noción de cuadrado mágico y se presentan definiciones formales, ejemplos de distintos órdenes y se analizan resultados sobre el número de cuadrados posibles para cada dimensión. También se incluye el caso general de cuadrados con suma de

línea arbitraria y las primeras fórmulas de enumeración.

- **Sección III: El politopo de Birkhoff.** Se define formalmente el politopo de Birkhoff B_n , el cual consiste en todas las matrices doblemente estocásticas de tamaño $n \times n$. Se presentan sus propiedades: es la envolvente convexa de las matrices de permutación, tiene dimensión $n - 1^2$ y cumple el teorema de Birkhoff–von Neumann. Este resultado establece que toda matriz doblemente estocástica puede escribirse como combinación convexa de matrices de permutación.
- **Sección IV: Relación entre cuadrados mágicos y el politopo de Birkhoff.** Aquí se muestra cómo los cuadrados mágicos pueden interpretarse como puntos enteros en dilataciones del politopo de Birkhoff. Se introduce la función de conteo $H_n m$, que calcula el número de cuadrados mágicos con suma m , y se conecta con la enumeración de puntos en mB_n .
- **Sección V: Variedades tóricas a partir de un politopo.** Se aborda la construcción de una variedad tórica asociada a un politopo. Se definen conceptos fundamentales como conos, abanicos y poliedros racionales, y se explica cómo estos objetos se combinan para formar una variedad tórica. Se incluyen ejemplos gráficos como el 2-símplice y un hexágono de retícula.
- **Sección VI: Puntos enteros de un politopo mediante cohomología de variedades.** Finalmente, se conecta la enumeración de puntos enteros con la teoría de haces y cohomología. Utilizando la fórmula de Riemann–Roch

y los polinomios de Ehrhart, se obtiene una relación directa entre propiedades geométricas de un politopo y el conteo de sus puntos de retícula. Se generaliza además con los polinomios p -Ehrhart, que ofrecen una visión más profunda de la interacción entre geometría discreta y teoría algebraica. En resumen, este trabajo ofrece una **perspectiva combinatoria y geométrica** que une la larga historia de los cuadrados mágicos con las herramientas modernas de la geometría de politopos y variedades tóricas, mostrando cómo problemas clásicos (ideas antiguas) pueden entenderse y estudiarse hoy con métodos más actuales de las matemáticas (algebraico-geométrico actual).

2. Cuadrados Mágicos

2.1. Cuadrado mágico

Definición 2.1. Un cuadrado mágico es una tabla de tamaño $n \times n$, llenada con números naturales arbitrarios (posiblemente 0), tal que las sumas de filas y columnas son iguales al mismo número m , que se llama **la constante mágica**.

Ejemplo 1

Cuadrado mágico de orden 3 es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

donde todas las filas y columnas suman $m = 15$.

Ejemplo 2

Cuadrado mágico (de orden 4) es:

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

donde todas las filas y columnas suman $m = 34$. Este cuadrado mágico, conocido como el cuadrado de Dureró, tiene la propiedad adicional de que sus diagonales también suman 34.

2.2. Conjunto convexo

Definición 2.2. Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ se llama **convexo** si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:

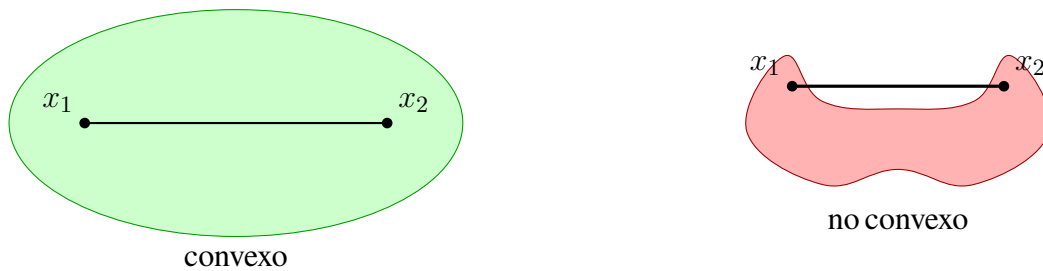
1) Para cualesquiera dos puntos diferentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ el segmento de la recta entre \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 := \{\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

está también contenido en K ,

2) K contiene todos los puntos de \mathbb{R}^n **convexamente dependientes** de

K . Se dice que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es convexamente dependiente de K si \mathbf{x} es una



combinación convexa de algunos puntos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in K$:

$$\mathbf{x} = \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{para algunos coeficientes } \lambda_i \geq 0 \text{ tales que } \sum_i \lambda_i = 1.$$

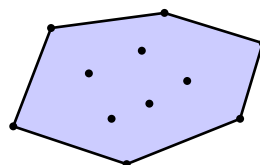
2.3. La envolvente convexa

Definición 2.3. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es cualquier conjunto, entonces la **envolvente convexa** de X es el conjunto

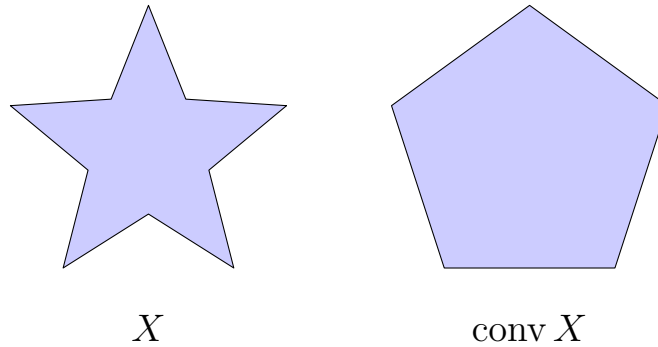
$$\text{conv } X := \bigcap_{\substack{K \supseteq X \\ K \text{ convexo}}} K.$$

La intersección de conjuntos convexos es convexa, de donde $\text{conv } X$ es un conjunto convexo, específicamente el conjunto convexo mínimo que contiene a X . Tenemos $\text{conv } X = X$ si y solamente si X es convexo.

Ejemplo 3 He aquí la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^2 :



Ejemplo 4 Aquí un subconjunto no convexo de \mathbb{R}^2 y su envolvente convexa:



2.4. Poliedros convexos

Definición 2.4. Se dice que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **poliedro convexo** si X es una intersección finita de semiespacios cerrados.

\mathbb{R}^n y \emptyset son también considerados como poliedros convexos (intersección de una familia vacía y la intersección vacía). En otras palabras, un poliedro convexo es la solución de un sistema de desigualdades lineales:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1x \geq 0, \dots, f_kx \geq 0\},$$

donde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son aplicaciones afines, es decir de la forma

$$f_ix = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

para algunos $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

2.5. Polítopos

Definición 2.5. Un polítopo es la envolvente convexa de una cantidad finita de puntos.

Definición 2.6. Un polítopo convexo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos $\{x_1, \dots, x_k\} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.7. Un polítopo racional Δ en \mathbb{R}^n es la envoltura convexa de un subconjunto finito de \mathbb{Z}^n . En general para cualquier polítopo sus puntos no necesariamente caen en \mathbb{Z}^n , pero esto es lo que nos permite relacionarlo con las variedades tóricas.

Ejemplo 5

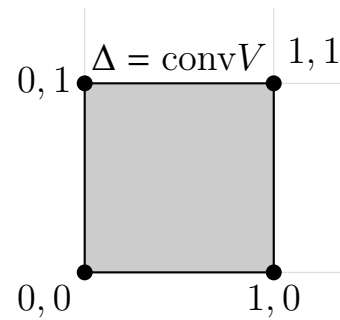
En \mathbb{R}^2

Consideremos el siguiente subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 :

$$V = \{0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1\} \subset \mathbb{Z}^2$$

El **polítopo racional** Δ generado por estos puntos es la **envoltura convexa** de V :

$$\Delta = \text{conv}V = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$



2.6. Matrices

Definición 2.8. Una matriz de permutación es una matriz cuadrada que resulta de permutar las filas (o columnas) de la matriz identidad. Es decir, una matriz de permutación es una matriz que tiene exactamente un 1 en cada fila y en cada columna, y ceros en las demás posiciones.

Definición 2.9. Una matriz doblemente estocástica, es una matriz cuadrada donde cada fila y columna suman 1 y todos sus elementos son no negativos.

Ejemplo 6 La matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

es doblemente estocástica.

Definición 2.10. $H_n m$ es el número de cuadrados mágicos de $n \times n$ con sumas iguales a m .

Aquí se muestran algunos valores de $H_n m$ para valores pequeños de n y m , obtenidos con ayuda de una computadora:

m	1	2	3	4	5	6	7
H_2m	2	3	4	5	6	7	8
H_3m	6	21	55	120	231	406	666
H_4m	24	282	2008	10147	40176	132724	381424
H_5m	120	6210	153040	2224955	22069251	164176640	976395820
H_6m	720	202410	20933840	1047649905	30767936616	602351808741	8575979362560

Cuadro 1: Valores de $H_n m$ para $m = 1, \dots, 7$.

Ejemplo 7 Ilustraremos estas nociones para el caso $n = 2$, que no es muy complicado.

En este caso, un *cuadrado mágico* queda determinado una vez se conoce una de sus entradas, por ejemplo, la de la esquina superior izquierda, que denotamos por x .

Debido a la condición de suma de la fila superior, la entrada superior derecha debe ser $m - x$; lo mismo ocurre con la entrada inferior izquierda, debido a la suma de la columna izquierda.

Entonces, la entrada inferior derecha debe ser:

$$m - m - x = x,$$

tanto por la suma de la fila inferior como por la de la columna derecha.

$$\begin{pmatrix} x & m - x \\ m - x & x \end{pmatrix}$$

El valor de x puede ser cualquier número entero entre 0 y m . Cada valor posible de x genera exactamente un cuadrado mágico diferente y como hay

$m - 1$ enteros posibles, se concluye que:

$$H_2m = m - 1.$$

Caso general: Para $m = 1$. $H_n1 = n!$.

cuadrado mágico debe tener precisamente un coeficiente 1 en cada fila y cada columna, y los otros coeficientes deben ser ceros. Esto se llama matriz de permutación.

El primer caso no trivial es H_3m .

Sea H_3m el número de cuadrados mágicos de tamaño 3×3 en los que cada fila y cada columna tiene suma m . Se puede demostrar que:

$$H_3m = \binom{m-4}{4} + \binom{m-3}{4} + \binom{m-2}{4}$$

donde H_3m representa el número de cuadrados mágicos de 3×3 con suma de línea m .

Demostración.

Se sigue del libro [1], p. 60

Considérese un cuadrado mágico de suma de línea m y de lado 3. Es claro que los cuatro elementos mostrados en la figura determinan todos los demás elementos del cuadrado.

a	d	
	b	
		c

En efecto, la siguiente tabla muestra nuestra única posible elección para cada una de las entradas restantes. Por lo tanto, todo lo que necesitamos hacer es contar el número de formas en que podemos elegir a , b , c y d de manera que efectivamente tengamos esa única elección, es decir, que las entradas obtenidas del cuadrado mágico sean todas no negativas.

a	d	$m - a - d$
$m - c - a - d - b$	b	$a - d - c$
$b - d - c$	$m - b - d$	c

La tabla anterior muestra que las entradas de nuestra matriz serán no

negativas si y solo si se cumplen las siguientes desigualdades:

$$a \geq 0$$

$$b \geq 0$$

$$c \geq 0$$

$$d \geq 0$$

$$a d \leq m \quad 1$$

$$b d \leq m \quad 2$$

$$c \leq a d \quad 3$$

$$c \leq b d \quad 4$$

$$a d b - c \leq m \quad 5$$

Consideraremos tres casos diferentes, de acuerdo con la posición del elemento más pequeño en la diagonal principal. En cada uno de ellos, al menos tres de las cinco condiciones anteriores se volverán redundantes, y solo tendremos que abordar las dos restantes.

(a) Supongamos que $0 < a < b$ y $0 < a < c$. En este caso, las condiciones (1), (4) y (5) son claramente redundantes, ya que están implicadas por (2) y (3).

La observación crucial es que, en los tres casos, podemos reunir todas nuestras condiciones en una sola cadena de desigualdades. En este caso, lo hacemos de la siguiente manera:

$$a < 2a \quad d - c < a \quad b d - c < b d < m. \quad (6)$$

En efecto, la primera desigualdad es equivalente a (3), la segunda es equivalente a nuestra suposición $a < b$, la tercera es equivalente a nuestra suposición $a < c$, y la última es equivalente a (2).

Además, observa que, una vez que conocemos los términos de esta cadena, es decir, a , $2a - d - c$, $a - b - d - c$ y $b - d$, entonces también conocemos a , b , c y d , por lo tanto, hemos determinado el cuadrado mágico. Así, todo lo que necesitamos hacer es simplemente contar de cuántas maneras se pueden elegir estos cuatro términos. La desigualdad (6) muestra que estos términos son no decrecientes, por lo tanto, el número de maneras de elegirlos es simplemente el número de 4-combinaciones de $m + 1$ elementos con repeticiones permitidas, que es

$$\binom{m+4}{4}$$

(Recuerde que se permite que 0 sea una entrada).

(b) Ahora supongamos que $a > b$ y $c > b$. Entonces, las condiciones (2), (4) y (5) son redundantes. Consideremos la siguiente cadena de desigualdades:

$$b < 2b - d - c < a - b - d - c - 1 < a - d - 1 < m - 1. \quad (7)$$

Podemos usar el argumento del caso anterior para probar que (7) es equivalente a (1), (5) y nuestras suposiciones, ya que los papeles de a y b son completamente simétricos. El único cambio es que aquí no contamos aquellos cuadrados mágicos en los que $a = b$, y esto explica el -1 en los tres últimos términos. Así, aquí debemos elegir cuatro elementos en orden

no decreciente del conjunto $\{0, 1, \dots, m - 1\}$, lo cual se puede hacer de

$$\binom{m-3}{4}$$

formas.

(c) Finalmente, supongamos que $a > c$ y $b > c$. Entonces, las condiciones (1), (2), (3) y (4) son redundantes. La condición (5), junto con nuestras suposiciones, se pueden reunir en la siguiente cadena de desigualdades:

$$c < b - 1 < b \leq d - 1 < a \leq b \leq d - c - 2 < m - 2 \quad (8)$$

La primera desigualdad es equivalente a nuestra suposición $c < b$, la segunda indica que d es no negativo, la tercera es equivalente a la suposición $c < a$, y la última es equivalente a la condición (5).

Los cuatro términos de la desigualdad (8) determinan los valores de a, b, c y d , y estos pueden elegirse de $\binom{m-2}{4}$ formas, lo que completa la demostración.

Por lo tanto, el número de cuadrados mágicos de 3×3 con suma de línea m es, en efecto,

$$\binom{m}{4} + \binom{m}{3} + \binom{m}{2}.$$

Además, los tres términos en esta suma cuentan los cuadrados mágicos en

los que el elemento mínimo (primero) de la diagonal principal es el primer, segundo o tercer elemento, respectivamente.

3. Polítopos de Birkhoff

Definición 3.1. El polítopo de Birkhoff B_n es el conjunto de todas las matrices *doblemente estocásticas*, es decir, matrices reales no negativas cuyas sumas de filas y columnas son iguales a 1.

Además, el polítopo de Birkhoff B_n es la *envoltura convexa* de todas las matrices de permutación de tamaño $n \times n$.

Consideremos, por tanto, el polítopo convexo

$$B_n := \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n^2} \quad x_{ij} \geq 0, \\ \quad \quad \quad \left(\begin{array}{l} \sum_i x_{ij} = 1 \text{ para cada } j, \\ \sum_j x_{ij} = 1 \text{ para cada } i \end{array} \right) \end{array} \right\}.$$

este conjunto recibe el nombre de **polítopo de Birkhoff**, y una matriz que satisface

$$\sum_i x_{ij} = 1 \text{ para cada } j \quad \text{y} \quad \sum_j x_{ij} = 1 \text{ para cada } i$$

se llama una matriz **doblemente estocástica**.

El polítopo B_n se denomina el *n-ésimo Polítopo de Birkhoff–von Neumann*, en honor a Garrett Birkhoff (1911–1996) y John von Neumann (1903–1957).

Los **vértices** del Polítopo B_n son exactamente las *matrices de permutación*

de tamaño $n \times n$.

Este politopo tiene **dimensión** $n - 1^2$.

4. Relación sobre cuadrados mágicos y politopos de Birkhoff

Notamos que cada cuadrado mágico corresponde a un punto entero del conjunto

$$mB_n := \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n^2} \quad x_{ij} \geq 0, \\ i x_{ij} = m \text{ para cada } j, \quad j x_{ij} = m \text{ para cada } i \end{array} \right\}.$$

Este es un cierto politopo convexo dilatado por m .

La conexión de la función de conteo semimágica $H_n m$ con el politopo de Birkhoff–von Neumann B_n se hace clara a la luz del enumerador de puntos para B_n : la función de conteo $H_n m$ enumera precisamente los puntos enteros en mB_n , es decir,

$$H_n m = \# \left(mB_n \cap \mathbb{Z}^{n^2} \right)$$

Teorema 1. (Teorema de Birkhoff–von Neumann). Toda matriz doblemente estocástica es una combinación convexa de matrices de permutación. Es decir, B_n es la envolvente convexa de las matrices de permutación:

$$B_n = \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma P_\sigma \mid \lambda_\sigma \geq 0 \text{ y } \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma = 1 \right\},$$

donde P_σ es la matriz de $n \times n$ que representa a la permutación σ .

Demostración.

Vease [9], p. 549

5. Variedad tórica apartir de un politopo

5.1. Variedad tórica

Definición 5.1. Una variedad tórica es una variedad normal irreducible X que contiene un toro T como un conjunto abierto de Zariski (denso, por ende), junto a una acción (de grupo) $T \times X \rightarrow X$ de T sobre X que extiende la acción natural de T sobre sí mismo.

Definición 5.2. Un cono poliédrico convexo en $N_{\mathbb{R}}$ es un conjunto de la forma

$$\sigma = \text{Cono}S = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \right\} \subseteq N_{\mathbb{R}},$$

donde $S \subseteq N_{\mathbb{R}}$ es un conjunto finito.

Nota: como solo consideramos conos convexos, los conos que satisfacen la definición serán llamados simplemente “**conos poliédricos**”.

Definición 5.3. Un **abanico** Σ en \mathbb{R}^n es una colección finita de conos que satisface las siguientes propiedades:

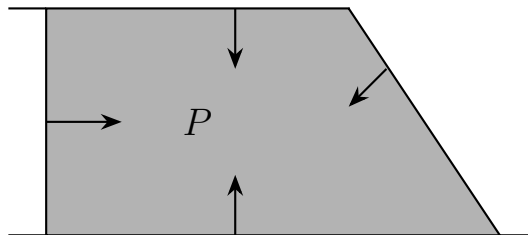
1. Todo cono de Σ es un cono racional, poliédrico y fuertemente convexo en \mathbb{R}^n .
2. Si $\sigma \in \Sigma$ y $\tau \prec \sigma$ (es decir, τ es una cara de σ), entonces $\tau \in \Sigma$.
3. Si $\sigma, \tau \in \Sigma$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara común de ambos.

Politopos. Recordando de la sección anterior $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es la envoltura convexa de un conjunto finito $S \subset M_{\mathbb{R}}$, es decir, $P = \text{Conv}S$.

La dimensión de un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es la dimensión del subespacio afín más pequeño de $M_{\mathbb{R}}$ que contiene a P .

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un **polítopo de retículo de dimensión completa**, no necesariamente *muy amplio*. Las **caras, facetas y vértices** de P serán denotados por Q, F y v , respectivamente.

La siguiente figura muestra un polígono con las rectas de soporte de sus caras unidimensionales. Las flechas en la figura indican los vectores u_F . Las rectas de soporte junto con las flechas determinan los semiplanos de soporte cuya intersección es el polígono P .



Esta construcción se generaliza a cualquier cara $Q \subseteq P$ definiendo

$$\sigma_Q = \text{Conou}_F \mid F \text{ contiene a } Q.$$

Cuando P es de dimensión completa, es decir, $\dim P = \dim M_{\mathbb{R}}$, su representación como intersección de semiespacios cerrados tiene una forma especialmente agradable porque cada faceta F tiene un hiperplano afín de soporte único. Escribimos el hiperplano afín de soporte y el correspon-

diente semiespacio cerrado como

$$H_F = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle = -a_F\}$$

y

$$H_F = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F\},$$

donde $u_F, a_F \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ es único salvo multiplicación por un número real positivo. Llamamos a u_F una normal de faceta apuntando hacia el interior de la faceta F .

Así, la representación de un politopo como la intersección de semiespacios es:

$$P = \bigcap_{F \text{ faceta}} H_F = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ para toda faceta } F \prec P\}. \quad (1)$$

Dada una cara Q de un politopo P , sea σ_Q el cono generado por los vectores u_F para todas las facetas F que contienen a Q . Entonces,

$$\Delta_P = \{\sigma_Q \mid Q \text{ es una cara de } P\}$$

es un **abanico**, que denominamos *abanico asociado a P* .

Los conos en el abanico Δ_P se construyen a partir de los vectores normales dirigidos hacia el interior u_F . Así, el cono σ_F es el rayo generado por u_F .

A Δ_P se le llama el **abanico normal** o **abanico normal interior** de P .

Para nuestro propósito, todos los polítopos se suponen convexos y no contenidos en un hiperplano. Un **politopo racional** en $M_{\mathbb{R}}$ es un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$ que satisface la condición de racionalidad: en cada vértice $p \in P$, todas las aristas de P tienen la forma $p + tv$, $t \in [0, \ell]$ para algún $v \in M$.

Una **cara** de tal polítopo es o bien el mismo cono, o la intersección de éste con uno de sus hiperplanos soporte.

Definición 5.4. Un **politopo de red** en $M_{\mathbb{R}}$ es un politopo cuyos vértices están en M , lo cual implica en particular que es un politopo racional.

Así, sea P un politopo racional en M . A este se le asocia un abanico en N

$$\Delta_P := \{\sigma_Q : Q \text{ es una cara de } P\}$$

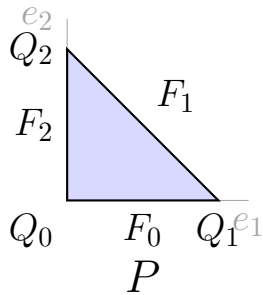
donde $\sigma_Q = \{v \in N_{\mathbb{R}} : \langle u, v \rangle \leq \langle u', v \rangle \text{ para todo } u \in Q, u' \in P\}$ es un cono con codimensión igual a $\dim Q$.

Entonces, la construcción del abanico da una variedad torica $X\Delta_P$, a la que llamamos la **variedad torica de P** .

En general, una variedad tórica es **proyectiva equivariantemente** si admite una incrustación tórica (es decir, un morfismo tórico que es una incrustación) en algún \mathbb{P}^N .

Ejemplo 8 La figura es el 2-símplex estándar en \mathbb{R}^2 (un triángulo recto) escalado por $k > 0$:

$$P = k\Delta_2 = \text{conv} \{v_0 = 0, 0, v_1 = k, 0, v_2 = 0, k\}.$$



Descripción por desigualdades (H-representación)

Si tomamos normales interiores a las tres facetas:

$$u_{F_0} = e_2 = 0, 1, \quad u_{F_2} = e_1 = 1, 0, \quad u_{F_1} = -e_1 \ e_2 = -1, -1,$$

las ecuaciones de las facetas (con igualdad sobre cada arista) quedan:

$$\langle x, y, u_{F_0} \rangle = y \geq 0 \quad (\text{faceta } F_0: y = 0),$$

$$\langle x, y, u_{F_2} \rangle = x \geq 0 \quad (\text{faceta } F_2: x = 0),$$

$$\langle x, y, u_{F_1} \rangle = -x \ y \geq -k \quad (\text{faceta } F_1: x \ y = k).$$

Equivalente:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \ y \leq k.$$

El cono normal en un vértice Q_i es el cono generado por las normales interiores de las facetas que se encuentran en ese vértice.

En

$$Q_0 = v_0 = 0, 0 :$$

se encuentran $F_0 (y = 0)$ y $F_2 (x = 0)$.

$$\sigma_{Q_0} = \text{Conou}_{F_0}, u_{F_2} = \text{Conoe}_2, e_1.$$

En

$$Q_1 = v_1 = k, 0 :$$

se encuentran $F_0 (y = 0)$ y $F_1 (x - y = k)$.

$$\sigma_{Q_1} = \text{Conou}_{F_0}, u_{F_1} = \text{Conoe}_2, -e_1 - e_2.$$

En

$$Q_2 = v_2 = 0, k :$$

se encuentran $F_2 (x = 0)$ y $F_1 (x - y = k)$.

$$\sigma_{Q_2} = \text{Conou}_{F_2}, u_{F_1} = \text{Conoe}_1, -e_1 - e_2.$$

Cada faceta F_i determina un rayo del abanico normal; es la intersección de los conos de los dos vértices extremos de esa faceta:

Para F_2 : $x = 0$

$$\sigma_{F_2} = \text{Conou}_{F_2} = \text{Conoe}_1 = \sigma_{Q_0} \cap \sigma_{Q_2}.$$

Para F_0 : $y = 0$

$$\sigma_{F_0} = \text{Cono}u_{F_0} = \text{Cono}e_2 = \sigma_{Q_0} \cap \sigma_{Q_1}.$$

Para F_1 : $x = y = k$

$$\sigma_{F_1} = \text{Cono}u_{F_1} = \text{Cono}-e_1 - e_2 = \sigma_{Q_1} \cap \sigma_{Q_2}.$$

Conos de caras extremas

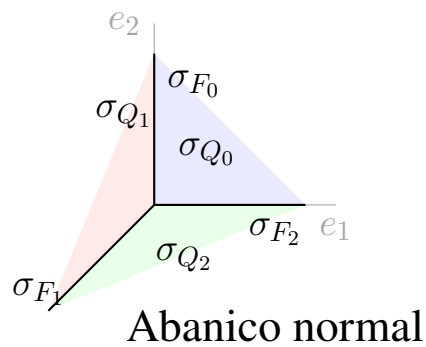
Para la cara completa P :

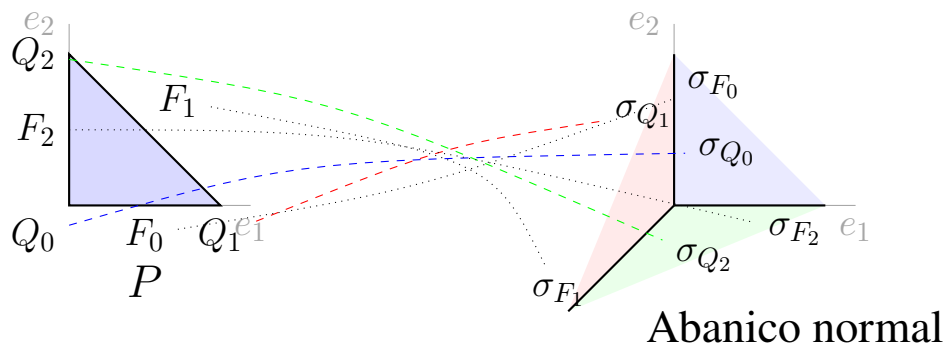
$$\sigma_P = \{0\}$$

(solo el vector nulo maximiza en todo P).

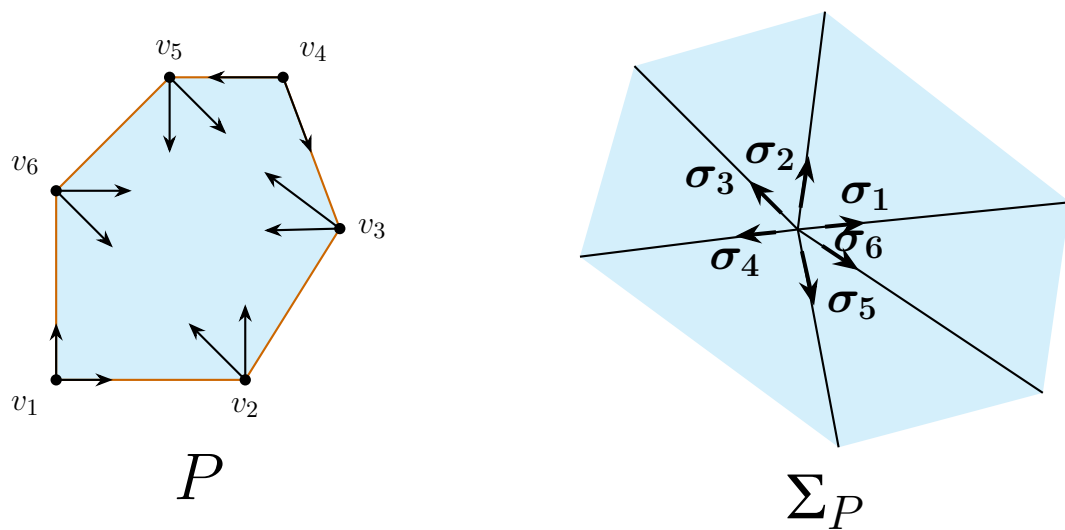
Para la cara vacía \emptyset :

$$\sigma_{\emptyset} = \mathbb{R}^2.$$





Ejemplo 9 Hexágono y su abanico normal



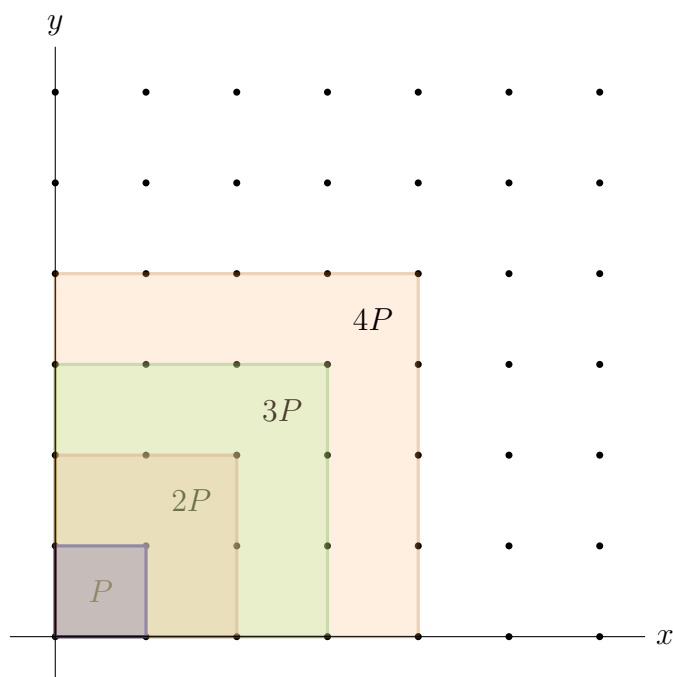
La figura muestra un hexágono de retículo P en el plano junto con su abanico normal. Los vértices de P están etiquetados como v_1, \dots, v_6 , y el cono correspondiente en el abanico normal se denota por $\sigma_1, \dots, \sigma_6$.

En el lado izquierdo, se dibujan los vectores normales de las facetas que contienen cada vértice v_i , sombreando el cono σ_i que generan. En el lado derecho, estos conos se ensamblan en el origen para formar el abanico normal Σ_P .

6. Puntos enteros

En esta sección se estudia el problema de contar los puntos enteros de un polígono convexo utilizando herramientas de cohomología de variedades.

Con las fórmulas de Riemann–Roch disponibles para calcular la característica de Euler, se obtiene un enfoque que permite determinar el número de puntos de la retícula contenidos en un polígono convexo.



La figura muestra un cuadrado P (azul) y sus dilataciones $2P$ (rojo), $3P$ (verde) y $4P$ (naranja). Cada dilatación conserva la forma del cuadrado pero multiplica las longitudes por el factor correspondiente, lo que hace que el área crezca como k^2 .

6.1. Haces y comohologia

Definición 6.1. Un haz \mathcal{F} sobre una variedad X posee grupos de cohomología de haces $H^p X, \mathcal{F}$.

Definición 6.2. Dado un divisor de Cartier invariante bajo la acción del toro

$$D = \sum_{\rho} a_{\rho} D_{\rho}$$

en la variedad tórica X_{Σ} , el complejo de Čech $\check{C}^{\bullet} \mathcal{U}, \mathcal{F}$ permite calcular los grupos de cohomología $H^p X_{\Sigma}, \mathcal{F}$.

Un divisor de Weil

$$D = \sum_{\rho} a_{\rho} D_{\rho}$$

define el poliedro

$$P_D = \{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_{\rho} \rangle \geq -a_{\rho} \text{ para todo } \rho \in \Sigma \},$$

el cual es un politopo cuando el abanico Σ es completo.

Más precisamente, si $P \subset \mathbb{R}^n$ es un politopo convexo asociado a una variedad tórica X_P , la fórmula de Riemann–Roch proporciona:

$$\chi X_P, \mathcal{O}_{D_P} = \# P \cap \mathbb{Z}^n,$$

donde D_P es el divisor asociado a P y χ denota la característica de Euler del haz de secciones \mathcal{O}_{D_P} .

De esta manera, el conteo de puntos enteros se reduce a un problema de cohomología y cálculo de características topológicas de la variedad tórica correspondiente.

Característica de Euler de un Haz. Utilizamos teoremas de anulación para estudiar politopos de retícula (lattice polytopes).

Definición 6.3. Sea \mathcal{F} un haz coherente sobre una variedad completa X .

La *característica de Euler* $\chi\mathcal{F}$ se define como la suma alternada

$$\chi\mathcal{F} = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \dim H^p X, \mathcal{F},$$

donde $H^p X, \mathcal{F}$ denota los grupos de cohomología de \mathcal{F} en X .

Nuestras hipótesis sobre X y \mathcal{F} garantizan que

$$\dim H^p X, \mathcal{F} < \infty \quad \text{para todo } p,$$

y además

$$H^p X, \mathcal{F} = 0 \quad \text{para todo } p > \dim X.$$

Por lo tanto, $\chi\mathcal{F}$ está bien definida como un número entero.

La característica de Euler satisface la propiedad de aditividad:

$$\chi\mathcal{G} = \chi\mathcal{F} + \chi\mathcal{H},$$

siempre que exista una sucesión exacta corta de haces coherentes

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

El Polinomio de Ehrhart. Dado un politopo de retícula de dimensión completa $P \subset M_{\mathbb{R}}$, definimos las funciones

$$LP = |P \cap M|, \quad L^*P = |\text{Int}P \cap M|,$$

donde M es la retícula y $\text{Int}P$ denota el interior de P . Estas funciones cuentan el número de puntos de la retícula contenidos en P o en su interior, respectivamente.

El *Teorema de Ehrhart* establece que LP es un polinomio en ℓ , y en el contexto de variedades tóricas,

$$LP = \chi(\mathcal{O}_{X_P}(D_P)),$$

donde D_P es el divisor asociado a P .

Teorema 2. (Reciprocidad de Ehrhart). Sea $P \subseteq M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ un polítopo de dimensión completa con vértices en la retícula. Existe un polinomio de Ehrhart

$$\text{Ehr}_P x \in \mathbb{Q}x$$

tal que, si $\ell \in \mathbb{N}$, entonces

$$\text{Ehr}_P \ell = L\ell P,$$

donde $L\ell P$ denota el número de puntos de la retícula contenidos en ℓP (incluyendo su frontera).

Además, si $\ell \in \mathbb{N}$ es positivo, entonces

$$\text{Ehr}_{P-\ell} = -1^n L^* \ell P,$$

donde $L^* \ell P$ cuenta únicamente los puntos de la retícula que están en el interior de ℓP .

Demostración.

Vease [1], p. 432

Proposición 6.4. Si P es muy amplio (es decir, el divisor D_P es muy amplio), entonces el polinomio de Ehrhart

$$\text{Ehr}_P$$

coincide con el polinomio de Hilbert de la variedad tórica X_P bajo la incrustación proyectiva dada por el divisor muy amplio D_P .

Demostración.

Consultese [1], p. 433

Polinomios p -Ehrhart

Usamos los haces $\Omega_{X_P}^p$ para generalizar el polinomio de Ehrhart cuando el polítopo de retícula P es *simple*. Un polítopo de retícula de dimensión completa $P \subset M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ es simple si cada vértice es la intersección de exactamente n facetas. Por lo tanto, cada vértice tiene n normales de facetas que generan el cono correspondiente en el abanico normal Σ_P . Se sigue que Σ_P es simplicial siempre que P sea simple, y por consiguiente la variedad tórica X_P es simplicial.

Hemos enunciado anteriormente que el polinomio de Ehrhart $\text{Ehr}_P x$ de P satisface

$$\text{Ehr}_P \ell = \chi(\mathcal{O}_{X_P}(\ell D_P)), \quad \ell \in \mathbb{Z},$$

donde D_P es el divisor amplio asociado a P .

De manera más general, dado un número entero

$$0 \leq p \leq n,$$

la característica de Euler

$$\chi(\Omega_{X_P}^p(\ell D_P))$$

es una función polinómica en ℓ . Definimos entonces el *polinomio p -Ehrhart* de P , denotado por

$$\text{Ehr}_P^p x,$$

como el único polinomio en $\mathbb{Q}x$ que satisface

$$\text{Ehr}_P^p \ell = \chi(\Omega_{X_P}^p \ell D_P), \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Para enunciar las propiedades de los polinomios p -Ehrhart $\text{Ehr}_P^p x$, utilizamos la siguiente notación:

$$Pi = \{ Q \mid Q \text{ es una cara } i\text{-dimensional de } P \},$$

$$f_i = |Pi| = \#\{\text{caras } i\text{-dimensionales de } P\},$$

y definimos

$$h_p = \sum_{i=p}^n (-1)^{i-p} \binom{i}{p} f_i.$$

Los f_i son los números de caras de P . Además, si Q es una cara de P , definimos

$$LQ = |Q \cap M|, \quad L^*Q = |\text{Relint}Q \cap M|,$$

donde $\text{Relint}Q$ denota el interior relativo de Q .

Teorema 3.. Sea X_P la variedad tórica asociada a un politopo simple de dimensión completa $P \subseteq M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$.

(a) Si $\ell > 0$ es un entero, entonces

$$\text{Ehr}_P^p \ell = \sum_{i=p}^n \binom{i}{p} \sum_{Q \in \mathcal{P}_i} L^* \ell Q,$$

donde \mathcal{P}_i denota las caras de dimensión i de P y $L^* \ell Q$ es el número de puntos *enteros interiores* en ℓQ .

(b) Si $\ell \geq 0$ es un entero, entonces

$$\text{Ehr}_P^p \ell = \sum_{i=0}^p -1^i \binom{n-i}{n-p} \sum_{Q \in \mathcal{P}_{n-i}} L \ell Q,$$

donde $L \ell Q$ cuenta los puntos enteros (incluyendo frontera) en ℓQ .

(c) Si $0 \leq p \leq n$, entonces

$$\text{Ehr}_P^p -x = -1^n \text{Ehr}_P^{n-p} x.$$

(d) Si $0 \leq p \leq n$, entonces

$$\text{Ehr}_P^p 0 = -1^p h_p,$$

donde h_p es el coeficiente p del h -vector del politopo P .

Demostración.

Remítase a [1], pp. 437-438

Ejemplo 8 El n -símplice estándar Δ_n tiene como variedad tórica asociada

a \mathbb{P}^n . Dado $\ell > 0$, se observa que

$$\sum_{Q \in \Delta_n^i} L^* \ell Q = \binom{n-1}{n-i} \binom{\ell-1}{i}.$$

Esto se debe a que:

Un n -símplice tiene $\binom{n-1}{i} = \binom{n-1}{n-i}$ caras de dimensión i .

Cada $Q \in \Delta_n^i$ es isomorfo (como politopo de retícula) al i -símplice estándar y, por lo tanto, posee $\binom{\ell-1}{i}$ puntos de la retícula en su interior, por la fórmula

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\ell)) = -1^n \dim H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\ell)) = -1^n |\text{Int} \ell \Delta_n \cap \mathbb{Z}^n| = -1^n \binom{-\ell-1}{n}.$$

Entonces, aplicando la parte (a) del Teorema, obtenemos:

$$\text{Ehr}_{\Delta_n}^p \ell = \sum_{i=p}^n \binom{i}{p} \binom{n-1}{n-i} \binom{\ell-1}{i}.$$

Usando la identidad

$$\binom{i}{p} \binom{\ell-1}{i} = \binom{\ell-1}{p} \binom{\ell-p-1}{i-p},$$

esta expresión se transforma en:

$$\text{Ehr}_{\Delta_n}^p \ell = \binom{\ell-1}{p} \sum_{i \geq 0} \binom{n-1}{n-i} \binom{\ell-p-1}{i-p}.$$

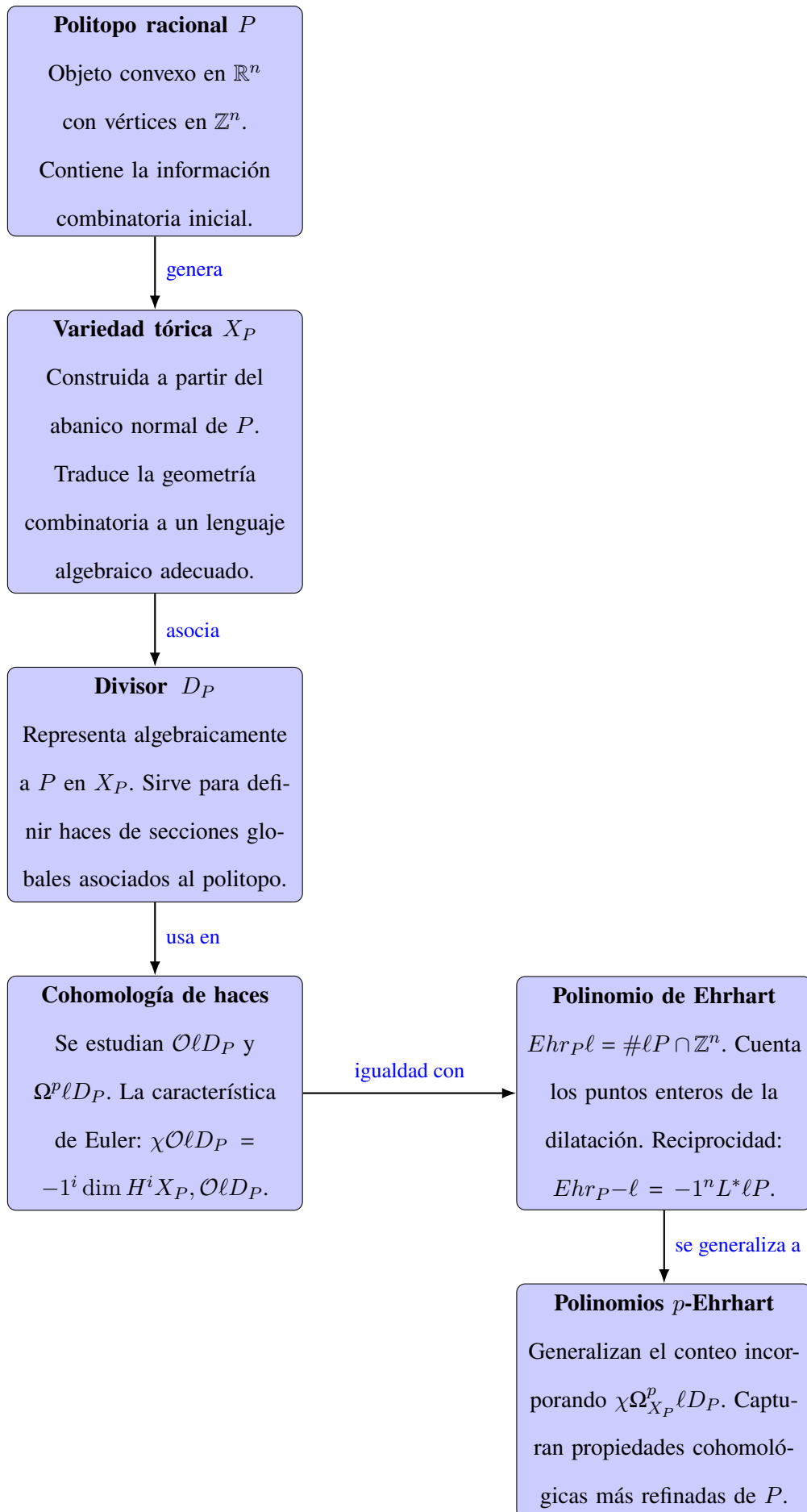
Finalmente, aplicando la identidad de Vandermonde, se obtiene:

$$\text{Ehr}_{\Delta_n}^p \ell = \binom{\ell - 1}{p} \binom{n \ell - p}{\ell}.$$

Relación general.

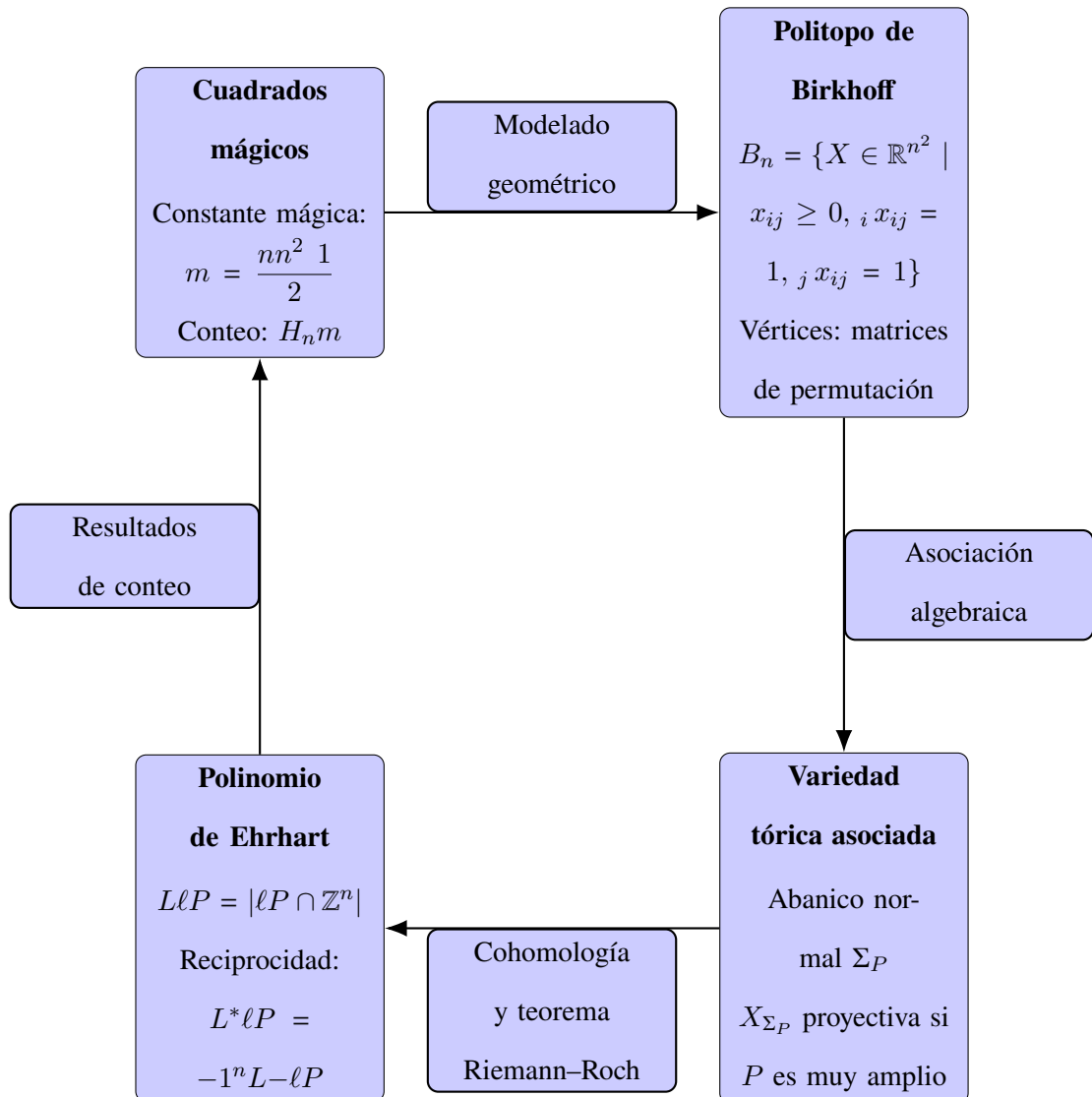
Un politopo P define una variedad tórica X_P con un divisor D_P . La cohomología de haces (à la Riemann–Roch) traduce el conteo de puntos enteros en P en características de Euler, que son polinomios (Ehrhart y sus variantes). En otras palabras, la geometría algebraica proporciona un marco natural para estudiar la combinatoria de los puntos enteros: cada dilatación mP del politopo se corresponde con la sección global de un haz lineal sobre la variedad tórica X_P , y el espacio vectorial de tales secciones tiene como dimensión precisamente el número de puntos enteros en mP . De este modo, el polinomio de Ehrhart aparece como la función de Hilbert asociada al divisor D_P , y el teorema de Riemann–Roch nos asegura que este conteo tiene una expresión polinomial en m . Este puente entre geometría convexa y geometría algebraica explica cómo resultados puramente combinatorios sobre politopos convexos pueden deducirse a partir de propiedades intrínsecas de las variedades tóricas.

Relación entre fórmulas de conteo en politopos



El diagrama resume el flujo lógico que conecta la geometría discreta de un politopo racional con las fórmulas polinómicas que describen el número de puntos enteros en sus dilataciones. Partiendo de la estructura combinatoria del politopo P , esta se traduce, mediante su abanico normal, en la variedad tórica asociada X_P . El divisor D_P correspondiente permite utilizar herramientas de cohomología de haces, cuya característica de Euler, gracias a la fórmula de Riemann–Roch, coincide exactamente con el conteo de puntos enteros en ℓP . Este resultado se envuelve en el polinomio de Ehrhart $Ehr_{P\ell}$, cuya estructura algebraica refleja propiedades combinatorias como la reciprocidad. Finalmente, la generalización a polinomios p -Ehrhart incorpora dimensiones cohomológicas más profundas, ampliando el análisis a aspectos diferenciales y topológicos del politopo. De este modo, el diagrama expone la relación esencial entre combinatoria, geometría algebraica y teoría de números, revelando un marco sistemático para el estudio del conteo en politopos.

Diagrama conceptual



Referencias

- [1] Cox, David A y Little, John B y Schenck, Henry K, *Toric Varieties*, Sociedad Americana de Matemáticas, 124, (2024), pp 49-92, 398-443.
- [2] Alexey Beshenov, *Puntos enteros en politopos*, (2016), San Salvador, El Salvador
- [3] Fulton, William, *Introdution to Toric Varieties*, Princeton University Press, 131, (1993).
- [4] Beck, Matthias and Robins, Sinai, *Introdution to Toric Varieties*, Springer, (2020), 59-80.
- [5] Vassallo, Alexandria, *On the volume of the Birkhoff polytope*, Simon Fraser University, (2021).
- [6] Cruz, Felipe de Jesús Zaldívar, *Simetría Especular y su relación con las Variedades Tóricas* UAM-Iztapalapa, (2015).
- [7] Brondsted, Arne, *An introduction to convex polytopes*, Springer Science & Business Media, 90, (2012).
- [8] Bóna, Miklós, *A walk through combinatorics: an introduction to enumeration and graph theory*, World Scientific, (2006).

- [9] Horn, Roger A and Johnson, Charles R, *Matrix analysis*, Cambridge university press, (2012).