



UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y  
MATEMÁTICA  
ESCUELA DE MATEMÁTICA  
DOCTORADO EN MATEMÁTICA



---

DINÁMICA DE GRUPOS KLEINIANOS Y SU EXTENSIÓN A LA FRONTERA  
IDEAL

---

POR:

YOCEMAN ADONY SIFONTES RIVAS

ASESOR EXTERNO:

DR. MANUEL CRUZ LÓPEZ  
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO, MÉXICO

ASESOR INTERNO:

DR. DIMAS NOÉ TEJADA TEJADA  
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

SAN SALVADOR, EL SALVADOR, OCTUBRE DE 2023



# Índice general

<b>1. Grupos kleinianos</b>	<b>7</b>
1.1. Transformaciones de Möbius	7
1.2. Geometría hiperbólica	10
1.2.1. Geometría hiperbólica bidimensional	10
1.2.2. Geometría hiperbólica tridimensional	12
1.2.3. Extensión de Poincaré	13
1.3. Grupos discretos	18
1.4. Sobre grupos kleinianos	21
1.4.1. Propiedades del conjunto límite	23
1.4.2. Sobre grupos no elementales	24
1.4.3. Propiedades del conjunto regular	24
1.4.4. Dominio fundamental	24
1.5. Ejemplos	25
1.5.1. Grupo fuchsiano	25
1.5.2. El grupo modular	27
1.5.3. El grupo de Picard	31
<b>2. Aplicaciones asociadas con acciones de grupos kleinianos</b>	<b>37</b>
2.1. Elementos de dinámica simbólica	37
2.2. Una función en la frontera ideal del plano hiperbólico	41
2.2.1. La construcción de Bowen-Series para un grupo fuchsiano	41
2.2.2. Una función asociada al grupo modular	44
2.3. La construcción para un grupo kleiniano	46
2.4. Una función asociada al grupo de Picard	50
<b>3. Dinámica para <math>f_\Gamma</math>, donde <math>\Gamma</math> es el grupo modular</b>	<b>55</b>

3.1. Resultados dinámicos . . . . .	55
3.2. Estudio numérico de órbitas . . . . .	63
3.3. Conclusiones para $f_\Gamma$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ . . . . .	66
<b>4. Dinámica para <math>f_\Gamma</math>, donde <math>\Gamma</math> es el grupo de Picard</b>	<b>69</b>
4.1. Generalidades . . . . .	69
4.2. Definición para $f_\Gamma$ en la esfera de Riemann . . . . .	70
4.3. Espacio simbólico asociado a $f_\Gamma$ . . . . .	73
4.4. Resultados . . . . .	74
4.4.1. Estudio de órbitas Periódicas . . . . .	74
4.4.2. Dinámica de componentes conexas . . . . .	81
4.4.3. Comportamiento estadístico de las órbitas . . . . .	90
<b>5. Perspectivas</b>	<b>93</b>

# Introducción

En esta investigación, se ha estudiado el comportamiento dinámico de ciertas aplicaciones conformes por pedazos en la esfera de Riemann,  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Las aplicaciones están asociadas con grupos kleinianos o equivalentemente, con subgrupos discretos de

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\},$$

con región de discontinuidad distinta del vacío. Los grupos kleinianos actúan como grupos de isometrías que preservan la orientación en el espacio hiperbólico vía la extensión de Poincaré.

En [BS1] se establece: dado un grupo fuchsiano  $\Gamma$  finitamente generado que actúa en el disco de Poincaré  $\mathbb{D}$ , los autores describen una función continua por pedazos  $f_\Gamma$  definida en la frontera ideal  $\partial\mathbb{D} = \mathbb{S}^1$ , que refleja las propiedades dinámicas de la acción del grupo. Por otro lado, en [R] y [AR] se extiende la construcción de una función continua por pedazos a grupos kleinianos finitamente generados con la propiedad de *Even Corners*<sup>1</sup> y sin cúspide.

En este trabajo se ha analizado el problema de construcción para grupos que contengan alguna cúspide, en particular, para el Grupo de Picard  $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$ , que actúa propia y discontinuamente en el semiespacio superior  $\mathbb{H}^3$ . Este grupo tiene la propiedad de que tiene una sola cúspide y es de covolumen finito. Se ha definido una función conforme por pedazos  $f_\Gamma(z)$  e introducido un sistema simbólico  $\sum_{f_\Gamma}$  para estudiar su dinámica. La estructura de este documento es la siguiente:

CAPÍTULO 1: se estudia la definición de grupo kleiniano, propiedades fundamentales del conjunto límite y regular, para finalmente dar a conocer los ejemplos clásicos: grupos fuchsianos, en especial el grupo Modular y el grupo de Picard, los cuales son ejemplos de grupos con una sola cúspide.

CAPÍTULO 2: en este capítulo se introducen algunos elementos de dinámica simbólica para posteriormente estudiar las construcciones de aplicaciones continuas por pedazos en las fronteras ideales de  $\mathbb{H}^2$  y  $\mathbb{H}^3$  respectivamente, las cuales están asociadas a grupos fuchsianos [BS1] y grupos kleinianos finitamente generados, sin cúspide [AR], finalmente se ajustan y presentan las construcciones previas para grupos kleinianos con alguna cúspide y se define una función asociada al grupo de Picard en  $\widehat{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$ .

CAPÍTULO 3: utilizando elementos de dinámica simbólica, se estudia la función  $f_\Gamma$ , la cual se define por primera vez en [BS1] como una función continua por pedazos asociada al grupo modular; para dicha función se establecen resultados referentes a la naturaleza de sus órbitas periódicas y cómo encontrarlas.

CAPÍTULO 4: finalmente, se estudia la dinámica de una función  $f_\Gamma$  asociada al grupo de Picard, la cual está definida en  $\widehat{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$ , dicha función está inspirada en las construcciones de [BS1], [R] y [AR]. Por otro lado, se demuestran algunas propiedades dinámicas referentes a la existencia, naturaleza de órbitas periódicas y cómo calcularlas; así como también se presentan resultados referentes a la dinámica de las componentes regulares asociadas de  $f_\Gamma$  y un Teorema de clasificación dinámica para  $f_\Gamma$ , el cual sugiere el comportamiento de las funciones asociadas a grupos kleinianos más generales, particularmente, grupos kleinianos con más de una cúspide.

---

<sup>1</sup>Un grupo kleiniano  $\Gamma$  actuando sobre  $\mathbb{H}^3$  tiene la propiedad *even corners* si existe un poliedro fundamental  $\mathcal{F}$  para el cual  $\Gamma(\partial\mathcal{F}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\partial\mathcal{F})$  es una unión de planos geodésicos. La propiedad *Even corners* significa que los planos que contienen las caras del poliedro hiperbólico están incluidos en la teselación generado por la acción del grupo.



# Capítulo 1

## Grupos kleinianos

La terminología de grupo kleiniano y fuchsiano fue introducida por Henri Poincaré (1854-1912). Poincaré estudió la ecuación diferencial compleja

$$x''(t) + p(t)x(t) = 0,$$

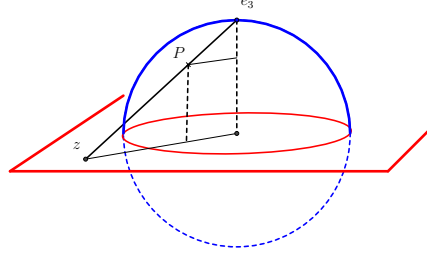
descubriendo cierto grupo de transformaciones lineales con coeficientes reales ó complejos, como soluciones locales a las que llamó grupo fuchsianos y kleinianos respectivamente. Clásicamente, los grupos kleinianos han sido estudiados por su conexión con superficies de Riemann y en los últimos años han cobrado fuerza en el estudio de variedades hiperbólicas de dimensión 3. En este trabajo estudiaremos aplicaciones asociadas a grupos kleinianos con cúspide, por lo cual hacemos un breve recorrido por esta rama de la matemática, estudiando la definición de lo que es grupo kleiniano, el dominio fundamental asociado y los ejemplos clásicos de grupos kleinianos como lo son: los grupo fuchsianos, particularmente el grupo modular y grupos kleinianos con cúspide, en los cuales destacamos como ejemplo especial al grupo de Picard; para mayores detalles sobre grupos kleinianos, consultar [Mar], [MB] o bien [MT].

### 1.1. Transformaciones de Möbius

**Definición 1.1.1.** *Los puntos del plano complejo junto con  $\infty$  forman el plano complejo extendido, denotado por  $\widehat{\mathbb{C}}$ .*

La aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{S}^2 - \{e_3\} &\longmapsto \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right). \end{aligned}$$



**Figura 1.1:** Proyección Estereográfica.

Junto con

$$\pi(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

a la cual se le llamará proyección estereográfica, permiten establecer un homeomorfismo entre la esfera y el plano complejo extendido. Ver [MT].

**Definición 1.1.2.** Las transformaciones de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$ , se les llama transformaciones de Möbius.

Es posible extender las transformaciones de Möbius a la esfera de Riemann de la siguiente manera:

**Definición 1.1.3.** Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una transformación de Möbius, se define  $\hat{f} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Si  $c \neq 0$ , entonces

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & z \neq -\frac{d}{c}, z \neq \infty \\ \infty, & z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & z = \infty. \end{cases}$$

Si  $c = 0$ , entonces

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{d}, & z \neq \infty \\ \infty & z = -\frac{d}{c}. \end{cases}$$

El conjunto de todas las transformaciones de Möbius definidas en la esfera de Riemann tales que  $ad - bc = 1$  se conoce como el grupo de Möbius y se denota por  $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$ . Si  $ad - bc = k \neq 0$ , la transformación

$$z \mapsto \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{k}}}{\frac{c}{\sqrt{k}}z + \frac{d}{\sqrt{k}}}$$

cumple

$$\frac{a}{\sqrt{k}} \frac{d}{\sqrt{k}} - \frac{b}{\sqrt{k}} \frac{c}{\sqrt{k}} = 1.$$

Por otro lado, es posible identificar a las transformaciones de Möbius por matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1.$$

A este grupo de matrices se le denota por  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ . El centro de este grupo consiste de las matrices  $\pm I_d$ . Al cociente de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  sobre su centro  $\pm I_d$  se le llama su proyectivización, este grupo se denota por  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , el cual coincidirá con el grupo de automorfismos en la esfera de Riemann.

Una primera clasificación es por medio de los puntos fijos, es decir:

$$\frac{az + b}{cz + d} = z,$$

de donde

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}; \quad c \neq 0.$$

La expresión  $a + d$  es la traza de la transformación y la denota por  $\mathrm{Tr}(T)$ .

**Definición 1.1.4.** *Se dice que dos transformaciones de Möbius  $S$  y  $T$  son conjugadas si existe una transformación  $U$  tal que  $T = USU^{-1}$ .*

**Definición 1.1.5.** *Una transformación  $T$  se dice que es parabólica:*

- $T$  es conjugada a  $z \rightarrow z + 1$ .
- $T$  tiene exactamente un punto fijo en la esfera.
- $\mathrm{Tr}(T) = \pm 2$  y  $T \neq \mathrm{id}$ .

*Una transformación  $T$  se dice que es elíptica:*

- $T$  es conjugada  $z \rightarrow e^{2i\theta}z$ ,  $2\theta \neq 2\pi$ .
- $\mathrm{Tr}(T) \in (-2, 2)$ .
- $T$  tiene exactamente dos puntos fijos y la derivada de  $T$  tiene norma 1 en cada uno de ellos.

*Una transformación  $T$  se dice que es loxodrómica :*

- $T$  es conjugada  $z \rightarrow \lambda z$ ,  $|\lambda| > 1$ .
- $\mathrm{Tr}(T) \in \mathbb{C} - \{[-2, 2]\}$ .
- $T$  tiene exactamente dos puntos fijos, uno atractor y uno repulsor.

## 1.2. Geometría hiperbólica

### 1.2.1. Geometría hiperbólica bidimensional

Para más detalles sobre geometría hiperbólica bidimensional, consultar [KS] y [Mar].

**Definición 1.2.1.** ■ *El plano hiperbólico: el modelo para el semiplano superior es*

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\},$$

*equipado con la métrica riemanniana*

$$ds = \frac{|dz|}{\Im(z)}.$$

■ *El disco de Poincaré es:  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , equipado con la métrica*

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

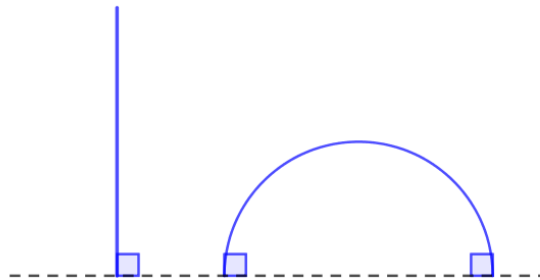
El siguiente teorema, puede consultarse en [KS].

**Teorema 1.2.1.** *La distancia hiperbólica  $\rho(z_1, z_2)$  entre puntos  $z_1, z_2$  en  $\mathbb{H}^2$  es*

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}.$$

Entre los hechos más importantes de los modelos bidimensionales, se tienen

- Pueden verse como el espacio euclidiano, para distancias arbitrariamente pequeñas.
- Ambos modelos son un espacio métrico completo.
- Las geodésicas o curvas que minimizan la distancia son las rectas verticales o semicircunferencias ortogonales en el modelo del semiplano y los diámetros o arcos de circunferencias ortogonales en el modelo del disco.



**Figura 1.2:** Geodésicas en  $\mathbb{H}^2$ .

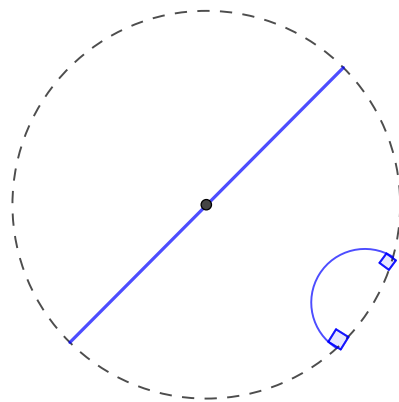


Figura 1.3: Geodésicas en  $\mathbb{D}$ .

**Observación.** Los modelos del semiplano y el disco son equivalentes mediante la aplicación de Cayley.

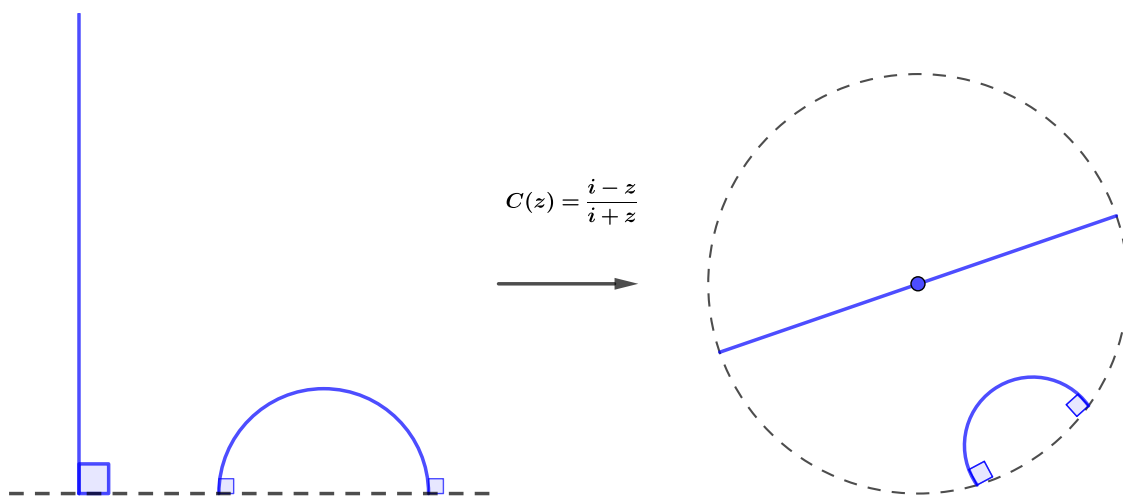


Figura 1.4: Equivalencia bidimensional.

**Teorema 1.2.2.** *El grupo de isometrías que preserva la orientación en  $\mathbb{H}^2$  puede ser identificado por*

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Por otro lado, en el modelo del disco

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \mid a, c \in \mathbb{C}, |a|^2 - |c|^2 = 1 \right\}.$$

Para más detalles, ver [KS].

### 1.2.2. Geometría hiperbólica tridimensional

Para más detalles sobre Geometría hiperbólica tridimensional, consultar [Mar] y [MT].

**Definición 1.2.2.** ■ *El semiespacio superior es*

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) : z \in \mathbb{C}, t > 0\},$$

*equipado con la métrica*

$$ds^2 = \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}.$$

■ *El modelo de la bola es  $\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$  equipado con la métrica  $ds = \frac{2|dx|}{1 - |x|^2}$ .*

**Definición 1.2.3.** *La distancia hiperbólica  $\rho_{\mathbb{H}^3}(P, Q)$  entre  $P = (z_1, t_1)$  y  $Q = (z_2, t_2)$  en  $\mathbb{H}^3$  cumple*

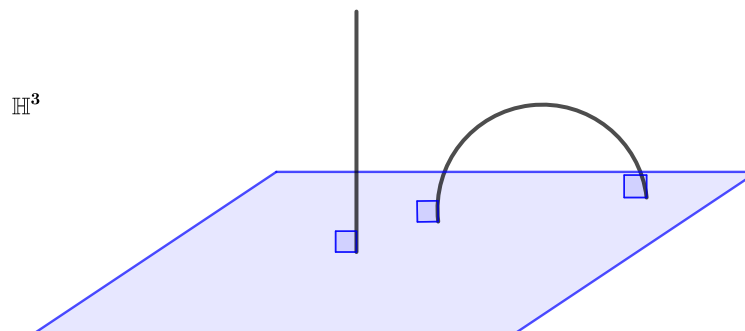
$$\cosh \rho_{\mathbb{H}^3}(P, Q) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2 + |t_1 - t_2|^2}{2t_1 \cdot t_2},$$

*particularmente*

$$\rho_{\mathbb{H}^3}((0, t_1), (0, t_2)) = \left| \ln \frac{t_1}{t_2} \right|.$$

Entre los hechos más importantes en el espacio hiperbólico se tienen:

- El espacio hiperbólico puede verse como el espacio euclidiano para distancias arbitrariamente pequeñas.
- El espacio hiperbólico es un espacio métrico completo.
- Las geodésicas o curvas que minimizan la distancia son las rectas verticales o semicircunferencias ortogonales al plano  $xy$ .



**Figura 1.5:** Geodésicas del espacio hiperbólico.

Una demostración del siguiente resultado, puede consultarse en [MT].

**Teorema 1.2.3.** *El grupo de isometrías que preserva la orientación en  $\mathbb{H}^3$  puede ser identificado por*

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}.$$

### 1.2.3. Extensión de Poincaré

El objetivo será definir el análogo de una transformación de Möbius en  $\mathbb{C}$  o  $\widehat{\mathbb{C}}$ , para el espacio hiperbólico. La clave está en considerar las transformaciones de Möbius como una combinación de transformaciones elementales y luego extenderlas a  $\mathbb{R}^3$ , por último considerar una transformación de Möbius como una composición de transformaciones elementales extendidas; dicha extensión se conoce como la extensión de Poincaré.

Si  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , es una transformación de Möbius con  $ad - bc = 1$ , nótese que:

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d} \\ &= \frac{-\frac{ad}{c} + b}{cz + d} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{-1}{c(cz + d)} + \frac{a}{c}, \text{ ya que } ad - bc = 1, \end{aligned}$$

de donde se deduce que toda transformación de Möbius se puede escribir como una composición de transformaciones elementales:

A. Traslaciones:  $T_b(z) = z + b$ ;  $b \in \mathbb{C}$ .

B. Rotaciones:  $R_a(z) = az$ ;  $|a| = 1$ ,  $\theta = \arg(a)$ .

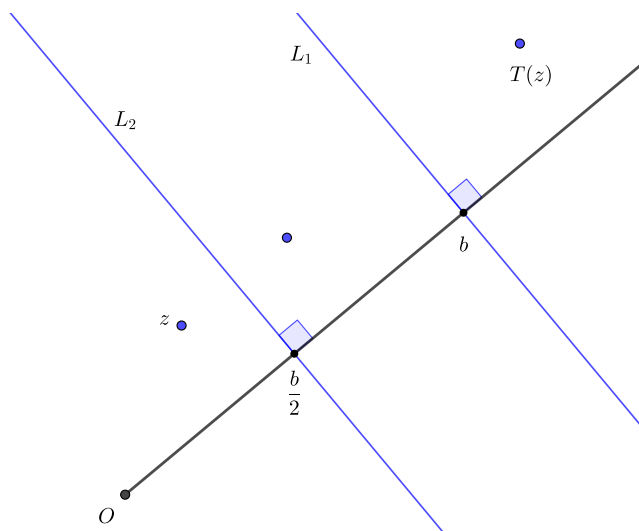
C. Homotecias:  $H_\lambda(z) = \lambda z$ ;  $0 < \lambda$ ,  $\lambda \neq 1$ .

D. Inversiones complejas:  $I(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

A su vez, dichas transformaciones elementales se pueden escribir como composición de reflexiones respecto de rectas o circunferencias en el plano, tal como se muestra en las siguientes secciones.

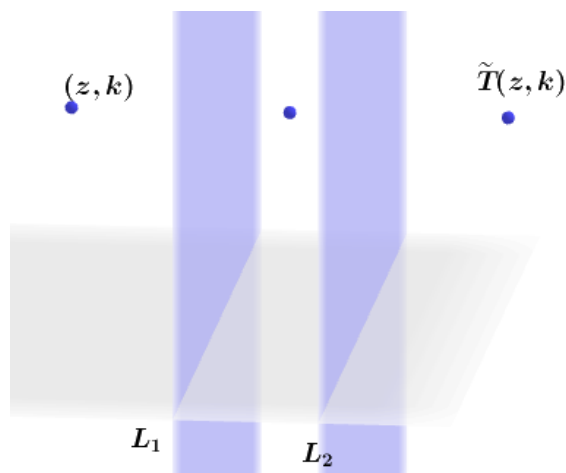
## Traslación

Considere un punto  $z \in \mathbb{C}$ , se traza la recta que pasa por el origen y el punto  $b$ , luego se trazan las rectas  $L_1$  y  $L_2$  ortogonales en  $b$  y en  $\frac{b}{2}$ , luego la traslación  $z + b$ , puede escribirse como  $R_{L_1} \circ R_{L_2}$ , es decir, mediante la composición de las reflexiones respecto de la recta  $L_2$  y luego la reflexión respecto de la recta  $L_1$ .



**Figura 1.6:** Traslación  $T(z) = z + b$ .

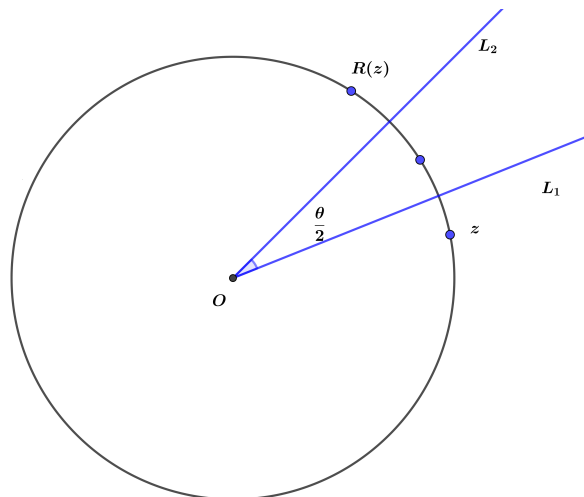
Ahora, si se extiende la idea anterior al espacio, se tendrá que una traslación sería la composición de dos reflexiones, pero respecto de dos planos: los planos determinados por las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , tal como se indica en la siguiente figura



**Figura 1.7:**  $\tilde{T}(z, k) = (z + b, k)$ .

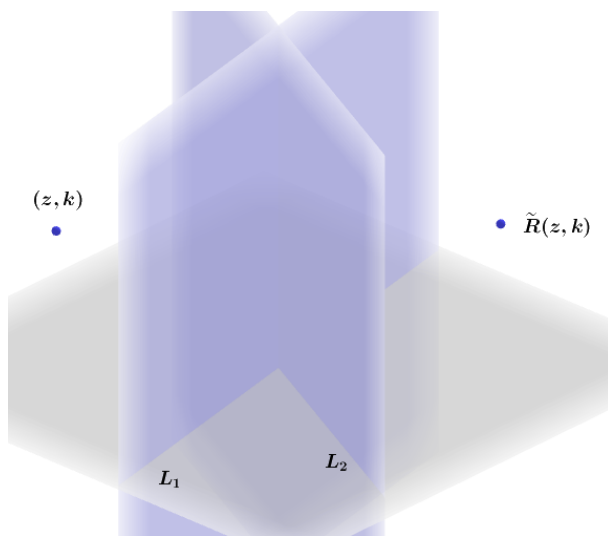
## Rotación

La rotación  $R_a(z) = az$  también puede escribirse como la composición de dos reflexiones, para ello se considera el círculo unitario y un par de rectas que se cortan en el origen con un ángulo  $\frac{\theta}{2}$  entre ellas, donde  $\theta = \arg(a)$ , entonces, la rotación puede escribirse como la  $R_a(z) = R_{L_2} \circ R_{L_1}$ .



**Figura 1.8:** Rotación  $R_a(z) = az$ .

En completa analogía al caso bidimensional, esta noción de rotación se extiende al espacio, con la diferencia que ahora será la composición de dos reflexiones respecto de dos planos que forman un ángulo de  $\frac{\theta}{2}$ .

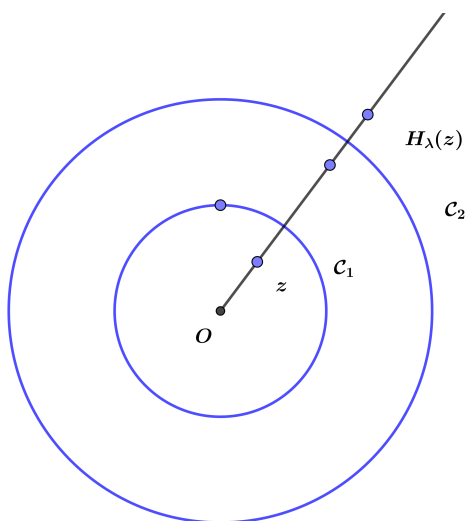


**Figura 1.9:**  $\tilde{R}_a(z, k) = (az, k)$

## Homotecia

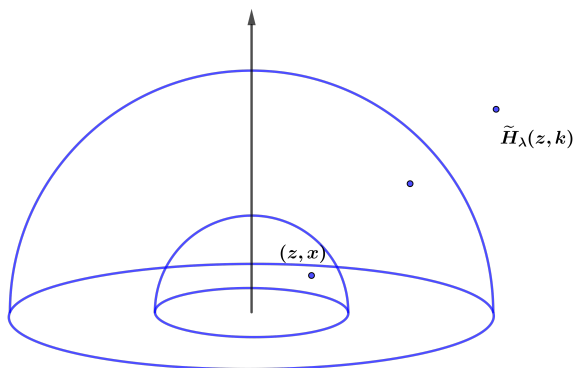
Se define la homotecia  $H_\lambda(z) = \lambda z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  y se consideran dos circunferencias concéntricas  $C_1$  y  $C_2$ , por tanto la transformación  $H_\lambda(z)$  es una composición de las reflexiones respecto de las dos circunferencias concéntricas, es decir:

$$H_\lambda(z) = R_{C_2} \circ R_{C_1}.$$



**Figura 1.10:** Homotecia  $H_\lambda(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Para extender dicha transformación al espacio, se consideran dos casquetes concéntricos y al reflejar respecto de los dos casquetes, tal como se indica en la siguiente figura



**Figura 1.11:**  $\tilde{H}_\lambda(z, k) = (\lambda z, |\lambda|k)$ .

## Inversión

Finalmente la inversión compleja  $I(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  está dada por la reflexión del eje real (conjugación) compuesta con la inversión en  $\mathbb{S}^1$ , por tanto para el caso del semiespacio se tiene una extensión de la siguiente manera

$$\tilde{I}_*(z, k) = \left( \frac{\bar{z}}{|z|^2 + k^2}, \frac{k}{|z|^2 + k^2} \right).$$

## Extensión de una transformación de Möbius

La transformación  $z \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc = 1$ , se puede extender a  $\mathbb{H}^3$  considerando la transformación como una composición de las respectivas extensiones de las transformaciones elementales.

$$(z, k) \mapsto \widehat{f}(z, k) = \left( -\frac{\overline{z + d/c}}{c^2(|z + d/c|^2 + k^2)} + \frac{a}{c}, \frac{k}{|c|^2(|z + d/c|^2 + k^2)} \right), \quad c \neq 0.$$

y

$$(z, k) \mapsto \widehat{f}(z, k) = \left( \frac{a}{d}(z + b/a), \left| \frac{a}{d} \right| k \right), \quad c = 0.$$

Si  $k = 0$ , entonces  $\widehat{f}(z, k) = (f(z), 0)$  por tanto  $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$  deja invariante a  $\widehat{\mathbb{C}}$  como subconjunto de  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ , de esto se puede concluir que se tiene una acción bien definida de  $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$  sobre  $\mathbb{H}^3$  por isometrías. Más aún:

**Teorema 1.2.4.**

$$\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}}) = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3).$$

Para una demostración ver [MT].

La extensión de Poincaré descrita en las secciones previas, permite identificar cualquier subgrupo de isometrías que preserva la orientación como un subgrupo de Transformaciones de Möbius, las cuales operacionalmente son mucho más sencillas de manejar e interpretar geoméricamente, esto permitirá en las siguientes secciones entender mejor la definición de grupo kleiniano.

## 1.3. Grupos discretos

El concepto de grupo discreto puede ser muy general, pero el interés en este trabajo son subgrupos discretos asociados a transformaciones de Möbius.

**Definición 1.3.1.** *Un grupo  $\Gamma$  de transformaciones de Möbius es discreto si no existe sucesión de elementos distintos que converja a la identidad.*

**Definición 1.3.2.** *Un grupo  $\Gamma$  se dice elemental si y solo si éste preserva un punto o un par de puntos en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , o un punto en  $\mathbb{H}^3$ . Equivalentemente se dice que es elemental si y solo si dos elementos de orden infinito tienen un punto fijo común.*

En general, es difícil determinar cuando un grupo generado por un conjunto de elementos es discreto. Una herramienta útil es la siguiente

**Teorema 1.3.1. Desigualdad de Jorgensen:** *Si  $\Gamma = \langle A, B \rangle$  es discreto entonces*

$$|\text{Tr}^2(A) - 4| + |\text{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geq 1.$$

*excepto en los siguiente tres casos, que son grupos elementales*

- I.  $\Gamma$  cíclico o una extensión abeliana de un grupo y  $|\text{Tr}^2(A) - 4| < 1$ .

- II.  $A$  es loxodrómica o elíptica con  $|\text{Tr}^2(A) - 4| < \frac{1}{2}$  mientras que  $B$  intercambia los puntos fijos de  $A$ .
- III.  $A$  es parabólica mientras  $B$  es parabólica o elíptica de orden 2, 3, 4 ó 6 y fija los puntos fijos de  $A$ .

*Demostración.* Supóngase que

$$\mu = |\text{Tr}^2(A) - 4| + |\text{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| < 1$$

para  $A, B \neq \text{Id}$ . Se construye

$$T_1 = T_0 A T_0^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}; \quad B = T_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}.$$

**Caso I:** si  $A(z)$  es parabólica, es conjugada a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + a_0c_0 + c_0^2 & 1 - a_0c_0 - a_0^2 \\ c_0^2 & 1 - a_0c_0 \end{pmatrix}$$

y además

$$T_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_{n-1}c_{n-1} & a_{n-1}^2 \\ -c_{n-1}^2 & 1 + a_{n-1}c_{n-1} \end{pmatrix}$$

de donde  $c_n = -c_0^{2^n}$ ,  $|c_n| = \mu^{2^{n-1}} < 1$ .

Por otro lado:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 - a_n c_n \\ a_{n+1} - 1 &= -a_n c_n \\ |a_{n+1} - 1| &= |c_n| |a_n| = |c_n| |1 - a_{n-1} c_{n-1}| \\ &\leq |c_n| (1 + |a_{n-1}|) \\ &\leq |c_n| (n + a_0) \end{aligned}$$

y de manera similar

$$|d_{n+1} - 1| \leq |c_n| (n + |a_0|), \quad |b_{n+1} - 1| = |a_n^2 - 1|.$$

Así

$$c_n = 0, \quad \lim a_n = \lim d_n = \lim b_n = 1.$$

Por tanto  $\lim T_n = A$ .

**Caso II:**

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & 1/\rho \end{pmatrix}; \quad |\rho| \geq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2 &= -b_0c_0(\rho - \rho^{-1})^2, \\ (\rho - \rho^{-1})^2 &= \text{Tr}^2(A) - 4 \end{aligned}$$

y en particular  $|\rho - \rho^{-1}|^2 \leq \mu < 1$  y se construye

$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} a_nd_n\rho - b_nc_n\rho^{-1} & a_nb_n(\rho^{-1} - \rho) \\ c_nd_n(\rho - \rho^{-1}) & a_nd_n\rho^{-1} - b_nc_n\rho \end{pmatrix}.$$

La idea es demostrar que  $b_nc_n$  es una sucesión decreciente para todo  $n$ , para el caso  $n = 1$

$$\begin{aligned} b_1c_1 &= |b_0c_0|(1 + b_0c_0)|(\rho - \rho^{-1})^2| \\ &= |b_0c_0||\text{Tr}^2(A) - 4 - \text{Tr}^2(ABA^{-1}B^{-1}) + 2| \\ &= |b_0c_0|\mu \\ &= |b_0c_0|, \quad \text{ya que se supuso } \mu < 1. \end{aligned}$$

Por tanto, mediante un proceso inductivo se tiene

$$|b_nc_n| \leq |b_0c_0|\mu^n.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= a_n(\rho^{-1} - \rho) \\ \frac{c_{n+1}}{c_n} &= d_n(\rho^{-1} - \rho). \end{aligned}$$

De donde se obtiene que  $a_n = d_n = 0$  siempre que  $b_{n+1} = c_{n+1} = 0$  mientras que  $b_n \neq 0$  y  $c_n \neq 0$ . Por tanto  $\text{Tr}(T_n) = 0$ .

**Otros casos para el caso II:**

**Caso II a):**  $b_nc_n \neq 0 \forall n$ . La sucesión  $\{b_nc_n\}$  es estrictamente decreciente y de elementos distintos, y puesto que  $\lim a_nd_n = 1$  de la expresión para  $T_{n+1}$  se desprende que  $\lim a_n = \rho$  y  $\lim d_n = \rho^{-1}$  y por tanto

$$\begin{aligned} \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \rho(\rho^{-1} - \rho) \\ \lim \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \rho^{-1}(\rho - \rho^{-1}). \end{aligned}$$

Si  $A$  es elíptica, entonces  $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \rightarrow |\rho - \rho^{-1}| < 1$  y  $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \rightarrow |\rho - \rho^{-1}| < 1$  de donde

$$\lim b_n = \lim c_n = 0$$

Consecuentemente  $\lim T_n = A$ . Contradiciendo el hecho de ser discreto.

**Caso II b):** Si  $b_nc_n = 0$ ,  $n \geq N$ . Para  $n \geq N$ ,  $A$  y  $T_n$  comparten un punto fijo.

1. Si  $A$  es elíptica: su orden es mayor que 6, ya que  $\mu < 1$  implica  $\sin \theta < \frac{1}{2}$  ya que  $\text{Tr}^2(A) - 4 = 4 \sin^2 \theta$  y  $A$  tiene la forma  $e^{2i\theta} z$ . Si  $A$  y  $T_n$  tiene un único punto fijo entonces  $\Gamma$  es no discreto. Una contradicción.
2. Si  $A$  es loxodrómica y comparten exactamente un único punto fijo con  $T_n$  entonces  $\langle A, T_n \rangle$  no puede ser discreto.

Por otro lado, si  $n \geq N$ ,  $A$  y  $T_n$  tiene el mismo par de puntos fijos  $\{0, \infty\}$ .

1. Si  $N = 0$ ,  $\Gamma = \langle A, B \rangle$  es un grupo elemental discreto.
2. Si  $N = 1$ , entonces  $a_0 = d_0 = 0$  y  $\Gamma$  es elemental.
3. Supóngase que  $N \geq 2$  así  $T_{N-1}$  es conjugado a  $A$ . Entonces  $\text{Tr}(T_{N-1}) = \text{Tr}(A) = 0$ . Pero entonces  $\mu \geq 4$  la contradiciendo suposición inicial.

■

**Corolario 1.3.1.** *Un grupo no elemental  $\Gamma$  es discreto si y sólo si todo subgrupo con dos generadores es discreto.*

Si  $\Gamma$  preserva un disco en  $\mathbb{S}^2$ , entonces  $\Gamma$  es discreto si y solo si todo subgrupo de un generador es discreto, esto es, si y solo si no hay transformaciones elípticas de orden finito.

## 1.4. Sobre grupos kleinianos

**Definición 1.4.1.** *Supóngase que un grupo  $\Gamma$  actúa por homeomorfismos sobre un espacio topológico  $X$ . Entonces  $\Gamma$  actúa propia y discontinuamente si para todo subconjunto compacto  $K \subset X$ , el conjunto  $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$  es finito.*

**Definición 1.4.2.** *Un grupo kleiniano  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de isometrías que preserva la orientación en el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ .*

Puesto que las  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ , un grupo kleiniano también puede interpretarse como un grupo discreto transformaciones de Möbius, al cual se le impondrá una condición adicional: que tenga dominio de discontinuidad no vacío.

**Definición 1.4.3. Órbita de un punto:** *Sea  $\zeta \in \mathbb{C}$  y  $\Gamma$  un grupo kleiniano*

$$\text{Órb}(\zeta) = \{\gamma(\zeta) \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

Si  $\Gamma$  no tiene elementos de orden finito, este actúa libremente sobre  $\mathbb{H}^3$  y el cociente  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  será una variedad hiperbólica completa.

**Lema 1.4.1.** *Si  $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  actúa propia y discontinuamente sobre un espacio topológico  $X$ , entonces  $\Gamma$  es discreto.*

*Demostración.* Si  $\Gamma$  no fuera discreto, entonces existe una sucesión  $\{\gamma_n\} \in \Gamma$  tal que  $\gamma_n \rightarrow I$ , si se elige  $K$  como la bola con clausura compacta, se tendría que  $\gamma_n K \cap K \neq \emptyset$  para infinitos elementos  $\gamma_n$ . ■

El recíproco del lema anterior es falso, por ejemplo si se considera  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$ <sup>1</sup>, las transformaciones de Möbius con coeficientes los enteros gaussianos es claramente discreto, sin embargo, las  $\Gamma$ -órbitas se acumulan sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ , esto puede verse en la órbita de 0, bajo el subgrupo  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , las cuales consisten de los números racionales extendidos  $\mathbb{Q} \cup \infty$ ; sin embargo, otra manera de referirnos a grupos kleinianos es mediante el siguiente teorema:

**Teorema 1.4.1.** *Un subgrupo  $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  con dominio de discontinuidad no vacío es Kleiniano si y solo si éste actúa propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{H}^3$ .*

## Conjunto regular y conjunto límite

El grupo de Picard o  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$ , muestra que la acción sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  puede no ser propia y discontinua, esto sugiere la siguiente definición

**Definición 1.4.4.** *El conjunto regular u ordinario  $\Omega = \Omega(\Gamma) \subset \widehat{\mathbb{C}}$  de un grupo kleiniano  $\Gamma$  es el abierto más grande de  $\widehat{\mathbb{C}}$  para el cual la acción de  $\Gamma$  es propia y discontinua. El complemento de dicho conjunto es el conjunto límite del grupo kleiniano  $\Gamma$  y se denota  $\Lambda = \lambda(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}} - \Omega$ , equivalentemente: Un punto  $\zeta \in \widehat{\mathbb{C}}$  es un punto límite de un grupo kleiniano  $\Gamma$  si existe  $\xi \in \widehat{\mathbb{C}}$  tal que*

$$\lim T_n(\xi) = \zeta$$

donde  $\{T_n\}$  es una sucesión infinita de elementos de  $\Gamma$ .

**Definición 1.4.5.** *Un grupo kleiniano  $\Gamma$  se dirá elemental si a lo sumo tiene 2 puntos límites. En caso contrario se dirá que el grupo es no elemental.*

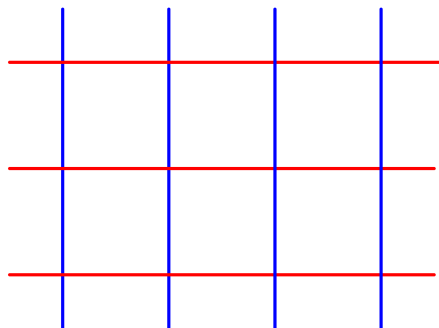
El siguiente resultado caracteriza los grupos elementales. Ver [Mar].

**Proposición 1.4.1.** *Un grupo kleiniano, no trivial, elemental y libre de torsión  $\Gamma$  es conjugado a uno de los siguientes.*

- Un grupo cíclico parabólico,  $\Gamma = \langle z + 1 \rangle$ .
- Un grupo abeliano parabólico de rango 2,  $\Gamma = \langle z + 1, z - \alpha \rangle$ , con  $\Im(\alpha) > 0$ .
- Un grupo cíclico loxodrómico  $\Gamma = \langle \lambda z \rangle$  con  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ .

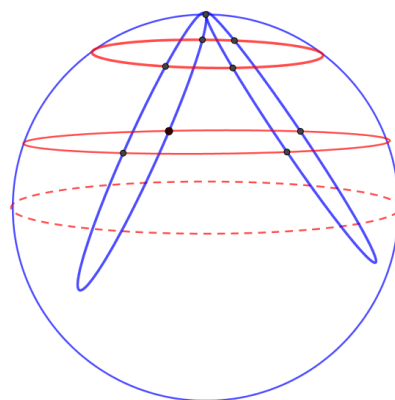
**Ejemplo 1.** El grupo  $\Gamma = \langle z + 1 \rangle$  tiene como órbita  $T^n(z) = z + n$ , por tanto todas las órbitas se estarán acumulando en el infinito. La siguiente figura representa un par de familias de rectas mutuamente ortogonales, la cual queda invariante como familia mediante la acción de  $\Gamma$ .

<sup>1</sup>Este grupo se conoce como el grupo de Picard.



**Figura 1.12:** Familia invariante bajo la acción de  $\Gamma$ .

En la esfera de Riemann la familia toma la forma



**Figura 1.13:** Familia invariante bajo la acción de  $\Gamma$ .

### 1.4.1. Propiedades del conjunto límite

Para más detalles del conjunto límite de un grupo kleiniano, puede consultarse [Mar] o [MT].

- La  $\Gamma$  órbita de cualquier  $\zeta \in \Lambda(\Gamma)$  es denso en  $\Lambda(\Gamma)$ .
- $\Lambda(\Gamma)$  es la clausura del conjunto de puntos fijos de elementos loxodrómicos o parabólicos.
- La  $\Gamma$  órbita de cualquier punto en  $\mathbb{H}^3 \cup \widehat{\mathbb{C}}$  se acumulan en  $\Lambda(\Gamma)$ .
- $\Lambda(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}}$  o tiene interior vacío.<sup>2</sup>
- Si  $\Gamma'$  tiene índice finito en  $\Gamma$ , o si  $\Gamma'$  es un subgrupo normal en  $\Gamma$ , entonces  $\Lambda(\Gamma') = \Lambda(\Gamma)$ .

<sup>2</sup>Esta afirmación sugiere lo que se conoce como la conjetura de Ahlfors: Si  $\Lambda \neq \widehat{\mathbb{C}}$ , su medida de Lebesgue es 0.

### 1.4.2. Sobre grupos no elementales

A diferencia de los grupos elementales, para los cuales se tiene una completa caracterización, los grupos no elementales son muy difíciles de tratar, el siguiente resultado describe algunas propiedades, para una demostración ver [Mar] o [MT]

**Proposición 1.4.2.** *Un grupo kleiniano no elemental  $\Gamma$  satisface lo siguiente*

- a.  $\Gamma$  contiene un elemento loxodrómico.
- b. Para cualquier elemento loxodrómico  $\gamma \in \Gamma$  existe otro loxodrómico  $\phi$  tal que

$$\text{Fix}(\gamma) \cap \text{Fix}(\phi) = \emptyset.$$

### 1.4.3. Propiedades del conjunto regular

Entre algunas propiedades el conjunto regular de un grupo kleiniano:

- $\Omega(\Gamma)$  tiene 1, 2 o infinitas componentes conexas.
- Cada componente conexa de  $\Omega(\Gamma)$  es simplemente conexa o infinitamente conexa.
- Si existen al menos componente  $\Gamma$ -invariantes,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , entonces cada componente es simplemente conexa y  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ .
- Si existe solamente una componente  $\Gamma$ -invariante  $\Omega_0$ , entonces el resto de componentes son simplemente conexas.

Para más detalles sobre el conjunto regular, ver [Mar].

### 1.4.4. Dominio fundamental

Intuitivamente, se entenderá por dominio fundamental asociado a un grupo kleiniano, a un poliedro hiperbólico convexo con el que se puede teselar ya sea el semiespacio superior o la bola hiperbólica mediante la acción del grupo kleiniano.

**Definición 1.4.6.** *Un conjunto convexo  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{H}^3$  limitado por una cantidad numerable de planos hiperbólicos es llamado un poliedro fundamental para un grupo kleiniano  $\Gamma$  si cumple:*

- $\cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{F}) = \mathbb{H}^3$ .
- $\gamma(\text{Int}\mathcal{F}) \cap \text{Int}\mathcal{F} = \emptyset$  para cualquier  $\gamma \in \Gamma$ .
- Para cada cara  $S$  de  $\mathcal{F}$ , existe otra  $S'$  y un elemento  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma(S) = S'$ .
- Para cualquier conjunto compacto  $K \in \mathbb{H}^3$ , el conjunto  $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\mathcal{F}) \cap K \neq \emptyset\}$  es finito.

Un elemento  $\gamma$  que transforma una cara de un poliedro fundamental a otra cara del poliedro tal como indica la tercera condición de la definición anterior, se le llamará **transformación que empareja caras**<sup>3</sup>.

**Definición 1.4.7.** Para un grupo kleiniano  $\Gamma$ , se define el poliedro de Dirichlet con centro  $A \in \mathbb{H}^3$  como

$$\mathcal{P}_A = \{P \in \mathbb{H}^3 \mid d(P, A) \leq d(P, \gamma(A)) \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

**Proposición 1.4.3.** El poliedro de Dirichlet es un poliedro fundamental.

## 1.5. Ejemplos

### 1.5.1. Grupo fuchsiano

Por definición, un grupo fuchsiano es un grupo discreto de isometrías de  $\mathbb{H}^2$ , pensando  $\mathbb{H}^2$  como un plano en  $\mathbb{H}^3$ , se tiene que cualquier isometría del plano se extiende a una isometría del espacio, por tanto cualquier grupo fuchsiano  $\Gamma$  puede ser considerado como un tipo especial de un grupo kleiniano y la noción de dominio fundamental puede adecuarse, el cual vendría a ser polígono fundamental. Si se está trabajando en el modelo de la bola hiperbólica, se puede pensar el plano del Ecuador como  $\mathbb{H}^2$ . Si  $\Gamma$  es un grupo fuchsiano y se elige su polígono fundamental  $\mathcal{F}_\Gamma$  para la acción en el plano y luego se extiende cada uno de sus lados a un plano en el espacio hiperbólico, dicha extensión formará un poliedro fundamental para la acción del grupo en  $\mathbb{H}^3$ .

### Dominio fundamental para un grupo fuchsiano

La siguiente definición aplica para el caso de un grupo fuchsiano  $\Gamma$ .

**Definición 1.5.1.** Una región cerrada  $F \subset \mathbb{H}^2$  se dice que es un dominio fundamental para un grupo fuchsiano  $\Gamma$  si

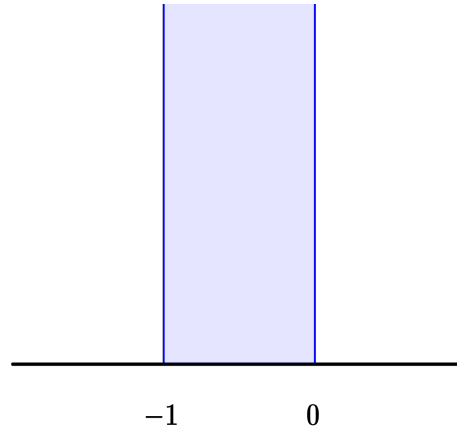
a)  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{H}^2$ ,

b)  $F^\circ \cap \gamma(F^\circ) = \emptyset \forall \gamma \in \Gamma - \{Id\}$ .

**Ejemplo 2.** Sea  $\Gamma$  el grupo cíclico generado por la transformación  $z \rightarrow z + 1$ , entonces la franja vertical que se muestra en la siguiente figura es un dominio fundamental para  $\Gamma$ .

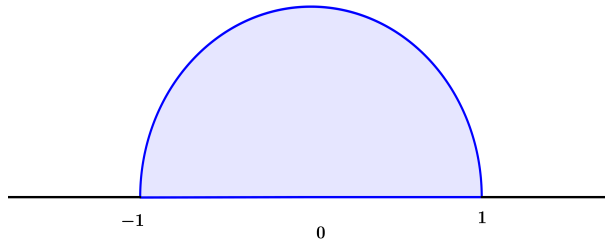
---

<sup>3</sup>El espacio que resulta del emparejamiento de las caras del poliedro fundamental es lo que se conoce como una variedad hiperbólica  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ .



**Figura 1.14:** Dominio fundamental para  $\langle z + 1 \rangle$ .

**Ejemplo 3.** Sea  $\Gamma$  el grupo cíclico generado por la transformación  $z \rightarrow \frac{-1}{z}$ . El dominio fundamental está dada por la semicircunferencia unitaria, centrada en 0.



**Figura 1.15:** Región fundamental para  $\langle -\frac{1}{z} \rangle$ .

Nótese que las dos condiciones del dominio fundamental se cumplen, ya que al tomar la unión de las imágenes del semidisco interior por los generados del grupo se obtiene todo el semiplano superior y si  $|z| < 1$ , entonces  $-1/z$  estará fuera del semidisco y por tanto la única posibilidad de que un punto del interior quede fijo, es que la transformación sea la identidad.

## Dominio de Dirichlet

Sea  $\Gamma$  un grupo fuchsiano arbitrario y  $P \in \mathbb{H}^2$  tal que no es punto fijo de ningún elemento de  $\Gamma$  distinto de la identidad.

**Definición 1.5.2.** *El dominio de Dirichlet de  $\Gamma$  centrado en  $P$  es*

$$D_P(\Gamma) := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, P) \leq \rho(z, \gamma(P)), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Para cada  $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  fijo

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, P) \leq \rho(z, \gamma(P))\}$$

es el conjunto de todos los puntos  $z$  tales que en la métrica hiperbólica están más cercanos a  $P$  que a  $\gamma(P)$ .

### 1.5.2. El grupo modular

El grupo modular

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\},$$

visto como grupo de matrices o también

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\},$$

como grupo de transformaciones de Möbius. Es un grupo de gran importancia por sus conexiones en diversas áreas de la matemática como por ejemplo: la Teoría de Números.

**Proposición 1.5.1.** *El grupo modular está generado por  $\langle S, T \rangle$ , donde*

$$S(z) = \frac{-1}{z} \quad y \quad T(z) = z + 1.$$

**Observación.** Para efectos operacionales, se consideran las transformaciones  $S(z)$  y  $T(z)$  en su forma matricial, por tanto las matrices  $S$  y  $T$  cumplen lo siguiente:

a.  $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I_2$

b.  $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , luego

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ es decir, la matriz } T \text{ tiene orden infinito.}$$

c.  $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , donde  $(ST)^3 = -I_2$ , entonces la matriz  $ST$  tiene orden 6.

*Demostración.* Sea  $\Gamma = \langle S, T \rangle$  el subgrupo del grupo modular generado por  $S$  y  $T$ . Sea  $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ , entonces se tiene

$$S \cdot R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}, \quad T^n \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + nc & b + nd \\ c & d \end{pmatrix}$$

Supóngase además que  $c \neq 0$  y que  $|a| > |c|$ , entonces por el algoritmo de la división, existen enteros  $q, r$  tales que

$$a = cq + r, \quad 0 \leq r < |c|$$

Así, para la transformación  $T^{-q}R = \begin{pmatrix} a - cq & b - qd \\ c & d \end{pmatrix}$  ésta puede escribirse

$$T^{-q}R = \begin{pmatrix} r & b - qd \\ c & d \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r < |c|.$$

Luego, si se multiplica a la izquierda por la matriz  $S$  se obtiene

$$S(T^{-q}R) = \begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix}.$$

Luego, utilizando el algoritmo de Euclides nuevamente, se puede escribir

$$-c = rq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < r.$$

Así

$$T^{-q_1} \begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c - q_1r & -d - q_1(d - bq) \\ r & b - qd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & -d - q_1(d - bq) \\ r & b - qd \end{pmatrix}$$

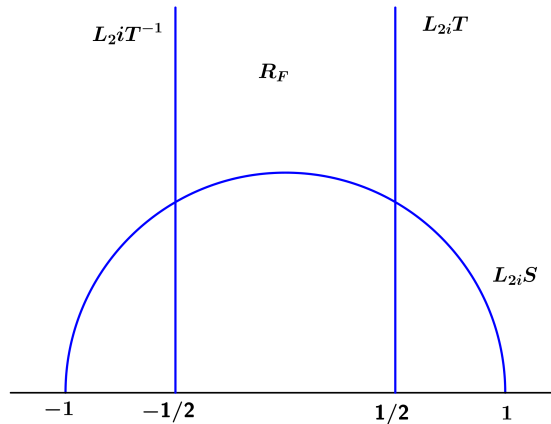
y multiplicando nuevamente por la matriz  $S$ , se obtiene

$$S \begin{pmatrix} r_1 & -d - q_1(d - bq) \\ r & b - qd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -d + bq \\ r_1 & -d - q_1(d - bq) \end{pmatrix},$$

y éste proceso terminará cuando  $r_n \rightarrow 0$ , así cualquier matriz  $R$  podrá ser llevada a la forma  $\begin{pmatrix} \pm 1 & m \\ 0 & \pm \end{pmatrix}$ , es decir, existe  $\gamma \in \Gamma = \langle S, T \rangle$  tal que  $g \cdot R = \pm T^n$ , para algún  $n \in \mathbb{Z}$ . ■

El siguiente resultado permite describir explícitamente su dominio fundamental<sup>4</sup> para el grupo modular mediante el uso de la definición del dominio de Dirichlet.

**Teorema 1.5.1.** *El dominio Fundamental para el grupo modular es el triángulo hiperbólico limitado por  $L_{2i}T^{-1}$ ,  $L_{2i}T$  y  $L_{2i}S$ , dadas por las rectas verticales  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{2}$  y la semicircunferencia unitaria respectivamente.*



**Figura 1.16:** Dominio fundamental para el grupo modular.

<sup>4</sup>Es el término utilizado para el polígono mediante el cual, la acción del grupo en el Plano Hiperbólico produce una teselación.

*Demostración.* Para utilizar la definición del dominio de Dirichlet, se elige un punto que no quede fijo por los elementos del grupo modular, puesto que está generado por las transformaciones  $T(z) = z + 1$  y  $S(z) = -\frac{1}{z}$ , las cuales tienen por puntos fijos a  $\infty$  y  $z = i$ , bastará considerar  $P = 2i$ , por tanto, utilizando 1.2.1, se hace:

$$L_{2i}T^{-1} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, 2i) = \rho(z, T^{-1}(2i))\}, \quad (1.1)$$

$$L_{2i}T = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, 2i) = \rho(z, T(2i))\}, \quad (1.2)$$

$$L_{2i}S = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, 2i) = \rho(z, S(2i))\}. \quad (1.3)$$

Resolviendo para la ecuación 1.1 se obtiene

$$L_{2i}T^{-1} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, 2i) = \rho(z, 2i - 1)\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \rho(z, 2i) &= \rho(z, 2i - 1) \\ \ln \frac{|z - \overline{2i}| + |z - 2i|}{|z - \overline{2i}| - |z - 2i|} &= \ln \frac{|z - \overline{2i - 1}| + |z - (2i - 1)|}{|z - \overline{2i - 1}| - |z - (2i - 1)|} \\ \frac{|z + 2i| + |z - 2i|}{|z + 2i| - |z - 2i|} &= \frac{|z + 2i + 1| + |z - (2i - 1)|}{|z + 2i + 1| - |z - (2i - 1)|} \\ |z + 2i| \cdot |z - 2i + 1| &= |z - 2i| \cdot |z + 2i + 1| \\ |z^2 + z + 4 + 2i| &= |z^2 + z + 4 - 2i| \\ (z^2 + z + 4 + 2i) \cdot \overline{(z^2 + z + 4 + 2i)} &= (z^2 + z + 4 - 2i) \cdot \overline{(z^2 + z + 4 - 2i)} \\ -2iz^2 - 2iz + 2i\bar{z}^2 + 2i\bar{z} &= 2iz^2 + 2iz - 2i\bar{z}^2 - 2i\bar{z} \\ z^2 - \bar{z}^2 &= -(z - \bar{z}) \\ z + \bar{z} &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Resolviendo para la ecuación 1.2

$$L_{2i}S = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, 2i) = \rho(z, 2i - 1)\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \rho(z, 2i) &= \rho\left(z, \frac{i}{2}\right) \\ \ln \frac{|z - \overline{2i}| + |z - 2i|}{|z - \overline{2i}| - |z - 2i|} &= \ln \frac{|z - \frac{i}{2}| + |z - \frac{i}{2}|}{|z - \frac{i}{2}| - |z - \frac{i}{2}|} \\ \frac{|z + 2i| + |z - 2i|}{|z + 2i| - |z - 2i|} &= \frac{|z + \frac{i}{2}| + |z - \frac{i}{2}|}{|z + \frac{i}{2}| - |z - \frac{i}{2}|} \\ |z - 2i| \cdot \left|z + \frac{i}{2}\right| &= |z + 2i| \cdot \left|z - \frac{i}{2}\right| \\ \left|z^2 - \frac{3i}{2}z + 1\right| &= \left|z^2 + \frac{3i}{2}z + 1\right| \\ \left(z^2 - \frac{3i}{2}z + 1\right) \cdot \overline{\left(z^2 - \frac{3i}{2}z + 1\right)} &= \left(z^2 + \frac{3i}{2}z + 1\right) \cdot \overline{\left(z^2 + \frac{3i}{2}z + 1\right)} \\ \frac{3i}{z}\overline{z}z^2 - \frac{3i}{z}z\overline{z}^2 - \frac{3i}{2}z + \frac{3i}{2}\overline{z} &= -\frac{3i}{z}\overline{z}z^2 + \frac{3i}{z}z\overline{z}^2 + \frac{3i}{2}z - \frac{3i}{2}\overline{z} \\ 3iz\overline{z} - 3iz\overline{z}^2 - 3iz + 3i\overline{z} &= 0 \\ 3iz\overline{z}(z - \overline{z}) - 3i(z - \overline{z}) &= 0 \\ 3i|z|^2(2iy) - 3i(2iy) &= 0 \\ |z|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$L_{2i}S = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = 1\}.$$

De manera similar, se concluye que  $L_{2i}T = \left\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Re(z) = \frac{1}{2}\right\}$ . ■

Geoméricamente, las geodésicas descritas por  $L_{2i}T^{-1}$ ,  $L_{2i}S$  y  $L_{2i}T$  representan la mediatriz de los segmentos que unen  $z$  y su transformado por los generadores del grupo modular, ver figura 1.17.

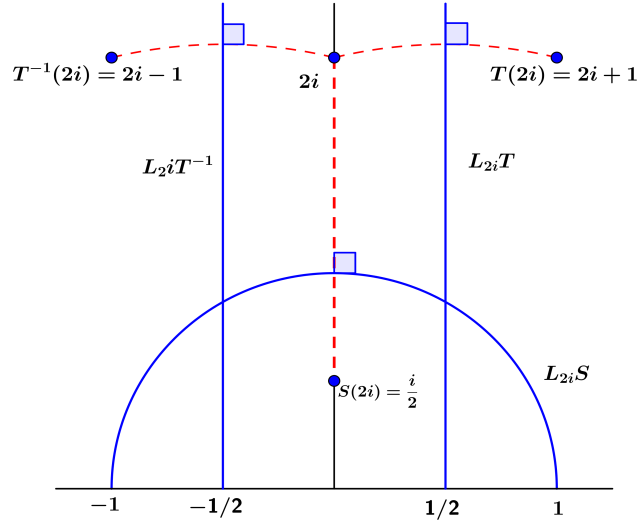


Figura 1.17: Interpretación de  $L_{2i}T^{-1}$ ,  $L_{2i}$  y  $L_{2i}S$ .

### 1.5.3. El grupo de Picard

El grupo de Picard puede considerarse como la extensión natural del grupo modular definido anteriormente, se describiran sus generadores y dominio fundamental.

**Definición 1.5.3.** *El grupo de Picard:*

$$PSL(2, \mathbb{Z}[i]) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i] \right\}.$$

**Proposición 1.5.2.** *El grupo  $PSL(2, \mathbb{Z}[i])$  es discreto y en su acción sobre  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , está generado por cuatro transformaciones parabólicas*

$$S(z) = z + 1, \quad T(z) = \frac{z}{-z + 1}, \quad U(z) = z + i \quad y \quad V(z) = \frac{z}{iz + 1}.$$

**Observación.** Haciendo  $A(z) = -\frac{1}{z}$ , se tiene

$$\begin{aligned} (ASA)(z) &= (AS)(A(z)) \\ &= (AS)\left(-\frac{1}{z}\right) \\ &= A\left(S\left(-\frac{1}{z}\right)\right) \\ &= A\left(-\frac{1}{z} + 1\right) = A\left(-\frac{(1-z)}{z}\right) \\ &= \frac{z}{-z + 1} = T(z). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 (AUA)(z) &= (AU)(A(z)) \\
 &= (AU)\left(-\frac{1}{z}\right) = A\left(U\left(-\frac{1}{z}\right)\right) \\
 &= A\left(-\frac{1}{z} + i\right) = A\left(-\frac{(1-zi)}{z}\right) \\
 &= \frac{z}{iz+1} = V(z).
 \end{aligned}$$

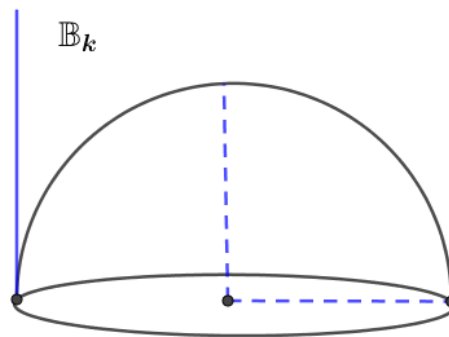
Y además  $A(z) = (TST)(z)$  y  $B(z) = (UAU^{-1}AUA)(z) = -z$ , lo cual implica que en realidad el grupo de Picard es generado por 3 transformaciones,  $\langle S, U, A \rangle$ .

## Dominio fundamental para el grupo de Picard.

El grupo de Picard pertenece a una basta familia de grupos kleinianos asociados a extensiones cuadráticas de la forma  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ . El campo cuadrático tiene la forma  $K = \mathbb{Q}[i]$ , donde su anillo de enteros es  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$ . Se construirá el dominio fundamental  $\mathcal{F}_K \subset \mathbb{H}^3$ . Para más detalles, consultar [EJ]

**Definición 1.5.4.** Para  $K = \mathbb{Q}[i]$  y sea  $d_{-1} = -4$  su discriminante, se definen

$$\mathcal{B}_K = \{x + yi + rj \in \mathbb{H}^3 \mid |cz + d|^2 + |d|^2 r^2 \geq 1, \forall c, d \in \mathbb{Z}[i], \quad \text{con} \quad \langle c, d \rangle = \mathbb{Z}[i]\}.$$

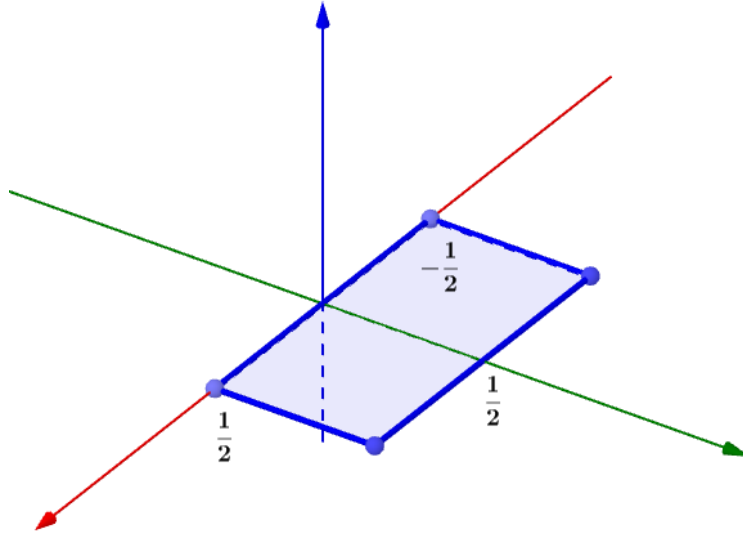


**Figura 1.18:** Representación para  $\mathcal{B}_K$

$$\mathcal{P}_K = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(z) \leq 1, \quad 0 \leq \Im(z) \leq 1\}.$$

$$F_K = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \Im(z) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

$$\mathcal{F}_K = \{x + yi + rj \in \mathcal{B}_K \mid z \in F_K\}.$$


 Figura 1.19: Representación para  $\mathcal{F}_K$ 

La figura de  $\mathcal{F}_K$  es un cuadrilátero con sus vértices en los puntos  $0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{6}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{6}, \frac{\sqrt{-3}}{3}$ . Donde puede notarse que los  $\mathcal{P}_K$  son paralelogramos fundamentales para la latiz  $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ .

**Definición 1.5.5.** Sean  $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$  con  $\langle \mu, \lambda \rangle = \mathbb{Z}[i]$ ,  $\mu \neq 0$ , se hace

$$S(\mu, \lambda) = \left\{ \mu + \lambda i + rj \in \mathbb{H}^3 / |\mu z + \lambda|^2 + |\mu|^2 r^2 = 1 \right\}.$$

Los conjuntos  $S(\mu, \lambda)$  son planos hiperbólicos, es decir, hemisferios euclídeos que tienen su centro en  $\frac{-\lambda}{\mu} \in \mathbb{C}$  y tienen radio  $\frac{1}{|\mu|}$ . El siguiente lema es utilizado para demostrar que  $\mathcal{F}_k$  es la región fundamental para  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$ .

**Lema 1.5.1.** El conjunto  $\mathcal{B}_k$  tiene las siguientes propiedades.

- I. Un punto  $P = z + rj \in \mathbb{H}^3$  pertenece a  $\mathcal{B}_k$  si y solo si para todo  $\sigma \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$  el punto  $z' + r'j = \sigma(P)$  cumple  $r' \leq r$ .
- II. Para todo punto  $P \in \mathbb{H}^3$ , existe  $\sigma \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$  con  $\sigma P \in \mathcal{B}_k$ .
- III. Sea  $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$  con  $\mu \neq 0$ , entonces  $\mathcal{B}_K \cap \sigma \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_k \cap S(\mu, \lambda)$ .

*Demostración.* I. Sea  $P = z + rj$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} \sigma(P) &= \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) (P) \\ &= \frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}r^2 + r(ad - bc)j}{|cz + d|^2 + |c|^2 r^2} \\ &= \frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}r^2 + rj}{|cz + d|^2 + |c|^2 r^2} \\ &= z' + r'j \end{aligned}$$

Donde  $r' = \frac{r}{|cz + d|^2 + |c|^2 r^2} \leq r$ .

Por otro lado, si  $\sigma(z + rj) = z' + r'j$ , con  $r' \leq r$  se tendrá que

$$\begin{aligned} z + rj &= \sigma^{-1}(z' + r'j) \\ &= \frac{(dz - b)(-cz + a) - d\bar{c}(r')^2 + r'j}{|cz + d|^2 + |c|^2(r')^2}. \end{aligned}$$

II. Eligiendo  $k \in ]0, \infty[$  y para el cual existen solamente un número finito de  $c, d \in \mathbb{Z}[i]$  con

$$|cz + d|^2 + r^2|c|^2 \leq k.$$

Entonces,

$$\sigma = \frac{\alpha z + \beta}{\mu z + \lambda},$$

tal que

$$|\mu z + \lambda|^2 + r^2|\mu|^2 \leq |cz + d|^2 + r^2|c|^2.$$

III. Al elegir  $P = z + rj \in \mathcal{B}_k$  y hacer  $\sigma P = z' + r'j$ , de donde

$$r' = \frac{r}{|\mu z + \lambda|^2 + |\mu|^2 r^2}.$$

■

**Teorema 1.5.2.** *El conjunto  $\mathcal{F}_K$  es el dominio fundamental para  $PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ .*

*Demostración.* El conjunto  $\mathcal{B}_K$  es la intersección de semiespacios cerrados, por tanto  $\mathcal{B}_K$  y  $\mathcal{F}_K$  son conjuntos cerrados. El conjunto  $\mathcal{F}_K$  es elegido como el dominio fundamental para la acción de  $PSL(2, \mathcal{O})_\infty$  sobre  $\mathbb{C}$ , luego por el lema 1.5.1 implica que

$$\mathbb{H}^3 = \bigcup_{\sigma \in PSL(2, \mathbb{Z}[i])} \sigma \mathcal{F}_K$$

■

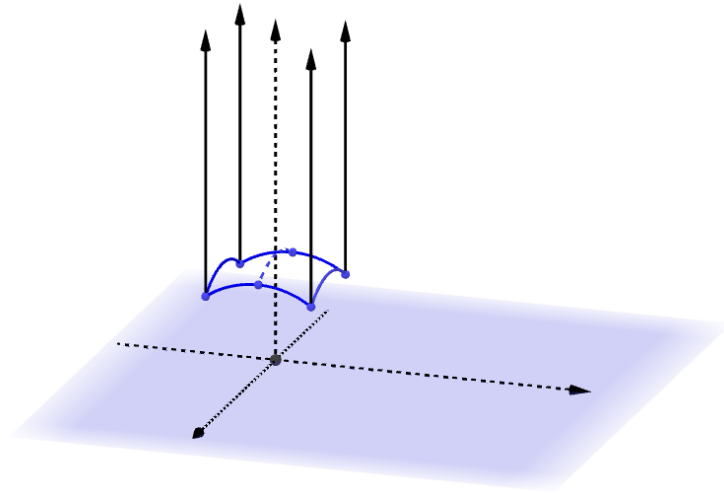
Por otro lado se tiene  $\partial \mathcal{B}_K = \bigcup_{\langle \mu, \lambda \rangle = \mathbb{Z}[i]} \mathcal{B}_K \cap S(\mu, \lambda)$ , ya que los puntos debajo de  $S(\mu, \lambda)$  no están en  $\mathcal{B}_K$ . Por el lema 1.5.1  $\sigma \mathcal{B}_K^\circ \cap \mathcal{B}_K^\circ = \emptyset$  si  $\sigma \neq I$ . Luego

$$\partial \mathcal{F}_K \subset \left( \bigcup_{\langle \mu, \lambda \rangle} S(\mu, \lambda) \cup M \right).$$

Donde  $M$  es la unión de 4 planos verticales en  $\mathbb{H}^3$ . Luego,  $\partial \mathcal{F}_K$  está contenida en la unión de conjuntos numerables de medida cero. Esto implica que  $\partial \mathcal{F}_K$  tiene medida cero.

**Proposición 1.5.3.** *El dominio fundamental  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}[i]}$  para  $PSL(2, \mathbb{Z}[i])$  es descrito por*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Q}[i]} = \left\{ z + rj \in \mathbb{H}^3 \mid 0 \leq |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \Im(z) \leq \frac{1}{2}, \quad z\bar{z} + r^2 \geq 1 \right\}$$



**Figura 1.20:** Dominio Fundamental para el grupo de Picard.



# Capítulo 2

## Aplicaciones asociadas con acciones de grupos kleinianos

El estudio de aplicaciones continuas por pedazos es un área relativamente nueva en matemática y existen algunos resultados generales para cierto tipo de transformaciones en diversos espacios, en particular Arek Goetz demostró que la entropía de las isometrías por pedazos es cero cuando la partición es una familia convexa poligonal en el plano.

A lo largo de este Capítulo se estudiarán las construcciones de aplicaciones continuas por pedazos asociados a grupos fuchsianos, grupos kleinianos finitamente generados sin cúspides; finalmente, se define una aplicación asociada al grupo de Picard, el cual es muy especial debido a que puede considerarse como una extensión natural del grupo modular, ambos grupo son ejemplos de grupos kleinianos con una sola cúspide.

### 2.1. Elementos de dinámica simbólica

Para más detalles sobre dinámica simbólica, ver [LM] y [Dev].

**Definición 2.1.1.** Se denotará por  $\mathcal{A}$  a un conjunto finito o numerable de símbolos, el cual será llamado **alfabeto**. Usualmente  $\mathcal{A} = \{0, \dots, N - 1\}$  ó  $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Definición 2.1.2.** Si  $\mathcal{A}$  es un alfabeto finito, entonces el **corrimiento completo** es la colección de todas las secuencias bi-infinitas de símbolos de  $\mathcal{A}$ . El  $r$  - **corrimiento** es el corrimiento completo sobre el alfabeto  $\{0, 1, \dots, r - 1\}$ .

El corrimiento completo es denotado por

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{Z}\} = \sum.$$

**Definición 2.1.3.** La aplicación **corrimiento unilateral**

$$\sigma : \sum \rightarrow \sum$$

se define

$$\sigma(x_i) = (x_{i+1}), \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad \text{o} \quad \mathbb{N}.$$

**Definición 2.1.4.** La órbita de  $x \in X$  es el conjunto

$$\text{Órb}(x) = \begin{cases} \{\sigma^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} & \sigma \text{ invertible} \\ \{\sigma^n(x) : n \geq 0\} & \sigma \text{ no invertible.} \end{cases}$$

Un punto  $x$  es periódico para  $\sigma$  si  $\sigma^n(x) = x$  para algún  $n \geq 1$  y se dirá que  $x$  tiene período  $n$  bajo  $\sigma$ . Si  $x$  es periódico, al menor entero positivo  $n$  para el cual  $\sigma^n(x) = x$  es llamado período de  $x$ . Si  $\sigma(x) = x$ , entonces  $x$  es llamado un punto fijo para  $\sigma$ .

**Definición 2.1.5.** Un espacio de corrimiento o simplemente corrimiento es un subconjunto  $X$  de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  tal que  $X = X_{\mathcal{F}}$  para alguna colección  $\mathcal{F}$  de bloques prohibidos sobre  $\mathcal{A}$ .

**Definición 2.1.6.** Sea  $X$  un subconjunto de un corrimiento completo y sea  $\mathcal{B}_n(X)$  el conjunto de todos los  $n$ -bloques en un punto en  $X$ . El lenguaje de  $X$  es la colección

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(X).$$

**Definición 2.1.7.** Un corrimiento de tipo finito es un corrimiento que puede ser descrito por un conjunto finito de bloques prohibidos, equivalentemente un corrimiento  $X$  que tiene la forma  $X_{\mathcal{F}}$  para algún conjunto finito  $\mathcal{F}$  de bloques.

**Ejemplo 4.** El corrimiento completo  $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es un corrimiento de tipo finito, se toma  $\mathcal{F} = \emptyset$  y así  $X = X_{\mathcal{F}}$ .

**Ejemplo 5.** Por ejemplo, si  $f : X \rightarrow X$  y  $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$ .

Si  $f : X \rightarrow X$  es una función y  $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=0}^4$  es una colección de subconjuntos de  $X$  con interiores disjuntos y  $X = \bigcup P_i$ .

- El conjunto  $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  es el alfabeto.
- $\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \dots, 4\}^{\mathbb{N}} = \{(s_i)_{i=0}^{\infty} \mid s_i \in \mathcal{A}\} = \sum$ .
- Si  $x \in X$ ,  $I(x)$  es la secuencia de  $0$ 's,  $\dots$ ,  $4$ 's donde  $s_j = 0$  si  $f^j(x) \in P_0, \dots$ ,  $s_j = 4$  si  $f^j(x) \in P_4$ .
- $\sum_f$  la colección de los  $I(x)$  permitidos bajo  $f$ .
- El corrimiento unilateral:

$$\begin{aligned} \sigma : \sum_f &\longmapsto \sum_f \\ (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) &\longmapsto (s_1 s_2 s_3 \dots) \end{aligned}$$

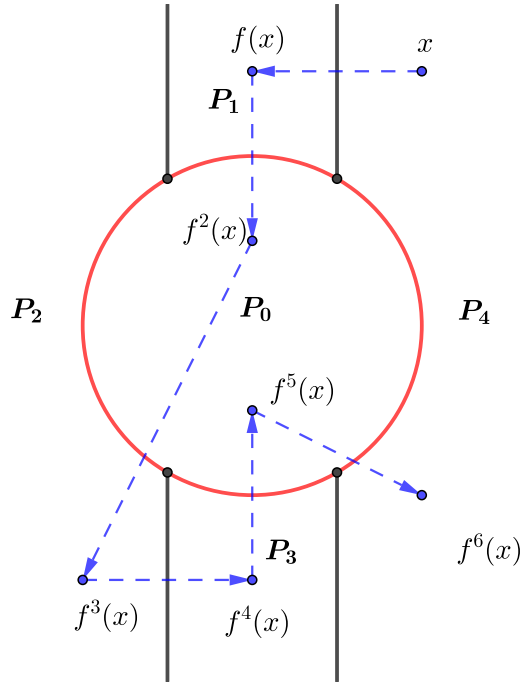


Figura 2.1: El itinerario para  $x$  es (4102304...)

En general, para un espacio  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  para algún alfabeto  $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  se tiene:

**Proposición 2.1.1.** *El espacio  $\Sigma$  es un espacio métrico con la métrica*

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i}.$$

**Proposición 2.1.2.** *Sean  $(s)$  y  $(t)$  elementos de  $\Sigma$  y supóngase que  $s_i = t_i$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Entonces*

$$d[(s), (t)] \leq \frac{1}{N^n}.$$

*Demostración.* Se tiene que si  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$

$$\begin{aligned} d[(s), (t)] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{N^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = \frac{N-1}{N^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N^n} = \frac{N-1}{N^n} \cdot \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N^n}. \end{aligned}$$

■

En general,  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  es un conjunto de Cantor, es decir, un conjunto compacto, totalmente desconexo sin puntos aislados.

**Proposición 2.1.3.** *La aplicación de itinerario  $I : X \rightarrow \Sigma$  es continua.*

*Demostración.* Sea  $f : X \rightarrow X$  una función continua y  $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, N-1\}$  algún alfabeto sobre una partición  $\{P_i\}_{i=1}^N$ , para  $x \in X$  supóngase que  $I(x) = s_0s_1s_2\dots$ , se mostrará que  $I$  es continua en  $x$ .

Sea  $\epsilon > 0$ , se elige  $n$  de tal forma que  $\frac{1}{N^n} < \epsilon$  y se consideran los conjuntos

$$P_{t_0t_1\dots t_n} = P_{t_0} \cap f^{-1}(P_{t_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(P_{t_n}),$$

para todas las combinaciones de  $t_0t_1\dots t_n$ , estos subconjuntos son disjuntos y su unión cubre a  $X$ . Existen  $N^{n+1}$  de tales subconjuntos y  $P_{t_0t_1\dots t_n}$  es uno de ellos. Luego, se elige  $\delta$  de tal forma que  $|x - y| < \delta$ , donde  $y \in X$  implica que  $y \in P_{s_0s_1\dots s_n}$ . De esta manera  $I(x)$  e  $I(y)$  coinciden en los primeros  $n + 1$  términos y así, por la proposición 2.1.2

$$d[I(x), I(y)] \leq \frac{1}{N^n} < \epsilon.$$

■

**Proposición 2.1.4.** *La aplicación de corrimiento unilateral  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  dada por*

$$\sigma(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}},$$

*es una función continua.*

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$  y sea  $s = (s_0s_1s_2\dots)$ , se quiere mostrar que  $\sigma$  es continua en  $s$ .

Puesto que  $\epsilon > 0$ , se elige  $n$  de tal forma que  $\frac{1}{N^n} < \epsilon$ . Al tomar  $\delta = \frac{1}{N^{n+1}}$ . Si  $(t)$  es un punto en  $\Sigma$  y  $d[(t), (s)] < \delta$ , entonces por 2.1.2, se puede tener que para  $s_i = t_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n+1$ , es decir,  $t = (s_0\dots s_{n+1}t_{n+2}t_{n+3}\dots)$ . Luego,  $\sigma(t) = (s_1\dots s_{n+1}t_{n+2}t_{n+3}\dots)$  tiene entradas que coinciden con las de  $\sigma(s)$  en los primeros  $n + 1$  lugares. Así, se tiene

$$d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq \frac{1}{N^n} < \epsilon.$$

Por lo tanto,  $\sigma$  es continua en  $s$ .

■

**Definición 2.1.8.** *Sea  $F$*

$$F : X \longrightarrow X$$

*una función continua por pedazos y  $X$  un espacio topológico y sea*

$$\sigma : \sum_F \longrightarrow \sum_F,$$

*se dice que  $F$  y  $\sigma_F$  son semiconjugadas si el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \sum_F & \xrightarrow{\sigma} & \sum_F \end{array}$$

*es conmutativo, es decir,*

$$\sigma \circ h = h \circ F$$

*y la función  $h$  es suprayectiva.*

La existencia de una semiconjugación entre dos espacios, busca trasladar información dinámica del espacio de las secuencias permitidas a la dinámica de la aplicación  $F : X \rightarrow X$ . En el caso de que  $h$  sea una biyección se dirá que  $F$  es una conjugación con  $\sigma$ .

## 2.2. Una función en la frontera ideal del plano hiperbólico

### 2.2.1. La construcción de Bowen-Series para un grupo fuchsiano

Para más detalles de esta construcción, ver [BS1].

**Definición 2.2.1.** Una transformación racional de  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  de la forma  $\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , con  $ad - bc = 1$ , se le asocia el círculo

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |cz + d| = 1\},$$

que será llamado el círculo isométrico<sup>1</sup> de  $\gamma$ .

Sea  $\Gamma$  un grupo fuchsiano finitamente generado, de primer tipo<sup>2</sup>, con polígono fundamental  $\mathcal{R}$  con la propiedad *even corners*<sup>3</sup>, es posible asociarle

$$f_\Gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

que cumple: para  $x, y \in \mathbb{S}^1$ ,  $x = \gamma y$  con  $\gamma \in \Gamma$  si y sólo si existe  $n, m \geq 0$  tal que  $f^n(x) = f^m(y)$ , excepto para un número finito de puntos  $x, y$ .

La construcción de Bowen-Series, requiere características muy particulares para la partición del espacio, la siguiente definición, describe cómo es la partición y las condiciones que debe cumplir una función.

**Definición 2.2.2.** La aplicación  $f$  tiene la propiedad de Markov respecto de una partición finita o numerable  $\mathcal{P} = \{I_i\}_{i=1}^\infty$  de  $\mathbb{S}^1$  o equivalentemente:

- I.  $f$  es estrictamente monótona sobre cada  $I_i \in \mathcal{P}$  y se extiende a una función de tipo  $C^2$  sobre  $\bar{I}_i$ . En realidad  $f$  es igual a algún elemento fijo de  $\Gamma$  en  $I_i$ .
- II. Si  $f(I_k) \cap I_j \neq \emptyset$  entonces  $f(I_k) \supset I_j$
- III. Para  $i, j$ ,  $\bigcup_{i=0}^\infty f^i(I_i) \supset I_j$ ,
- IV. Si  $\text{int}(I_i) = (a_i, b_i)$ , entonces

$$\left\{ \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a_i + h), \lim_{h \rightarrow 0^-} f(b_i - h) \right\}_{i=1}^\infty < \infty.$$

Si  $\Gamma$  no tiene cúspides,  $f_\Gamma$  satisface dos propiedades adicionales:

<sup>1</sup>Este es el término empleado por Bowen-Series para referirse a las prolongaciones de los lados del polígono fundamental asociado a un grupo fuchsiano hasta la frontera ideal, es decir, hasta  $\mathbb{S}^1$ .

<sup>2</sup>Grupo de primer tipo significa que su conjunto límite es  $\mathbb{S}^1$ .

<sup>3</sup>Las geodésicas que contienen a los lados asociados a la teselación por  $\Gamma$ , están contenidos en  $\Gamma(\partial\mathcal{R})$ .

V. Existe  $N > 0$  tal que

$$\inf_{x \in (0,1)} |(f^N)'(x)| > \lambda > 1.$$

VI.

$$\sup_{x \in (0,1)} \frac{|f''(x)|}{|f'(x)|^2} < \infty \quad (\text{Condición de Rényi's}).$$

Es posible construir una función continua sobre la frontera ideal del disco, para lo cual se necesita el siguiente lema; que garantiza que las prolongaciones de lados geodésicos no consecutivos no se cortan, esta propiedad será un elemento importante a la hora de definir una aplicación continua por pedazos. La demostración puede consultarse en [BS1].

**Lema 2.2.1.** *Sea  $\mathcal{R}$  un polígono geodésico de  $n$  lados, con  $n > 3$ . Si  $s$  y  $s'$  no son lados consecutivos de  $\mathcal{R}$ , entonces los círculos isométricos  $C(s)$  y  $C(s')$  no se intersecan.*

El siguiente Teorema es el principal resultado que se demuestra en [BS1]

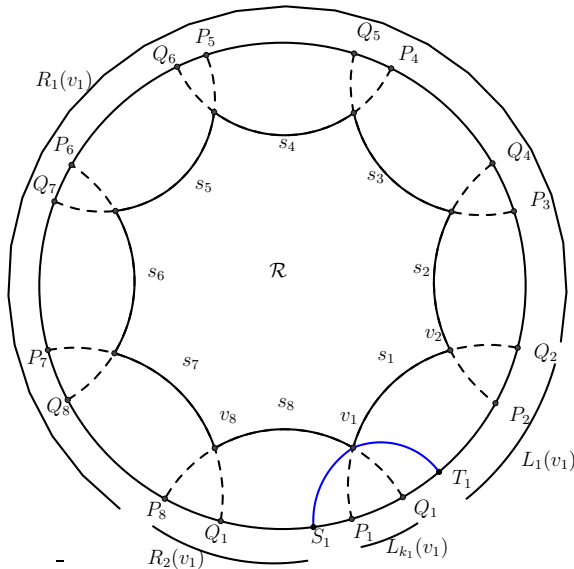
**Teorema 2.2.1.** *Sea  $\Gamma$  un grupo fuchsiano finitamente generado, de primer tipo, con región fundamental  $\mathcal{R}$  que tiene la propiedad even corners, entonces existe una aplicación de Markov*

$$f_\Gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

que es equivalente en órbitas a  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{S}^1$ . Además:

- A. Si  $S_\Gamma^4$  no tiene cúspides, la partición de Markov es finita y  $f_\Gamma$  cumple III y IV de 2.2.2.
- B. Si  $S_\Gamma$  tiene cúspides parabólicas, la partición de Markov es numerable. Existe un subconjunto  $K \subset \mathbb{S}^1$ , que consiste de una unión de conjuntos en la partición, menos un conjunto numerable de puntos que son preimágenes, bajo algún iterado de  $f$ , de los vértices parabólicos, tal que aplicación del primer retorno inducida por  $f_\Gamma$  sobre  $K$  tiene las propiedades II, IV, V y VI de 2.2.2.

Para la construcción, se tiene

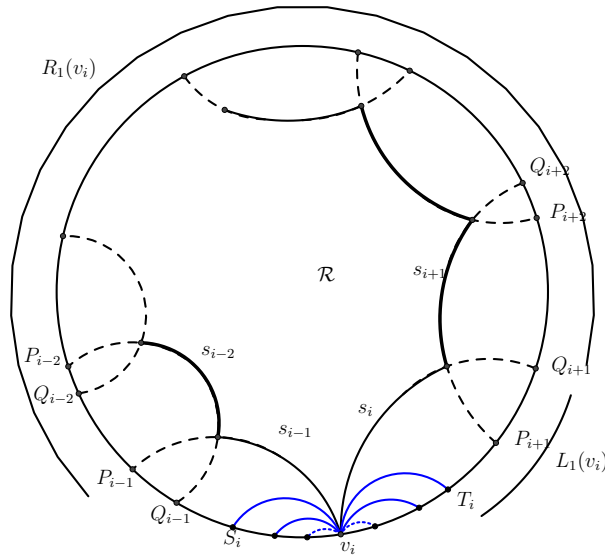


Sean

- A.  $N$ : todas las imágenes de los lados de  $\mathcal{R}$  bajo elementos de  $\Gamma$ .
- B.  $N(v_1)$ : los arcos en  $N$  que pasan por  $v_1$ .
- C.  $W(v_1)$ : los puntos donde  $N(v_1)$  cortan a  $\mathbb{S}^1$ .

<sup>4</sup> $S_\Gamma$  se refiere a la superficie de Riemann cociente asociada.





Si  $\mathcal{R}$  tiene vértices parabólicos  $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ ;  $v_{i_j}$  es un punto periódico de orden  $r_j$  para  $f_\Gamma$  y  $(f_\Gamma^{r_j})'(v_{i_j}) = 1$ .

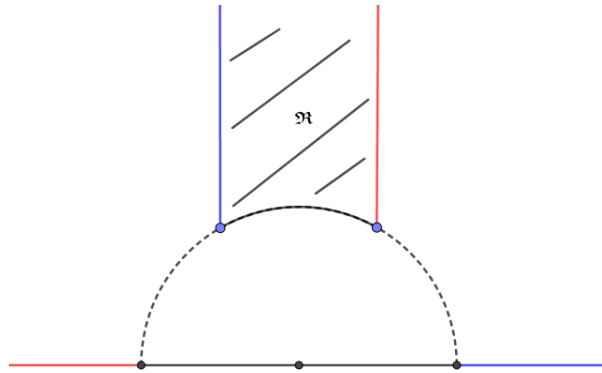
$$K = \mathbb{S}^1 - \bigcup_{j=1}^r ((\cup_{s=2}^\infty L_s(v_{i_j})) \cup (\cup_{t=3}^\infty R_t(v_{i_j}))) - \bigcup_{j=1}^r \bigcup_{n=1}^\infty f_\Gamma^{-n}(v_{i_j}).$$

### 2.2.2. Una función asociada al grupo modular

El grupo modular, es un grupo de gran importancia por sus conexiones con la Teoría de Números, Topología, Geometría Hiperbólica entre otras ramas de la matemática.

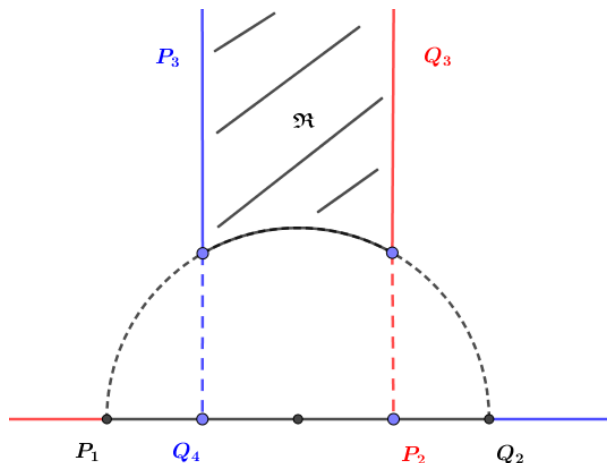
$$\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{array}{l} az + b \\ cz + d \end{array} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

- A. Por la Proposición 1.5.1, sus generadores están dados por  $\Gamma = \langle z + 1, -\frac{1}{z} \rangle$ .
- B. Debido al Teorema 1.5.1, su dominio fundamental está determinado por el triángulo hiperbólico de vértices  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  y el  $\infty$ .



Al ajustar la construcción de Bowen-Series al grupo modular se tiene

1.  $f_{\Gamma}(x) = x + 1$ , si  $x \in [-\infty, P_1)$ .
2.  $f_{\Gamma}(x) = -\frac{1}{x}$ , si  $x \in [P_1, P_2)$ .
3.  $f_{\Gamma}(x) = x - 1$ , si  $x \in [P_2, \infty)$



La construcción de Bowen-Series se redefine en [BS2] por Caroline Series.

**Definición 2.2.3.** Para  $\Gamma = \langle x + 1, -\frac{1}{x} \rangle$  el grupo modular, se define

$$f_{\Gamma}(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq -1 \\ -\frac{1}{x}, & -1 < x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \\ \infty, & x = \infty. \end{cases}$$

La función anterior, se estudia en el siguiente capítulo, donde se demuestra la existencia de órbitas periódicas y cómo calcular órbitas de algún período específico.

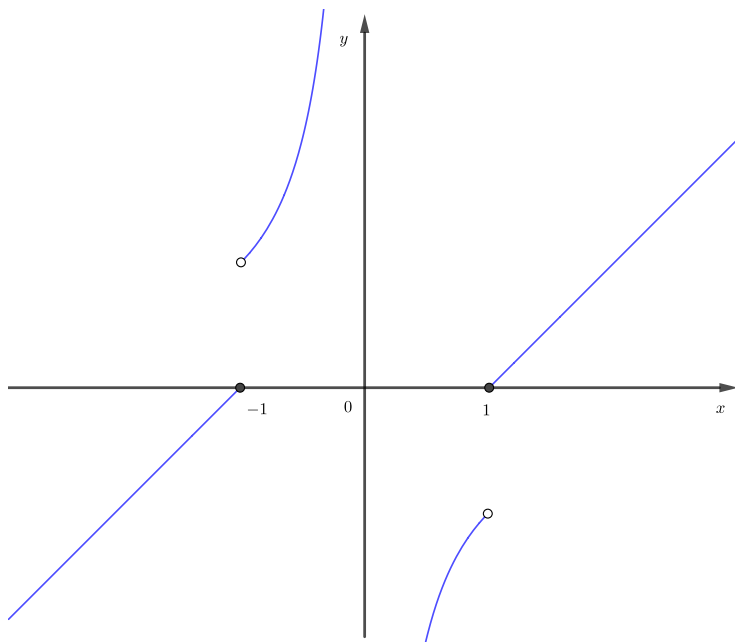


Figura 2.2: Gráfico de  $f_{\Gamma}(x)$ .

## 2.3. La construcción para un grupo kleiniano

Para más detalles de esta construcción, puede revisarse [AR]. Para definir una partición en la esfera de Riemann, se considera:  $\Gamma$  un grupo kleiniano finitamente generado, sin elementos parabólicos y dominio fundamental un poliedro hiperbólico  $\mathcal{R}$  de  $n$  caras y además se requiere que la partición cumpla ciertas condiciones, la siguiente definición, extiende la definición 2.2.2

**Definición 2.3.1.** *Una partición de Markov para la acción de un grupo kleiniano  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{S}^2$  es una colección finita  $\mathcal{P} = \{V_i\}_{i=1}^m$  de subconjuntos cerrados de  $\mathbb{S}^2$  y una aplicación  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Tal que:*

- a.  $\bigcup_{i=1}^m V_i = \mathbb{S}^2$ .
- b. Para  $i \neq j$ , el interior de  $V_i$  es disjunto del interior de  $V_j$ .
- c. La imagen bajo  $f$  de cualquier elemento en la partición es unión de elementos de la partición:

$$f(V_i) = V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_n}.^5$$

Se considera:

1.  $\Gamma_{\mathcal{R}}$  las transformaciones que emparejan las caras del poliedro hiperbólico  $\mathcal{R}$ .
2. Una familia de planos  $P(e_{i_0}), P(e_{i_0}e_{i_1}), \dots, P(e_{i_0} \dots e_{i_n})$  donde

$P(e_0)$  : es el plano que contiene a la cara  $\mathcal{R} \cap e_{i_0}(\mathcal{R})$

$P(e_{i_0}e_{i_1} \dots e_{i_{k-1}})$  es el plano que contiene a

$$e_{i_0}e_{i_1} \dots e_{i_{k-1}}\mathcal{R} \cap e_{i_0}e_{i_1} \dots e_{i_k}\mathcal{R}.$$

3. Una familia de subespacios  $H(e_i)$ , cuya intersección con  $\mathcal{R}$  es la cara donde su exterior tiene rotulación  $e_i$ .
4.  $\{H(e_i) : e_i \in \Gamma_{\mathcal{R}}\}$  tienen como unión a  $\mathbb{B}^3$ .<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>Esta condición se conoce como la propiedad de Markov.

<sup>6</sup>Esta construcción puede ajustarse de la misma forma en  $\mathbb{H}^3$  y determinar una partición en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Por otro lado: puesto que  $H(e_i)$  contiene una cara de  $\mathcal{R}$ , utilizando el emparejamiento de las caras para asociar una aplicación  $f$  que envía un punto  $x \in H(e_i)$  a  $e_i^{-1}x$  si  $i$  es el último elemento de  $\{j : x \in H(e_j)\}$  y  $f(x) = x$  si  $x \in \mathcal{R}$ .

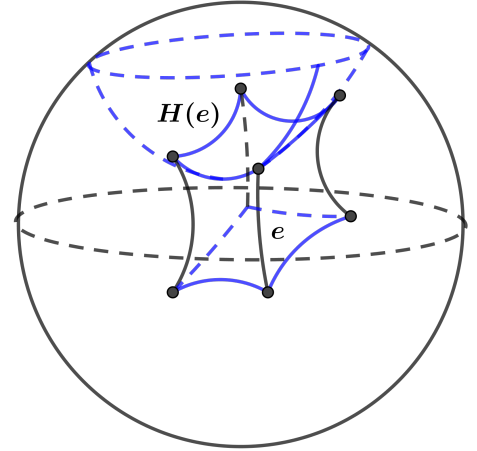


Figura 2.3: Partición de  $\mathbb{B}^3$ .

$$\begin{aligned}
 B(e_i) &= \{x \in H(e_i) : f(x) = e_i^{-1}x\} \\
 I(e_i) &= S^2 \cap \overline{B(e_i)} \\
 B(e_0, \dots, e_n) &= \bigcap_{r=0}^n f^{-r} B(e_r) \\
 I(e_0, e_1, \dots, e_n) &= S^2 \cap \overline{B(e_0, \dots, e_n)} = \bigcap_{r=0}^n f^{-r} I(e_r)
 \end{aligned}$$

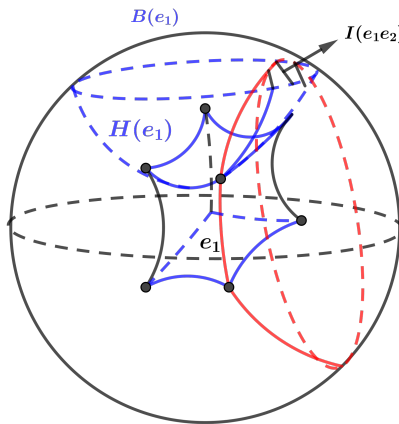


Figura 2.4: Interpretación de la construcción de Rocha.

En las condiciones de la construcción, si  $B(e_0, \dots, e_n) \neq \emptyset$  entonces el diámetro de  $I(e_0 \dots e_n) \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

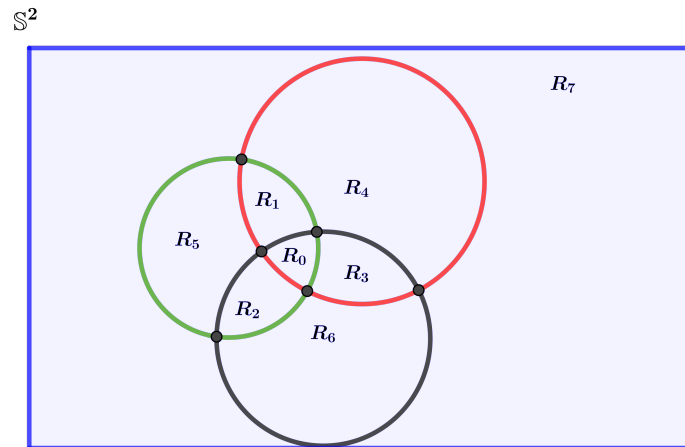
La condición de pedir un grupo sin elementos parabólicos es que permite tener una partición finita en la esfera de Riemann. Por otro lado, para demostrar que los diámetros de los  $I(e_{i_0} \dots e_{i_k})$

tienden a cero, se divide el grupo en el caso con o sin elementos parabólicos y se utiliza

- I. Si  $\Gamma$  no tiene parabólicos, entonces existe una constante  $\alpha > 0$ , tal que si  $g \in \Gamma - \{id\}$  entonces  $d_H(0, g0) > \alpha|g|$ .
- II. Si  $\Gamma$  tiene elementos parabólicos, entonces existen constantes  $k, n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $\Gamma - \{id\}$  entonces  $d_H(0, g0) > 2 \log |g| - k$ , si  $|g| > n_0$ .

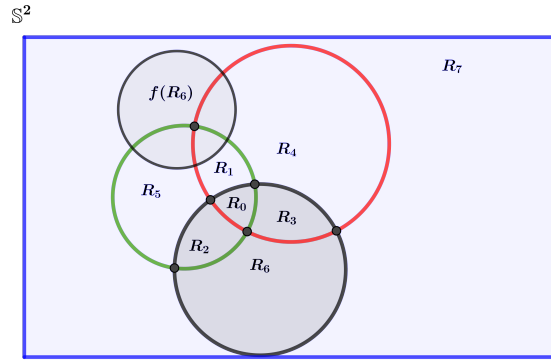
En resumen tenemos: sea  $\Gamma$  un grupo kleiniano, geoméricamente finito, con poliedro fundamental  $\mathcal{R}$  con la propiedad *even corners*.

- I. Sea  $\mathfrak{P}$  : el conjunto de todos los planos en  $\Gamma \cdot \partial\mathcal{R}$  que intersectan a  $\mathcal{R}$  en una cara, un lado o un vértice.
- II. La intersección de cada plano con  $\mathbb{S}^2$  es un círculo y la cerradura de las componentes del complemento de la unión de esos círculos cubren a  $\mathbb{S}^2$ .
- III. La aplicación  $f$  puede extenderse a  $\mathbb{S}^2$  en el mismo sentido que fue definida: la imagen bajo  $f$  de cualquier elemento  $R_i \in \mathcal{R}$  es unión de elementos en  $\mathcal{R}$ .



**Figura 2.5:** Configuración para los  $R_i$ .

**Proposición 2.3.1.** *La aplicación  $f$  tiene la propiedad de Markov con respecto a la partición  $\mathfrak{R} = \{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ .*



**Figura 2.6:** Representación para una configuración de los  $R_i$ .

*Demostración.* Sea  $R_i \in \mathfrak{R}$ ,  $\partial R_i$  está compuesta por arcos de círculos que resultan de  $\mathfrak{P} \cap \mathbb{S}^2$ . Por construcción  $R_i \subset H(e_j)$ , para algún  $j$  tal que  $f|_{R_i} = e_j^{-1}$ .

Si  $e_j^{-1}$  empareja la cara  $F_j$  con  $F_{i_j}$ , entonces  $e_j^{-1}$  enviará planos en  $\mathfrak{P}$  que intersecan  $F_j$  a intersecciones similares en  $F_{i_j}$ . Así, los círculos que contienen los arcos de la frontera de  $R_i$  son enviados a círculos que son las intersecciones de las imágenes de los planos que pasan por  $F_j$  con  $\mathbb{S}^2$ . Por tanto, la frontera de la imagen de  $R_i$  es unión de arcos en círculos distintos, esto implica que  $R_i$  es llevado bajo  $e_j^{-1}$  a una unión de regiones en  $\mathfrak{R}$ . ■

En esta etapa, el autor introduce en [AR] un subcorrimento de tipo finito: sobre el espacio

$$\sum_f = \{(r_k)_{k=0}^\infty : f(R_{r_k}) \supseteq (R_{r_{k+1}}), r = 0, 1, \dots\}$$

dada por

$$\sigma : \sum_f \mapsto \sum_f, \quad \sigma(r_k)_{k=0}^\infty = (r_{k+1})_{k=0}^\infty.$$

Definiendo

$$\Omega = \{(e_i)_{i=0}^\infty : B(e_0 e_1 \dots e_i) \neq \emptyset, e_i \in \Gamma_{\mathcal{R}}, i = 0, 1, \dots\}$$

Para cada  $r_k$  se define  $\psi(r_k) = e \in \Gamma_{\mathcal{R}}$  si  $f|_{R_k} = e^{-1}$ . La propiedad de Markov de  $f$  garantiza que la aplicación

$$\psi : \sum_f \mapsto \Omega$$

definida por

$$\psi((r_k)_{k=0}^\infty) = (\psi(r_k))_{k=0}^\infty$$

está bien definida.

La aplicación  $\psi$  permite definir una aplicación desde el corrimento  $\sum_f$  y el conjunto límite  $\Delta$  de  $\Gamma$ . Utilizando el hecho que

$$I(e_0 e_1 \dots e_n) \supseteq I(e_0 e_1 \dots e_{n+1})$$

y  $\text{diam}(e_0 e_1 \dots e_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , si  $r = (r_0, r_1, \dots) \in \sum_f$ ,

$$\pi(r) = \bigcap_{k=0}^{\infty} I(\psi(r_0)\psi(r_1)\dots\psi(r_k))$$

es un solo punto en  $I(\psi(r_0)) \cap \Delta$ .

Los puntos sobre la frontera de  $R_k$  pueden tener más de una  $f$ -expansión y por lo tanto la aplicación

$$\pi : \sum_f \mapsto \Delta$$

posiblemente pueda fallar en ser una biyección en esos puntos.

**Teorema 2.3.1.** *Existe una aplicación continua  $\pi$  entre el subcorrimento de tipo finito  $\sum_f$  y el conjunto límite  $\Delta$  de  $\Gamma$  que es una biyección, excepto en algún subconjunto  $\sum' \subset \sum_f$ , que es llevado bajo  $\pi$  en un conjunto de medida cero.*

Finalmente, Rocha demuestra

**Teorema 2.3.2.** *La aplicación  $f$  es (eventualmente) expansiva.<sup>7</sup>*

## 2.4. Una función asociada al grupo de Picard

El proceso de construcción está inspirado en [AR] and [R], en donde se demuestra la existencia de una función conforme por pedazos en la esfera de Riemann asociada a grupos kleinianos geoméricamente finitos con la propiedad *even corners*, pero sin cúspide. Bowen-Series definieron el proceso de construcción para grupos fuchsianos finitamente generados con o sin cúspides, construcción que posteriormente se extiende a grupos kleinianos geoméricamente finitos, pero sin cúspide. En esta sección se emplean las ideas de los autores para definir una función continua por pedazos en la esfera de Riemann, asociada a la acción de grupo de Picard.

Al recordar

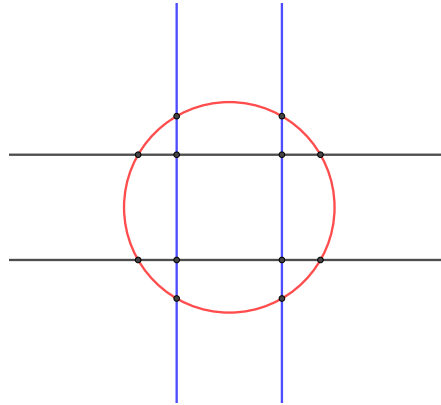
$$\text{PSL}(2, \mathbb{Z}[i]) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i], ad - bc = 1 \right\}.$$

---

<sup>7</sup>Expansiva significa que  $\|D_x f^n(x)\| \geq \beta > 1 \forall x \in \mathbb{S}^2$ .

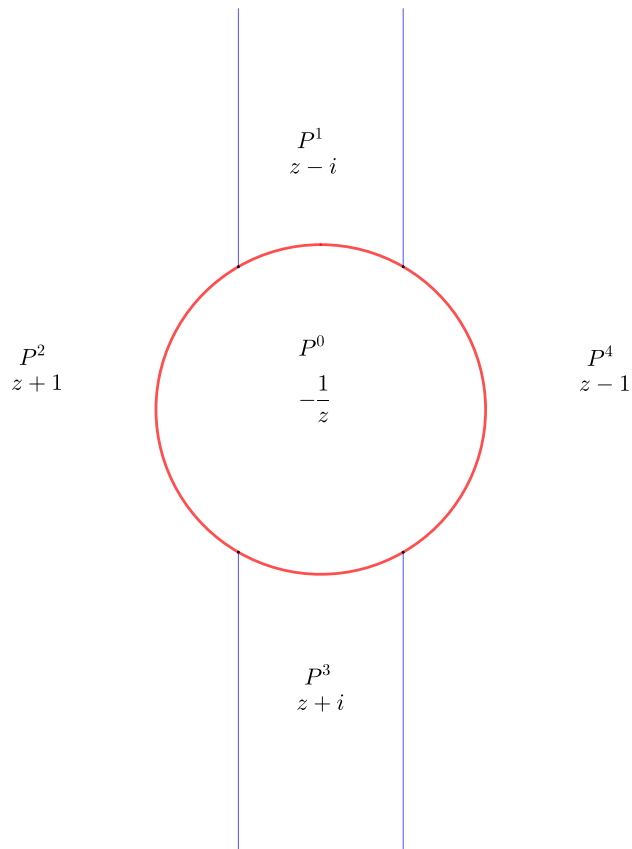


Finalmente, la intersección de los semiespacios que contienen las caras del dominio fundamental del grupo de Picard determinan una partición en la esfera de Riemann.



**Figura 2.10:** Partición en  $\mathbb{C}$ .

Se considera: la partición inducida en la frontera ideal  $\partial\mathbb{H}^3 = \widehat{\mathbb{C}}$ , asociada al dominio fundamental de  $\Gamma$ ; por convención, en adelante se trabajará con la configuración  $\mathcal{P} = \{P^0, P^1, P^2, P^3, P^4\}$ .



**Figura 2.11:** Partición asociada con  $\mathbb{C}$ .

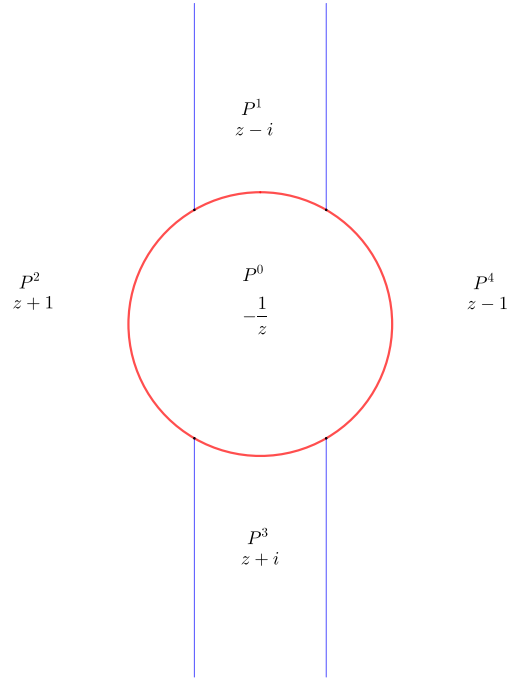
donde  $\partial P^i$ ,  $i = 0, \dots, 4$  están dados por;

- $\partial P^0 = \emptyset$
- $\partial P^1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| = \frac{1}{2}, \Im(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \cup \left\{ e^{i\theta} \mid \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$
- $\partial P^2 = \left\{ e^{i\theta} \mid \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3} \right\}$
- $\partial P^3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| = \frac{1}{2}, \Im(z) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \cup \left\{ e^{i\theta} \mid \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3} \right\}$
- $\partial P^4 = \left\{ e^{i\theta} \mid \frac{5\pi}{3} < \theta < \frac{7\pi}{3} \right\}$ .

Los interiores de los conjuntos  $P^i$  para  $i = 0, 1, \dots, 4$  son disjuntos entre sí y  $\cup \overline{P}_i = \widehat{\mathbb{C}}$ .

**Definición 2.4.1.** Sea  $\Gamma$  el grupo de Picard, se define

$$f_{\Gamma}(z) = \begin{cases} z - i, & z \in P^1 \\ z + 1, & z \in P^2 \\ -\frac{1}{z}, & z \in P^0 \\ z + i, & z \in P^3 \\ z - 1, & z \in P^4 \\ \infty, & \infty. \end{cases}$$



La función de la Definición 2.4.1 extiende a la función definida en 2.2.3, nótese además que si ésta función se restringe a  $\widehat{\mathbb{R}}$ , la función de la Definición 2.4.1 coincide con la función de la Definición de 2.2.3.

**Definición 2.4.2.** Sea  $z_0$  un punto periódico bajo  $f_{\Gamma}$ , es decir,  $f_{\Gamma}^n(z_0) = z_0$ , entonces:

- A. Si  $|(f_{\Gamma}^n(z_0))'| < 1$ ,  $z_0$  es un punto periódico atractor.
- B. Si  $|(f_{\Gamma}^n(z_0))'| > 1$ ,  $z_0$  es un punto periódico repulsor.
- C. Si  $|(f_{\Gamma}^n(z_0))'| = 1$ ,  $z_0$  es un punto neutral.

**Observaciones.** 1. En general, si  $F(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  es una aplicación de Möbius, con  $ad - bc \neq 0$  se cumplirá que

$$\begin{aligned} F^n(z) &= \frac{Az + B}{Cz + D} \\ (F^n)'(z) &= \frac{AD - BC}{(Cz + D)^2} \\ |(F^n)'(z)| &= \frac{|AD - BC|}{|Cz + D|^2}. \end{aligned}$$

2. Si se elige  $F(z) = f_\Gamma$ ,  $f_\Gamma^n(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}$ , es decir, siempre es una transformación de Möbius nuevamente, lo que sugiere que un punto  $z_0$  es:

- Atractor si está fuera del círculo isométrico asociado a  $f_\Gamma^n(z)$ .
- Repulsor si está dentro del círculo isométrico asociado a  $f_\Gamma^n(z)$
- Neutral si está sobre dicho círculo.

Los siguientes Capítulos describen la dinámica de las funciones de las Definiciones en 2.2.3 y 2.4.1 respectivamente, asociando un sistema simbólico  $\sum_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  para posteriormente estudiar el espacio de secuencias permitidas  $\sum_{f_\Gamma}$ .

# Capítulo 3

## Dinámica para $f_\Gamma$ , donde $\Gamma$ es el grupo modular

En este capítulo, se estudia la dinámica de la aplicación de la Definición 2.2.3, la cual coincide con la restricción a los números reales de la función definida en 2.4.1, ver Figura 3.1. Por otro lado,  $\Gamma$  representará al grupo modular y  $f_\Gamma$  será una función definida sobre la frontera ideal, es decir  $\partial\mathbb{H}^2 = \widehat{\mathbb{R}}$ .

$$\text{Para } f_\Gamma(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -\frac{1}{x}, & x \in (-1, 1) \\ x + 1, & x \leq -1 \\ \infty, & x = \infty. \end{cases}$$

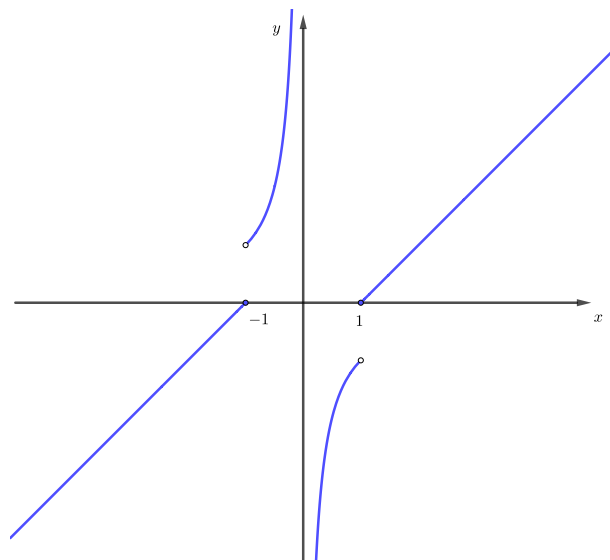


Figura 3.1: Gráfico de  $f_\Gamma$  en  $\mathbb{R}$ .

se demuestra la existencia de órbitas periódicas, su naturaleza y cómo calcularlas.

### 3.1. Resultados dinámicos

En esta sección, las siguientes definiciones suponen que  $f : X \rightarrow X$  una función y  $X$  tiene como mínimo estructura de espacio topológico.

**Definición 3.1.1.** A la colección de puntos  $x, f(x), f^2(x), \dots$  se le llama la órbita de  $x$  y se denota por  $\mathcal{O}^+(x)$ .

Si  $f$  es un homeomorfismo, se define la órbita completa de  $x$  como  $\mathcal{O}(x)$ , como la colección de puntos  $f^n(x)$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y la órbita para los negativos se denotará por  $\mathcal{O}^-(x)$ .

**Definición 3.1.2.** Se dice  $x$  es un punto fijo de  $f$  si  $f(x) = x$ . El punto  $x$  es un punto periódico de período  $n$  si  $f^n(x) = x$ . Al menor entero positivo  $n$  para el cual  $f^n(x) = x$  se le llamará período de  $x$ .

Se denota por  $Per_n(f)$  al conjunto de todos los puntos periódicos de período  $n$  y por  $Fix(f)$  al conjunto de puntos fijos. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forma una órbita periódica.

**Definición 3.1.3.** Un punto  $x$  es eventualmente periódico de período  $n$ , si  $x$  no es periódico pero existe  $m > 0$  tal que  $f^{n+i}(x) = f^i(x)$  para todo  $i > m$ . Esto es,  $f^i(x)$  es periódica para  $i \geq m$ .

**Definición 3.1.4.** Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $\{x_n\}$  una colección de enteros. La representación de un número real  $x$  como fracción continua es

$$x = [x_0; x_1 : x_2 : x_3 : \cdots] = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \cdots}}},$$

donde  $x_0 \in \mathbb{Z}$  y  $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ , es alguna secuencia de números enteros no nulos.

**Observación.** La Definición 3.1.4 puede variar dependiendo del contexto o intereses de trabajo, para tener una perspectiva más amplia sobre la teoría de fracciones continuas, consultar [KO].

**Proposición 3.1.1.** Para  $f_\Gamma$  se tiene

- A.  $x \in \mathbb{R}$  es periódico bajo  $f_\Gamma$  si y solo si  $x = [x_0; x_1 : x_2 : \dots]$  es un irracional periódico.
- B.  $x \in \mathbb{R}$  es eventualmente periódico bajo  $f_\Gamma$  si y solo si  $x = [x_0; x_1 : x_2 : x_3 : \dots]$  es eventualmente periódico.

*Demostración.* A. Supóngase, sin pérdida de generalidad que  $x \neq 0$  y que  $x \in (-1, 1)$  es periódico bajo  $f_\Gamma$ , entonces existe  $N \in \mathbb{Z}$  tal que

$$f_\Gamma^N(x) = x.$$

Y puesto que  $f_\Gamma^N$  es la composición de las transformaciones  $S(x) = -\frac{1}{x}$  y  $T(x) = x + 1$ , se tiene que existen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  de tal forma que

$$T^{M_1} S \cdots T^{M_n} S(x) = f_\Gamma^N(x) = x$$

y

$$|M_1| + |M_2| + \cdots + |M_n| + n_S = N,$$

donde  $n_S$  es el número de veces en que se aplica la transformación  $S(x) = -\frac{1}{x}$ .

$$(T^{M_1}S \dots T^{M_n}) \left( -\frac{1}{x} \right) = x$$

$$(T^{M_1}S \dots T^{M_{n-3}}S) \left( -\frac{1}{x} + M_n \right) = x.$$

El proceso anterior indica que el número  $x$  tendrá la forma

$$x = -\frac{1}{M_1 - \frac{1}{M_3 + \dots - \frac{1}{\left( -\frac{1}{x} + M_n \right)}}}.$$

Los procesos anteriores indican que el número  $x$  tiene la forma  $[M_1 : M_2 : \dots : M_n : \dots]$ .

Por otro lado, si  $x = [x_0 : x_1 : x_2 : \dots]$  es un irracional periódico se tiene

$$x = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 \dots}}}, \quad x_0 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto

$$ST^{-x_0}(x) = -\left( x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \dots}} \right)$$

$$T^{-x_1}ST^{-x_0}(x) = \left( -\frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \dots}} \right).$$

Siguiendo con el proceso anterior, se tiene que  $x$  tiene la siguiente forma

$$T^{-x_n}ST^{-x_{n-1}}S \dots T^{-x_1}ST^{-x_0} = x,$$

lo anterior indica que existe  $N \in \mathbb{N}$  de tal forma que  $f_\Gamma^N(x) = x$ , en este caso

$$N = |x_0| + |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + n.$$

Por otro lado, si  $x \notin (-1, 1)$ , existe  $M_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $f_\Gamma^{M_0}(x) \in (-1, 1)$  y se aplica el argumento anterior.

- B. Si  $x$  es eventualmente periódico, significa que se puede aplicar a  $x$  un número finito de veces cada una de las transformaciones  $S$  y  $T$ , así, posteriormente el número se vuelve periódico y por tanto, es una consecuencia inmediata del caso anterior. ■

**Teorema 3.1.1.** Si  $x \in \mathbb{Q}$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $f_\Gamma^N(x) = \infty$ .

*Demostración.* Para garantizar la existencia de  $N$  tal que la  $N$ -ésima iteración de  $f_\Gamma \rightarrow \infty$ , se consideran los casos

- Si  $x$  es un número entero

$$\begin{aligned} x &= m \\ f_\Gamma^{|m|}(x) &= 0 \\ f_\Gamma^{|m|+1}(x) &= \infty. \end{aligned}$$

- Si  $x$  es un número racional no entero, su descomposición como fracción continua es finita, ya que al ajustar el algoritmo en [KO], se puede escribir una fracción equivalente tal como se indica:

1. Si  $x$  es un entero,  $x = [x]$ , el algoritmo termina. Si  $x$  no es un entero, se sustrae del número su parte entera y se escribe:

$$x = [x] - \frac{1}{\frac{-1}{x-[x]}}.$$

Se hace  $a_0 = [x]$  y  $r_1 = \frac{-1}{x - a_0}$ .

2. Supóngase que se han completado  $k - 1$  pasos y se obtuvieron los números  $a_{k-2}$  y  $r_{k-1}$ . Se encuentran  $a_{k-1}$  y  $r_k$ :

$$r_{k-1} = [r_{k-1}] - \frac{1}{\frac{-1}{r_{k-1} - [r_{k-1}]}}.$$

Entonces, se hace  $a_{k-1} = [r_{k-1}]$  y  $r_k = \frac{-1}{r_{k-1} - a_{k-1}}$ .

Por tanto, si  $x$  es un número racional, este puede escribirse como

$$\frac{p}{q} = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \cdots \frac{1}{a_{n-2} - \frac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{a_n}}}}},$$

donde cada  $a_n$  es un entero, luego, la representación del número racional  $x$  como fracción continua, permite concluir, que bajo  $f_\Gamma$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$N = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| + n.$$

$$f_\Gamma^N(x) = \infty \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$



**Observación.** Para el Teorema 3.1.1, la clave está en escribir el número como una fracción continua con entradas en los números enteros, esta descomposición también la garantiza [BH]. Los números racionales pueden identificarse con los vértices del GRAFO DE FAREY, los cuales resultan de la acción del grupo modular sobre la geodésica que conecta 0 con  $\infty$ .

**Ejemplo 6.** El número racional  $x = \frac{9}{7}$ , puede escribirse como

$$\frac{9}{7} = 1 - \frac{1}{-3 - \frac{1}{2}},$$

y esta descomposición permite asociar su itinerario:

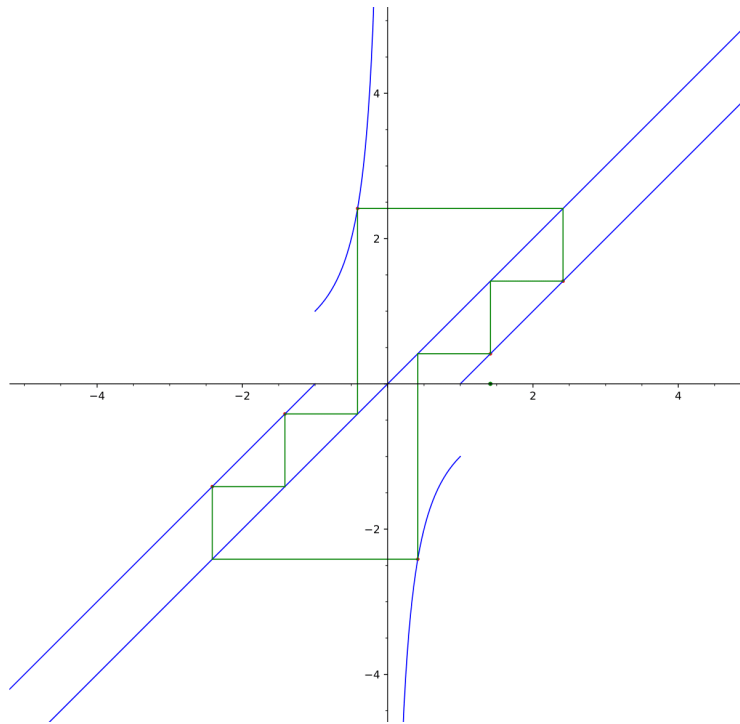
$$40222044\bar{0},$$

en  $\sum |f_\Gamma$ .

**Ejemplo 7.** Para  $x = \sqrt{2}$ , se tiene

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} = 1.41421356237310\dots \\ f_\Gamma(\sqrt{2}) &= -1 + \sqrt{2} = 0.414213562373095\dots \\ f_\Gamma^2(\sqrt{2}) &= -\frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = -(\sqrt{2} + 1) = -2.41421356237309\dots \\ f_\Gamma^3(\sqrt{2}) &= 1 - \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = -\sqrt{2} = -1.41421356237310\dots \\ f_\Gamma^4(\sqrt{2}) &= 2 - \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = -\sqrt{2} + 1 = -0.41421356237310\dots \\ f_\Gamma^5(\sqrt{2}) &= -\frac{1}{2 - \frac{1}{-1 + \sqrt{2}}} = -1 + \sqrt{2} = 2.41421356237310\dots \\ f_\Gamma^6(\sqrt{2}) &= 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{-1 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} = 1.41421356237310\dots \end{aligned}$$

y sus órbitas se muestran en la Figura 3.2



**Figura 3.2:** Trayectoria de la órbita de  $x = \sqrt{2}$ .

La siguiente proposición, permite determinar órbitas periódicas con dos representantes en el intervalo de  $(-1, 1)$ . Por otro lado, se sabe por el Teorema 3.1.1, que la órbita de cualquier número racional  $x$  eventualmente converge a  $\infty$ , luego cualquier número periódico bajo  $f_\Gamma$  no puede ser un número racional.

**Proposición 3.1.2.** (EXISTENCIA DE PUNTOS PERIÓDICOS.) Si  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  y es solución de la ecuación  $N_2x^2 + N_1 \cdot N_2x + N_1 = 0$ ,  $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}^*$  y  $N_1 \cdot N_2 < 0$ , entonces

$$f_\Gamma^{|N_1|+|N_2|+2}(x) = x.$$

donde  $|N_1| + |N_2| + 2$  es el orden de  $x$ .

*Demostración.* Si  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , existe  $N_1 \in \mathbb{Z}^*$  tal que

$$f_\Gamma^{|N_1|}(x) = x + N_1 \in (-1, 1),$$

luego,  $f_0 f_\Gamma^{|N_1|}(x) = -\frac{1}{x + N_1}$  está fuera del intervalo  $[-1, 1]$  y por tanto, existe  $N_2$  en  $\mathbb{Z}^*$  tal que

$$f_\Gamma^{|N_2|} f_0 f_\Gamma^{|N_1|}(x) = N_2 - \frac{1}{x + N_1} \in (-1, 1)$$

luego, al resolver

$$-\frac{1}{N_2 - \frac{1}{x + N_1}} = x$$

$$-1 = xN_2 - \frac{x}{x + N_1}$$

$$-(x + N_1) = xN_2(x + N_1) - x$$

$$-x - N_1 = N_2x^2 + N_1N_2x - x$$

$$N_2x^2 + N_1 \cdot N_2x + N_1 = 0.$$

■

Las soluciones de  $N_2x^2 + N_1N_2x + N_1 = 0$  proporcionan órbitas periódicas de orden  $|N_1| + |N_2| + 2$  con 2 representantes en  $(-1, 1)$ .

**Observación.** La condición  $N_1 \cdot N_2 < 0$  garantiza que la ecuación  $N_2x^2 + N_1 \cdot N_2x + N_1 = 0$ , tenga soluciones reales.

**Teorema 3.1.2.** Si  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , con  $|x| > 1$  tal que

$$-\frac{1}{N_{2n} - \frac{1}{N_{2n-1} - \frac{1}{N_{2n-2} \cdots - \frac{1}{N_1 + x}}}} = x, \quad \text{Sig}(N_1 \cdot N_3 \cdots N_{2n-1}) = -\text{Sig}(N_2 \cdot N_4 \cdots N_{2n}),$$

entonces  $x$  es un punto periódico bajo  $f_\Gamma$  de orden

$$\sum_{k=1}^n (|N_{2k}|) + 2 \cdot (n - 1).$$

*Demostración.* Se procede por inducción, el caso base lo proporciona la Proposición 3.1.2. La condición

$$\text{Sig}(N_1 \cdot N_3 \cdots N_{2n-1}) = -\text{Sig}(N_2 \cdot N_4 \cdots N_{2n}),$$

garantiza que la ecuación tenga raíces reales. ■

**Ejemplo 8.** Al considerar  $N_1 = -1$  y  $N_2 = 1$  se obtiene la ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0$$

y sus soluciones son

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

donde

$$\begin{aligned} x &= \phi \\ f_\Gamma(\phi) &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ f_\Gamma^2(\phi) &= f_\Gamma\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{-2(-1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ f_\Gamma^3(\phi) &= f_\Gamma\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ f_\Gamma^4(\phi) &= f_\Gamma\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-2}{1 - \sqrt{5}} = \frac{-2(1 + \sqrt{5})}{-4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi. \end{aligned}$$

**Proposición 3.1.3.** *Toda órbita periódica bajo  $f_\Gamma$  es repulsora en  $\mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Para que un punto  $x_0$  esté en una órbita periódica, la transformación

$$f_\Gamma^n(x) = f_{r_{n-1}} f_{r_{n-2}} \cdots f_{r_1} f_{r_0}(x),$$

contiene a  $f_0 = -\frac{1}{x}$  para al menos un  $r_k$ , por tanto, para la órbita periódica  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$  se tendrá que

$$\begin{aligned} (f_\Gamma^n)'(x_0) &= (f_{r_{n-1}} f_{r_{n-2}} \cdots f_{r_1} f_{r_0})'(x_0) \\ &= f'_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cdot f'_{r_{n-2}}(x_{n-2}) \cdots f'_{r_1}(x_1) \cdot f'_{r_0}(x_0), \end{aligned}$$

donde  $f'_{r_k}(x) = 1$  si  $r_k \neq 0$  y  $f'_{r_k}(x) = \frac{1}{x^2}$  si  $r_k = 0$ .

Sean  $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}$  los puntos de la órbita periódica que están en el interior de  $(-1, 1)$ , entonces

$$\begin{aligned} (f_\Gamma^n)'(x_0) &= (f_{r_{n-1}} f_{r_{n-2}} \cdots f_{r_1} f_{r_0})'(x_0) \\ &= f'_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cdot f'_{r_{n-2}}(x_{n-2}) \cdots f'_{r_1}(x_1) \cdot f'_{r_0}(x_0) \\ &= f'_0(x_{\alpha_k}) \cdot f'_0(x_{\alpha_{k-1}}) \cdots f'_0(x_{\alpha_2}) \cdot f'_0(x_{\alpha_1}) \\ &= \frac{1}{(x_{\alpha_k})^2} \cdot \frac{1}{(x_{\alpha_{k-1}})^2} \cdots \frac{1}{(x_{\alpha_1})^2} \\ |(f_\Gamma^n)'(w_0)| &= \frac{1}{|x_{\alpha_k}|^2} \cdot \frac{1}{|x_{\alpha_{k-1}}|^2} \cdots \frac{1}{|x_{\alpha_1}|^2} > 1 \end{aligned}$$

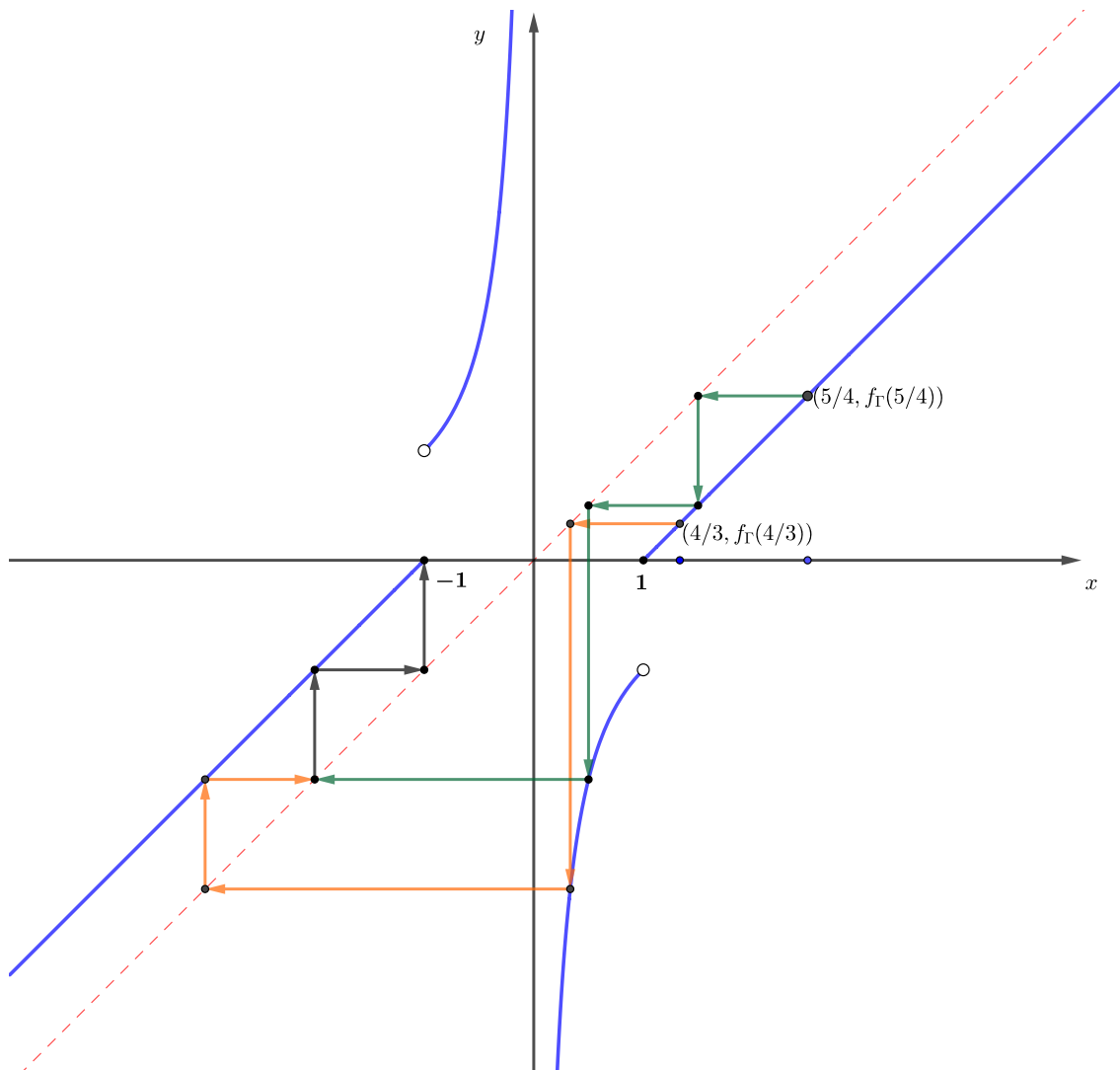
de donde,  $x_0$  genera una órbita repulsora. ■

## 3.2. Estudio numérico de órbitas

### Trayectorias de números racionales

El Teorema 3.1.1 garantiza que las órbitas de cualquier número racional bajo  $f_\Gamma$  eventualmente cotienen a 0 y a  $\infty$ , aunque dependiendo del número racional, sus órbitas pueden tener varios representantes en  $(-1, 1)$  antes de alcanzar el punto del infinito.

**Ejemplo 9.** Para  $x = \frac{4}{3}$ , y  $x = \frac{5}{4}$  se muestran sus trayectorias en la Figura 3.3

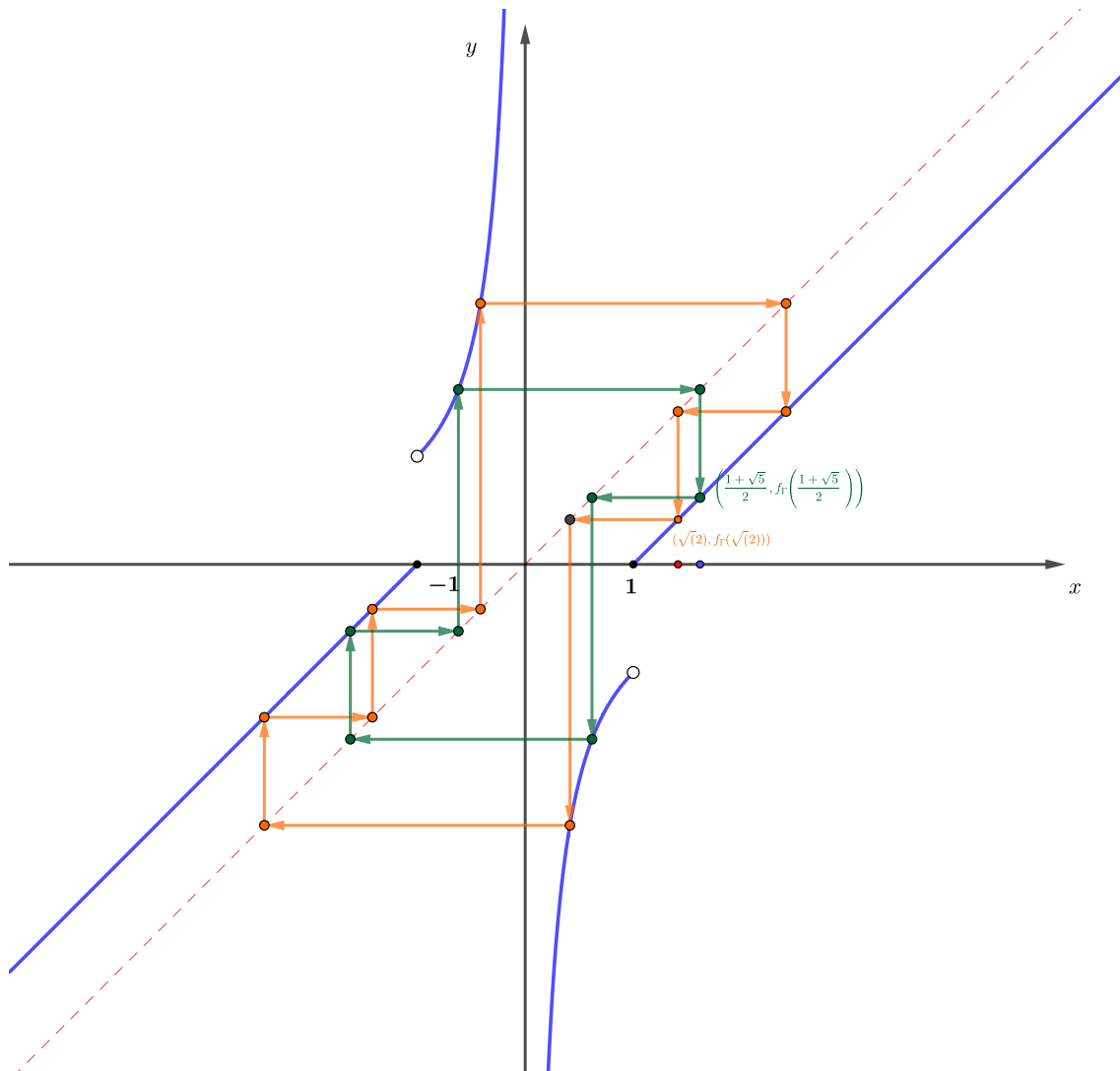


**Figura 3.3:** Trayectorias de la órbita de  $x = \frac{4}{3}$  y  $x = \frac{5}{4}$ .

## Algunas trayectorias periódicas

La proposición 3.1.1 garantiza que cualquier número irracional cuadrático es periódico bajo  $f_\Gamma$ .

**Ejemplo 10.** Para  $x = \sqrt{2}$  y  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  se muestran sus trayectorias en la 3.4.

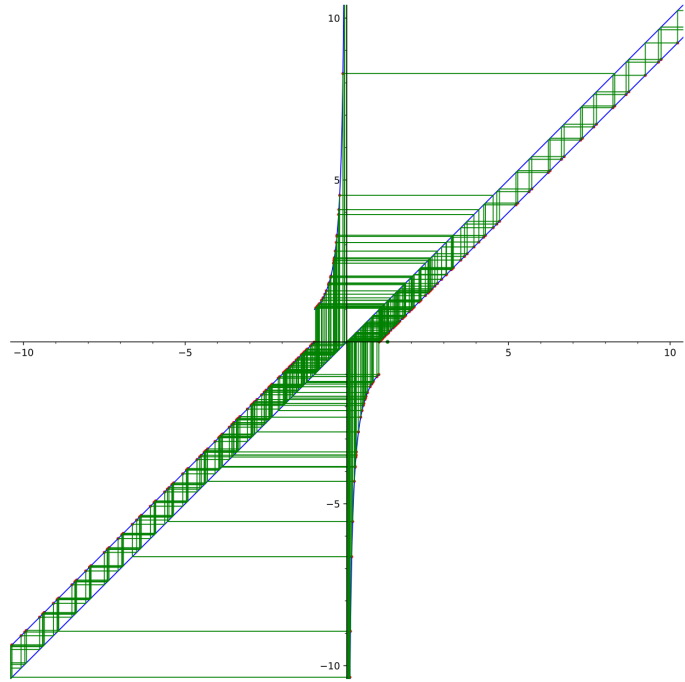


**Figura 3.4:** Trayectorias de la órbita de  $x = \sqrt{2}$  y  $x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ .

### Las órbitas de $\sqrt[3]{p}$ , con $p$ un número primo

**Ejemplo 11.** Para  $p = 2$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[3]{2} = 1.25992104989487 \\
 f_\Gamma(\sqrt[3]{2}) &= 0.259921049894873 \\
 &= \vdots \\
 f_\Gamma^5(\sqrt[3]{2}) &= -0.847322101863072 \\
 &= \vdots \\
 f_\Gamma^{17}(\sqrt[3]{2}) &= -0.22092167902521 \\
 &= \vdots \\
 f_\Gamma^{22}(\sqrt[3]{2}) &= 0.52649103706065 \\
 &= \vdots \\
 f_\Gamma^{26}(\sqrt[3]{2}) &= 0.11189244189255 \\
 &= \vdots \\
 f_\Gamma^{35}(\sqrt[3]{2}) &= -0.93715413736627 \\
 f_\Gamma^{36}(\sqrt[3]{2}) &= 1.06706032671461 \\
 f_\Gamma^{37}(\sqrt[3]{2}) &= 0.06706032671461 \\
 f_\Gamma^{38}(\sqrt[3]{2}) &= -14.9119464367611 \\
 &= \vdots \\
 f_\Gamma^{115}(\sqrt[3]{2}) &= -0.0755733032233
 \end{aligned}$$



**Figura 3.5:** Trayectoria de la órbita de  $x = \sqrt[3]{2}$ .

El itinerario asociado a  $x = \sqrt[3]{2}$  estaría dado por

$$40222204444444444444440222220 \dots$$

y su representación como fracción continua tiene la forma

$$\sqrt[3]{2} = 1 - \frac{1}{-4 - \frac{1}{12 - \frac{1}{-5 \dots}}}$$

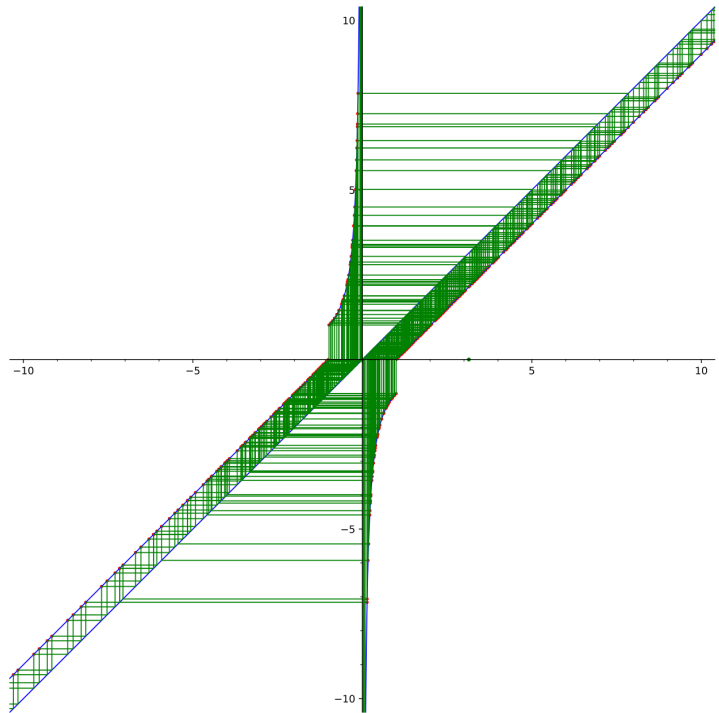
La representación como fracción continua es infinita no periódica, lo cual garantiza que su itinerario sea infinito, como número algebraico cúbico, no puede ser raíz de la ecuación

$$f_\Gamma^n(x) = x,$$

ya que esta siempre será una ecuación cuadrática con coeficientes en  $\mathbb{Q}$ . Por tanto, ¿Cómo son las órbitas de estos números? ¿Son errantes o densas? Con base a experimentación computacional, la órbita de  $\sqrt[3]{2}$  podría ser densa.

## Las órbitas de $\pi$

$$\begin{aligned}
 x = \pi &= 3.141592653589793 \\
 &\vdots \\
 f_\Gamma^3(\pi) &= 0.141592653589793 \\
 &\vdots \\
 f_\Gamma^{11}(\pi) &= -0.06251330593105209 \\
 &\vdots \\
 f_\Gamma^{27}(\pi) &= 0.9965944066841033 \\
 &\vdots \\
 f_\Gamma^{29}(\pi) &= -0.003417231015000244 \\
 f_\Gamma^{30}(\pi) &= 292.63459087501246 \\
 &\vdots \\
 f_\Gamma^{322}(\pi) &= 0.6345908750124636
 \end{aligned}$$



**Figura 3.6:** Trayectoria de la órbita de  $x = \pi$ .

El itinerario asociado a  $x = \pi$  estaría dado por

$$4440222222204444444444444444402 \dots$$

y su representación como fracción continua tiene la forma

$$\pi = 3 - \frac{1}{-7 - \frac{1}{15 - \frac{1}{-1 - \frac{1}{292 \dots}}}}$$

La representación como fracción continua de cualquier número trascendente es infinita no periódica, ver [SH] esto garantiza que el itinerario asociado a cualquier número trascendente sea infinito. ¿Cómo son las órbitas de estos números? ¿Son errantes o densas? Con base a experimentación computacional, la órbita de  $\pi$  podría ser densa.

### 3.3. Conclusiones para $f_\Gamma$ en $\widehat{\mathbb{R}}$

Para  $x \in \widehat{\mathbb{R}}$

- Según el Teorema 3.1.1, todo número racional es eventualmente fijo; siendo  $\infty$  el único punto fijo, la órbita de cualquier número racional  $r$  tiene la forma

$$\{r, f_\Gamma(r), f_\Gamma^2(r), \dots, f_\Gamma^N(r), 0, \infty\}.$$

- Si  $x \in \mathbb{Q}'$ :

a. IRRACIONALES ALGEBRAICOS:

- CUADRÁTICOS: son números periódicos bajo  $f_\Gamma(x)$ , esto se desprende de su representación continua, infinita periódica.
- NO CUADRÁTICOS: Puesto, que la ecuación

$$f_\Gamma^n(x) = x,$$

es equivalente a resolver una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} \frac{Ax + B}{Cx + D} = x, \quad AD - BC \neq 0 \\ Ax + B = (Cx + D)x \\ Ax + B = Cx^2 + Dx \\ 0 = Cx^2 + (D - A)x - B, \end{aligned}$$

que conlleva a una ecuación cuadrática, por tanto, otro tipo de irracionales distintos a los irracionales cuadráticos, no pueden ser periódicos bajo  $f_\Gamma(x)$ . Sin embargo, su representación infinita como representación continua, permite asociar una secuencia infinita de símbolos en  $\sum_{f_\Gamma}$ . Lo que lleva a preguntarse, si la secuencia infinita asociada, pueda contener alguna secuencia periódica. Para números algebraicos no cuadráticos la representación como fracción continua periódica se conoce como el problema de Hermite; ver [SH], por tanto, estudiar los itinerarios de estos números con la función  $f_\Gamma$  proporciona una representación como fracción continua para estos números.

- b. IRRACIONALES TRASCENDENTES: ¿Son errantes o densos bajo  $f_\Gamma(x)$ ? Para el caso de números trascendentes, estos tendrían un itinerario no periódico. Esto se desprende del hecho de que su representación como fracción continua es infinita no periódica. Finalmente, de la experimentación numérica, se puede conjeturar que estos números podrían ser errantes o densos bajo  $f_\Gamma$ .

En resumen, para

$$f_\Gamma(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -\frac{1}{x}, & x \in (-1, 1) \\ x + 1, & x \leq -1 \\ \infty, & x = \infty. \end{cases}$$

- $\partial Q = \{-1, 1\}$ .

- $\text{Spid}(f_\Gamma) = \overline{\bigcup f_\Gamma^{-n}(\partial\mathcal{Q})} = \widehat{\mathbb{Q}}$ .
- El conjunto regular de  $f_\Gamma(x)$  estaría incluido en  $\mathbb{Q}'$ .
- La cuenca de atracción de  $x = \infty$  es todo  $\mathbb{Q}$ .

# Capítulo 4

## Dinámica para $f_\Gamma$ , donde $\Gamma$ es el grupo de Picard

Finalmente, en este Capítulo, se describe la dinámica de la aplicación definida en 2.4.1, la cual, extiende a la aplicación de Bowen-Series descrita en [BS1]. En adelante,  $\Gamma$  representa al grupo de Picard y  $f_\Gamma$  será una función definida en la frontera ideal del espacio hiperbólico, es decir,  $\partial\mathbb{H}^3 = \widehat{\mathbb{C}}$ . Se demuestran resultados análogos a los establecidos en el Capítulo anterior y se definen algunos elementos para el estudio de la dinámica de aplicaciones conformes por pedazos, ver [CL]. Se introducen elementos como, *el conjunto de discontinuidad, conjunto regular, la telaraña asociada a la transformación  $f_\Gamma$* , para posteriormente entender y clasificar la dinámica de las componentes conexas asociadas a la partición definida para  $f_\Gamma : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ .

### 4.1. Generalidades

La siguiente definición puede variar, dependiendo del contexto de trabajo, tanto en las características que las funciones componentes tengan (pueden ser isometrías o simplemente funciones continuas), otro elemento que puede variar es cómo se elige la partición para la función  $F : X \rightarrow X$ , donde  $F$  es una función continua o continua por pedazos y  $X$  como mínimo es un espacio topológico. En las construcciones descritas en el Capítulo 2, la partición ha sido de Markov, en el contexto de este trabajo, se pedirá únicamente que la partición, sea una partición topológica. Para más detalles, consultar [CL].

**Definición 4.1.1.** Una aplicación conforme por pedazos en  $\widehat{\mathbb{C}}$  es un par  $(\mathcal{P}, F)$  donde

- $\mathcal{P} = \{R_k\}_{k=1}^K \subset \widehat{\mathbb{C}}$  es un conjunto de regiones tales que:
  - $R_k$  es un conjunto abierto no vacío y conexo.
  - $\partial R_k$  es unión de curvas cerradas simples a trozos.
  - $R_k \cap R_j = \emptyset$  si  $k \neq j$ .
  - $\bigcup_{k=1}^K \overline{R}_k = \widehat{\mathbb{C}}$ .

- $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  donde cada función componente  $F|_{R_k} = f_k$  es la restricción de un automorfismo conforme de  $\widehat{\mathbb{C}}$  y  $F$  está indefinida en

$$\bigcup_{k=1}^K \partial R_k.$$

- Si  $\overline{R_i} \cap \overline{R_j} \neq \emptyset$  es un segmento de curva, entonces  $f_i \neq f_j$ .

**Observaciones.** ▪ Pese a que  $F$  está definida en  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $F$  puede ser discontinua en la frontera de cada pedazo y la definición de  $F$  en tales fronteras podría ser no natural.

- Las transformaciones por pedazos con las mismas funciones componentes y definición distinta en la frontera pueden producir comportamientos dinámicos diferentes.

**Definición 4.1.2.** El dominio de conformalidad de una aplicación conforme por pedazos  $(\{R_k\}_{k=1}^K, F)$ , es

$$R = R(F) = \bigcup_{k=1}^K R_k.$$

**Definición 4.1.3.** El conjunto de discontinuidad, es el conjunto frontera o conjunto de singularidad de  $(\{R_k\}_{k=1}^K, F)$ , es

$$\partial \mathcal{P} = \bigcup_{k=1}^K \partial R_k.$$

**Definición 4.1.4.** Para un conjunto  $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$  y una aplicación  $F : A \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ,

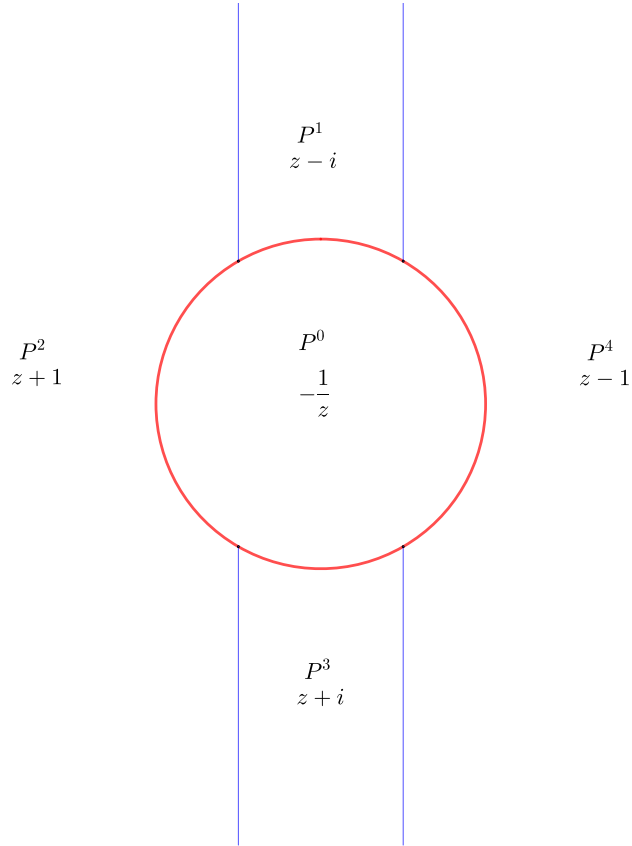
$$F^{-n}(A) := \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid F^n(z) \in A \right\}.$$

## 4.2. Definición para $f_\Gamma$ en la esfera de Riemann

Para la función  $f_\Gamma$  de la Definición 2.4.1 se elige una partición  $\mathcal{P}$  inducida por la acción del grupo de Picard sobre su dominio fundamental. Es de resaltar que la partición puede no ser única, pero se ha elegido e incluso la definición en la frontera, para que su restricción a la recta real extendida coincida con la función asociada al grupo modular.

**Definición 4.2.1.** LA APLICACIÓN ASOCIADA AL GRUPO DE PICARD.

Sea  $f_\Gamma : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$



donde  $\partial P^i$ ,  $i = 0, \dots, 4$  están dados por;

- $\partial P^0 = \emptyset$ .
- $\partial P^1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| = \frac{1}{2}, \Im(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \cup \left\{ e^{i\theta} \mid \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$ .
- $\partial P^2 = \left\{ e^{i\theta} \mid \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3} \right\}$ .
- $\partial P^3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| = \frac{1}{2}, \Im(z) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \cup \left\{ e^{i\theta} \mid \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3} \right\}$ .
- $\partial P^4 = \left\{ e^{i\theta} \mid \frac{5\pi}{3} < \theta < \frac{7\pi}{3} \right\}$ .

La telaraña asociada con  $f_\Gamma$  es

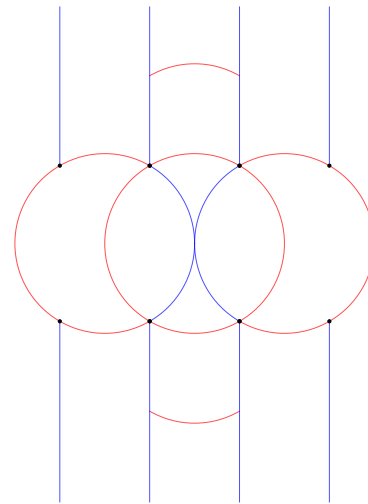
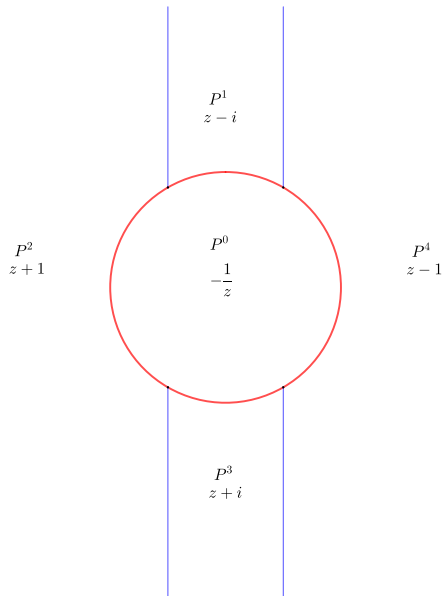
$$Spid(f_\Gamma) := \overline{\bigcup_{n \geq 0} f_\Gamma^{-n}(\partial \mathcal{P})},$$

y el conjunto regular

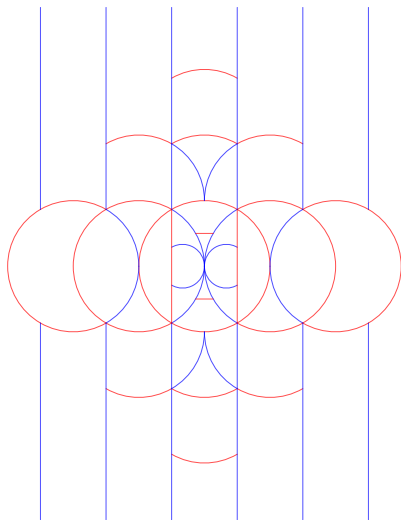
$$\mathcal{F}(f_\Gamma) := \widehat{\mathbb{C}} - \{Spid(f_\Gamma)\},$$

donde  $\partial \mathcal{P} = \cup \partial P^i$ , con  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

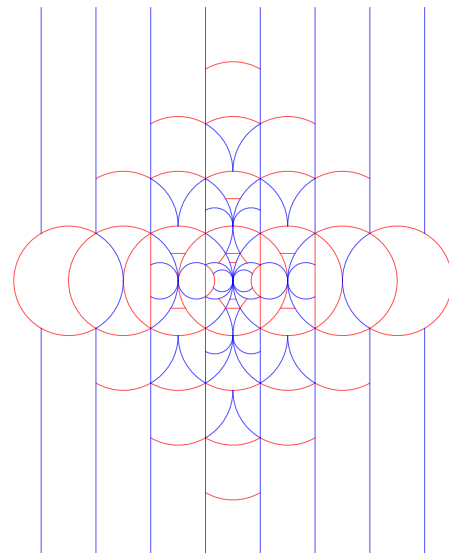
La siguiente secuencia de figuras muestra la primera, segunda y tercera preimagen de  $\partial\mathcal{P}$  bajo  $f_\Gamma$ .



**Figura 4.1:**  
 $f_\Gamma^{-1}(\mathcal{P})$



**Figura 4.2:**  
 $f_\Gamma^{-2}(\mathcal{P})$



**Figura 4.3:**  
 $f_\Gamma^{-3}(\mathcal{P})$

**Proposición 4.2.1.**  $Spid(f_\Gamma)$  es invariante hacia atrás y  $\mathcal{F}(f_\Gamma)$  es invariante hacia adelante, equivalentemente

$$f_\Gamma^{-1}(Spid(f_\Gamma)) \subset Spid(f_\Gamma)$$

y

$$f_\Gamma(\mathcal{F}(f_\Gamma)) \subset \mathcal{F}(f_\Gamma).$$

### 4.3. Espacio simbólico asociado a $f_\Gamma$

**Definición 4.3.1.** Para  $f_\Gamma : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ,

$$\sum_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}} = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, n \in \mathbb{N}\},$$

es el espacio de secuencias de 5 símbolos.

**Definición 4.3.2.** Para  $(s)$  y  $(t)$  en  $\sum_5$  se define

$$d(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{5^n}.$$

**Observación.** El par,  $(\sum_5, d)$  es un espacio métrico.

**Definición 4.3.3.** La función itinerario asociada al par  $(\mathcal{P}, f_\Gamma)$ , donde  $\mathcal{P} = \bigcup P^k$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Para un punto  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ : el itinerario de  $z$  es la secuencia infinita de  $0$ 's,  $\dots$ ,  $4$ 's

$$I(z) = (s_0 s_1 s_2 \dots),$$

donde  $s_j = 0$  si  $f_\Gamma^j(z) \in P^0, \dots$ , y  $s_j = 4$  si  $f_\Gamma^j(z) \in P^4$ .

**Definición 4.3.4.** EL REFINAMIENTO DE  $\mathcal{P}$ . Para cada  $r_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , se definen los conjuntos

$$P^{(r_0 r_1 r_2 \dots r_{n-1} r_n)} = f_\Gamma^{-n}(P^{r_n}),$$

donde,  $x \in P^{(r_0 r_1 r_2 \dots r_{n-1} r_n)}$  significa que

$$\begin{aligned} x &\in P^{r_0} \\ f_{r_0}(x) &\in P^{r_1} \\ f_\Gamma^2(x) &= (f_{r_1} f_{r_0})(x) \in P^{r_2} \\ &\vdots \\ f_\Gamma^n(x) &= (f_{r_{n-1}} \dots f_{r_1} f_{r_0})(x) \in P^{r_n}. \end{aligned}$$

**Definición 4.3.5.** Se define el espacio  $\sum_{f_\Gamma}$ , donde:

$$\sum_{f_\Gamma} = \left\{ (r_k)_{k=0}^\infty \in \sum_5 : \lambda \left( \bigcap_{k=0}^\infty f_\Gamma^{-k}(P^{r_k}) \right) > 0 \right\},$$

$\lambda$  es la medida de Lebesgue en la esfera de Riemann. El corrimiento unilateral por

$$\sigma_{f_\Gamma} : \sum_{f_\Gamma} \rightarrow \sum_{f_\Gamma},$$

donde

$$\sigma_{f_\Gamma}(r_k)_{k=0}^\infty = (r_{k+1})_{k=0}^\infty.$$

**Observación.** 1. En el espacio  $\sum_{f_\Gamma}$ , un bloque de símbolos  $r_k r_{k+1} r_{k+2}$  cumple:

- Si  $r_k = 0$  entonces  $r_{k+1} \neq 0$  si el itinerario viene de algún  $z \in \mathbb{Q}^c[i]$ .
- Si  $r_k = 1$  y  $r_{k+1} = 0$  entonces  $r_{k+2} \neq 3$ .
- Si  $r_k = 3$  y  $r_{k+1} = 0$  entonces  $r_{k+2} \neq 1$ .
- Si  $r_k = 2$  y  $r_{k+1} = 0$  entonces  $r_{k+2} \neq 2$ .
- Si  $r_k = 4$  y  $r_{k+1} = 0$  entonces  $r_{k+2} \neq 4$ .

2. Se reservará el símbolo  $000 \cdots 0 \cdots$  para  $z = \infty$ .

## 4.4. Resultados

### 4.4.1. Estudio de órbitas Periódicas

El siguiente resultado, permite calcular órbitas periódicas con exactamente un representante en  $\mathbb{D}$ , dicha proposición es análoga a la Proposición 3.1.2.

**Teorema 4.4.1.** *EXISTENCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS.*

Si  $z \in \mathcal{F}(f_\Gamma)$  con  $|z| > 1$ , tal que

$$z^2 + (m + ni)z + 1 = 0, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

entonces  $z$  es un punto periódico bajo  $f_\Gamma$  y tiene periodo  $|m| + |n| + 1$ .

*Demostración.* Puesto que  $z \in \mathbb{D}^c$ , existen enteros  $m$  y  $n$  tales que  $f_\Gamma^{|m|+|n|}(z) = z + m + ni \in \mathbb{D}$ , por tanto

$$f_0 f_\Gamma^{|m|+|n|}(z) = -\frac{1}{z + m + ni} \in \mathbb{D}^c,$$

luego, al resolver

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z + m + ni} &= z \\ -1 &= z^2 + (m + ni)z \\ z^2 + (m + ni)z + 1 &= 0, \quad \text{es equivalente a resolver} \\ f_0(z + m + ni) &= z \\ f_0 f_\Gamma^{|m|+|n|}(z) &= z, \quad f_0(z) = -\frac{1}{z} \\ f_\Gamma^{|m|+|n|+1}(z) &= z. \end{aligned}$$

■

El Teorema previo, caracteriza órbitas periódicas de orden  $|m| + |n| + 1$  con un solo representante en  $\mathbb{D}$ .

**Observaciones.** 1. El resultado previo permite concluir que  $f_\Gamma$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{C}$  ya que éstos serían solución de la ecuación

$$z^2 + 1 = 0,$$

sin embargo,  $z = \pm i$  no son puntos fijos bajo  $f_\Gamma(z)$ .

2. Los puntos de período 2 son soluciones de las ecuaciones:

$$z^2 \pm iz + 1 = 0.$$

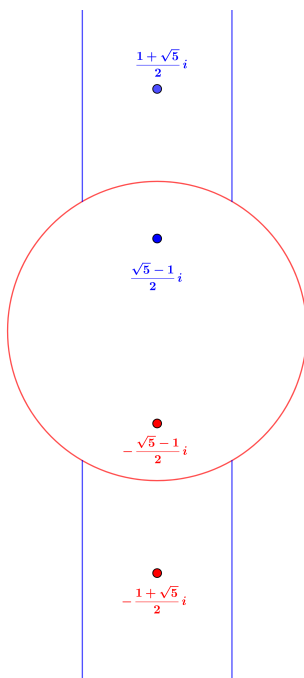
La ecuación

$$z^2 - iz + 1 = 0,$$

proporciona los puntos periódicos  $u_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}i$  y  $u_2 = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}i$ . Por otro lado, la ecuación

$$z^2 + iz + 1 = 0,$$

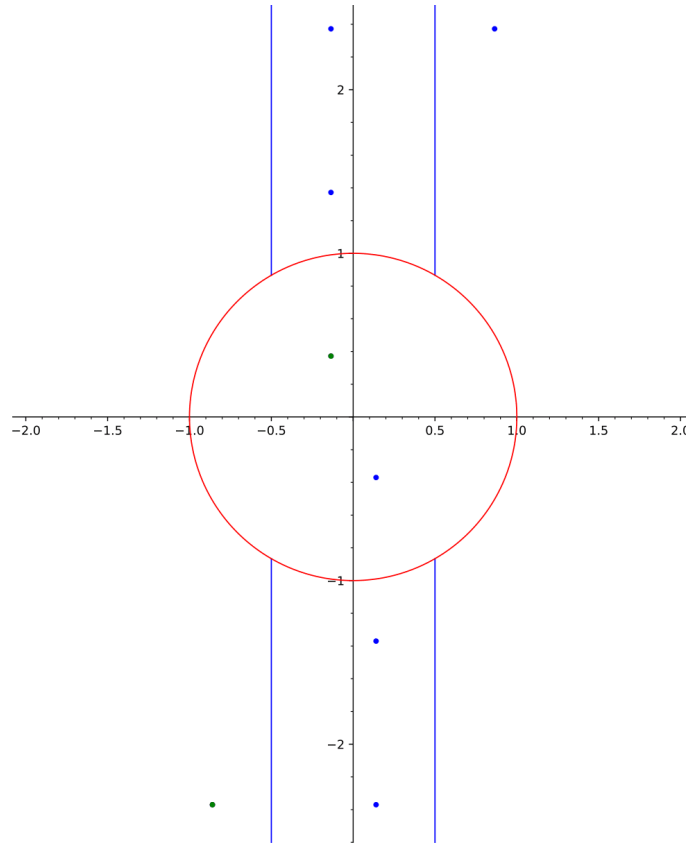
proporciona los puntos periódicos  $v_1 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}i$  y  $v_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}i$ , ver Figura 4.4.



**Figura 4.4:** Puntos periódicos de orden 2.

3. Para cualquier  $N \geq 3$ ,  $N \in \mathbb{N}$  existe una órbita de período  $N$  bajo  $f_\Gamma(z)$ .

**Ejemplo 12.** Las soluciones  $z_1 = 0.13560\dots + 0.37214\dots i$  y  $z_2 = -0.86\dots - 2.37\dots i$  de la ecuación  $z^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$ , son órbitas periódicas de orden 4, las cuales se muestran en la Figura 4.5.



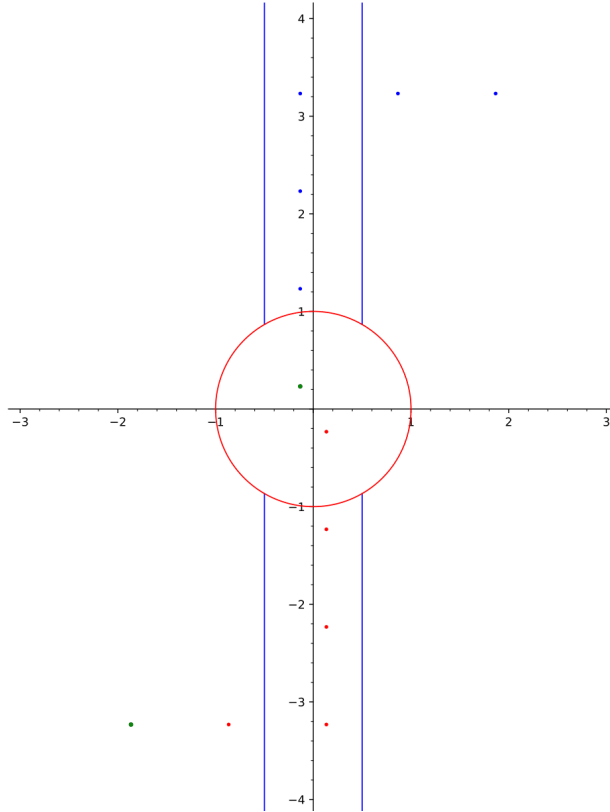
**Figura 4.5:** Órbitas de  $z_1$  y  $z_2$ .

**Ejemplo 13.** Las soluciones de la ecuación  $z^2 + (2 + 3i)z + 1 = 0$  son

$$z_1 = -\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}i,$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{3} + 2}{2} - \frac{2\sqrt{3} + 3}{2}i$$

y sus órbitas se muestran en la Figura 4.6.



**Figura 4.6:** Órbitas de  $z_1$  y  $z_2$

El siguiente resultado, extiende los Teoremas 4.4.1 y 3.1.2, permitiendo encontrar órbitas periódicas bajo  $f_\Gamma$  con exactamente  $k$  representantes en  $\mathbb{D}$ .

**Teorema 4.4.2.** Si  $z \in \mathcal{F}(f_\Gamma)$ , con  $|z| > 1$  es tal que

$$[M_k : M_{k-1} : \cdots : M_1 + z] = z,$$

o bien

$$M_k + [M_{k-1} : \cdots : M_1 : z] = z, \text{ con } M_i \in \mathbb{Z}[i] \text{ y } |z| < 1,$$

entonces  $z$  un punto periódico bajo  $f_\Gamma(z)$  y su órbita tiene orden

$$\sum_{j=1}^k (|\Re(M_j)| + |\Im(M_j)|) + k.$$

*Demostración.* Si se quiere una órbita periódica con  $k$  representantes en el disco unitario, se deben analizar dos casos:

- Un punto representante de la órbita está fuera del disco.

Existe  $M_1 \in \mathbb{Z}[i]$  tal que  $f_\Gamma^{|\Re(M_1)|+|\Im(M_1)|}(z) = z + M_1 \in \mathbb{D}$ , por tanto

$$f_\Gamma^{|\Re(M_1)|+|\Im(M_1)|+1}(z) = -\frac{1}{M_1 + z} \in \mathbb{C} - \mathbb{D}$$

entonces, existe  $M_2 \in \mathbb{Z}[i]$  tal que

$$f_\Gamma^{|\Re(M_1)|+|\Re(M_2)|+|\Im(M_1)|+|\Im(M_2)|+1}(z) = M_2 - \frac{1}{M_1 + z} \in \mathbb{D}$$

luego,

$$f_\Gamma^{|\Re(M_1)|+|\Re(M_2)|+|\Im(M_1)|+|\Im(M_2)|+2}(z) = -\frac{1}{M_2 - \frac{1}{M_1 + z}} \in \mathbb{C} - \mathbb{D},$$

continuando de manera similar hasta algún  $k \in \mathbb{N}$ , al resolver

$$f_\Gamma^{\sum_{j=1}^k (|\Re(M_j)|+|\Im(M_j)|)+k}(z) = -\frac{1}{M_k - \frac{1}{M_{k-1} - \frac{1}{M_{k-2} \cdots M_2 - \frac{1}{M_1 + z}}}} = z,$$

las soluciones proporcionan órbitas periódicas. Equivalentemente, se puede reescribir

$$[M_k : M_{k-1} : \cdots : M_1 + z] = z, M_i \in \mathbb{Z}[i].$$

- Un representante de la órbita  $z$  está en  $\mathbb{D}$ . Si  $z \in \mathbb{D}$ ,  $-\frac{1}{z} \in \mathbb{D}^C$  y aplicar el caso anterior, se obtiene la ecuación

$$M_k - \frac{1}{M_{k-1} - \frac{1}{M_{k-2} - \frac{1}{M_{k-3} \cdots M_1 - \frac{1}{z}}}} = z,$$

equivalentemente, se puede escribir

$$[M_k; M_{k-1} : M_{k-2} : \cdots : M_1 : z] = z, \quad M_i \in \mathbb{Z}[i].$$

Las ecuaciones anteriores, sugieren una conexión entre fracciones continuas complejas e iteraciones bajo  $f_\Gamma(z)$ .

■

En completa analogía a la Proposición 3.1.3 se tiene:

**Proposición 4.4.1.** *Todas las órbitas periódicas bajo  $f_\Gamma$  son repulsoras.*

*Demostración.* Para que un punto  $w$  esté en una órbita periódica, la transformación

$$f_\Gamma^n(z) = f_{r_{n-1}} f_{r_{n-2}} \cdots f_{r_1} f_{r_0}(z),$$

contiene a  $f_0 = -\frac{1}{z}$  para al menos un  $r_k$ , por tanto, para la órbita periódica  $\{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$  se tendrá que

$$\begin{aligned} (f_\Gamma^n)'(w_0) &= (f_{r_{n-1}} f_{r_{n-2}} \cdots f_{r_1} f_{r_0})'(w_0) \\ &= f'_{r_{n-1}}(w_{n-1}) \cdot f'_{r_{n-2}}(w_{n-2}) \cdots f'_{r_1}(w_1) \cdot f'_{r_0}(w_0), \end{aligned}$$

donde  $f'_{r_k}(z) = 1$  si  $r_k \neq 0$  y  $f'_{r_k}(z) = \frac{1}{z^2}$  si  $r_k = 0$ .

Sean  $w_{\alpha_1}, \dots, w_{\alpha_k}$  los puntos de la órbita periódica que están en  $\mathbb{D}$ , entonces

$$\begin{aligned} (f_\Gamma^n)'(w_0) &= (f_{r_{n-1}} f_{r_{n-2}} \cdots f_{r_1} f_{r_0})'(w_0) \\ &= f'_{r_{n-1}}(w_{n-1}) \cdot f'_{r_{n-2}}(w_{n-2}) \cdots f'_{r_1}(w_1) f'_{r_0}(w_0) \\ &= f'_0(w_{\alpha_k}) \cdot f'_0(w_{\alpha_{k-1}}) \cdots f'_0(w_{\alpha_2}) \cdot f'_0(w_{\alpha_1}) \\ &= \frac{1}{(w_{\alpha_k})^2} \cdot \frac{1}{(w_{\alpha_{k-1}})^2} \cdots \frac{1}{(w_{\alpha_1})^2} \\ |(f_\Gamma^n)'(w_0)| &= \frac{1}{|w_{\alpha_k}|^2} \cdot \frac{1}{|w_{\alpha_{k-1}}|^2} \cdots \frac{1}{|w_{\alpha_1}|^2} > 1, \end{aligned}$$

de donde,  $w_0$  genera una órbita repulsora. ■

**Definición 4.4.1.** *Sea  $\mathcal{M}$  el conjunto de todas las transformaciones de Möbius de la forma*

$$T_\Gamma(z) = \frac{az + 1}{z} = a + \frac{1}{z},$$

donde  $a \in \mathbb{Z}[i]$ .

**Definición 4.4.2.** *La composición  $f_\Gamma$  es la secuencia de composiciones de elementos en  $\mathcal{M}$ .*

**Observación.** Note que

$$f_\Gamma^n(z) = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \cdots - \frac{1}{a_n - \frac{1}{z}}}}.$$

Los valores de  $f_\Gamma(\infty)$  son las fracciones continuas convergentes con entrada  $-1$  en el numerador y enteros gaussianos  $a_i$  en la parte inferior.

**Definición 4.4.3.** Una fracción continua finita asociada al grupo de Picard es una fracción continua de la forma

$$[a_0; a_1 : a_2 : \cdots : a_{n-1}] = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_3 - \cdots - \frac{1}{a_{n-1}}}},$$

donde  $a_i \in \mathbb{Z}[i]$  para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

**Definición 4.4.4.** Una fracción continua infinita asociada al grupo de Picard es una fracción continua de la forma

$$[a_0; a_1 : a_2 : \cdots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1 : a_2 : \cdots : a_n],$$

donde  $a_i \in \mathbb{Z}[i]$  para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

En la literatura moderna, las composiciones de elementos del grupo de Picard están relacionadas con el grafo de Picard-Farey.

**Definición 4.4.5.** El grafo de Picard-Farey,  $\mathcal{G}$  está formado por la órbita del segmento vertical  $L$  que conecta  $0$  e  $\infty$  bajo la acción del grupo de Picard.

Entre las principales propiedades del grafo de Picard-Farey [H] se tiene que los vértices del grafo son de la forma  $\frac{p}{q}$  donde  $p, q \in \mathbb{Z}[i]$ , es decir los números complejos con partes real e imaginaria un número racional y el propio infinito.

**Lema 4.4.1.** Si  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $f_\Gamma^N(z) = 0$ .

*Demostración.* La clave está en representar cualquier número complejo con partes real e imaginaria un número racional como una fracción continua de la forma  $[a_0; a_1 : a_2 : \cdots : a_{n-1}]$  y para lograrlo, se utiliza la composición  $f_\Gamma$  asociada en el grafo de Picard-Farey, por tanto existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que

$$p + qi = [a_0; a_1 : a_2 : \cdots : a_{n-1}] = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_3 - \cdots - \frac{1}{a_{n-1}}}}$$

$$\begin{aligned} f_\Gamma^M(p + qi) &= a_{n-1} \\ f_\Gamma^{M+|\Re(a_{n-1})|+|\Im(a_{n-1})|}(p + qi) &= 0 \\ f_\Gamma^{M+|\Re(a_{n-1})|+|\Im(a_{n-1})|+1}(p + qi) &= \infty. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} (|\Re(a_k)| + |\Im(a_k)|) + n.$$

■

### 4.4.2. Dinámica de componentes conexas

#### Consideraciones geométricas en $\widehat{\mathbb{C}}$

A. Recuérdese que  $\mathcal{P} = P^0 \cup P^1 \cup P^2 \cup P^3 \cup P^4$ , donde  $P^0$  es el casquete inferior de la esfera y  $P^1, \dots, P^4$  son triángulos, con un vértice en el punto al infinito y los otros vértices sobre el Ecuador.  $\mathcal{P} - P^0$  determina una partición del casquete superior en triángulos.

- Toda geodésica que pasa por  $\infty$  tiene que pasar por el polo sur: esto se desprende del hecho, que si un punto está sobre una circunferencia máxima, también lo está su antipodal. Particularmente, el antipodal de  $(0, 0, 1)$  es  $(0, 0, -1)$ .
- Al proyectar estereográficamente  $\partial\mathcal{P}$  en la esfera, se obtiene la siguiente configuración

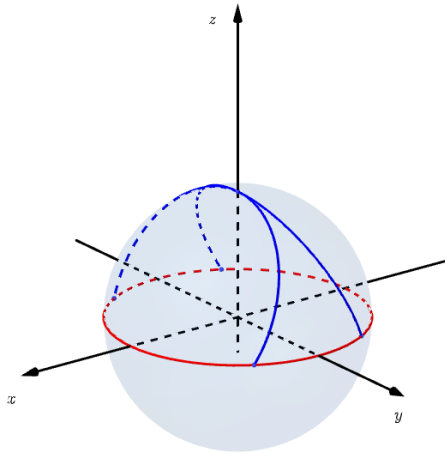


Figura 4.7: La partición  $\mathcal{P}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

- Sea  $T_G$  el triángulo geodésico por  $\infty$ ,  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  y  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , por tanto:

$$\begin{aligned} A(T_G) &= \alpha' + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi \\ &= \alpha'. \end{aligned}$$

Lo anterior se desprende del Teorema para el área de triángulos esféricos.

- El área de la región transformada de  $P^1$  en el disco tiene la forma

$$A(P^1) = 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)) d\theta,$$

donde  $r_1(\theta) = 1$  y  $r_2(\theta) = 2 \cos \theta$ , luego:

$$\begin{aligned}
 A(P^1) &= 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} - 2 \cos^2 \theta \right) d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{\pi}{6} - 4 \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{6} - 4 \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right] \\
 &= \frac{\pi}{6} - \pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

El área del triángulo  $P^1$  en la esfera, corresponde al área proyectada vía la proyección estereográfica en el casquete superior del área comprendida en el disco, la cual se ve afectada en un factor de 2 al trasladarla a la esfera, por tanto

$$\begin{aligned}
 A(P^1) &= A(P^3) = 2 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \cong 0.68485325637,
 \end{aligned}$$

luego, el área de  $P^1$  es positiva y mediante un argumento similar, las áreas de  $P^3$ ,  $P^2$  y  $P^4$  son positivas. Para encontrar el área de  $P^2$  en la esfera, se hace uso del hecho que el área de la superficie esférica del casquete superior es  $2\pi$ , por tanto,

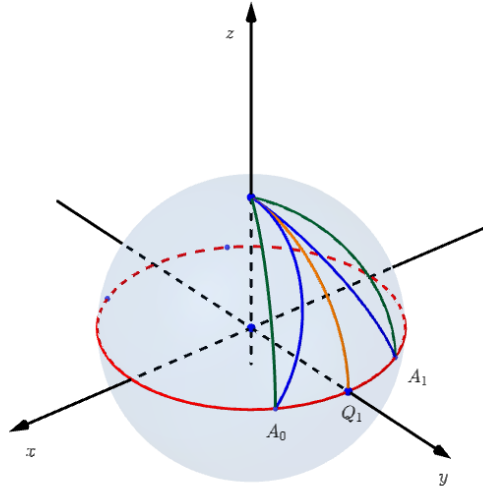
$$\begin{aligned}
 A(P^2) &= A(P^4) = \frac{2\pi - 2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)}{2} \\
 &= \pi - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \\
 &\cong 2.45673939722.
 \end{aligned}$$

B. Existe una constante  $C > 0$  tal que  $C < A(P^1) < A(T_G)$ .

a) Se biseca  $\alpha'$  hasta intersectar al lado  $A_0A_1$  en el punto  $Q_1$ . Puesto que los puntos  $A_0, Q_1$  y  $A_1$  están alineados se cumple

$$d(A_0, A_1) = d(A_0, Q_1) + d(Q_1, A_1)$$

y el ángulo en  $\infty$  es  $\frac{\alpha'}{2}$ .



b) Se biseca nuevamente el ángulo  $\frac{\alpha'}{2}$  hasta intersectar en un punto  $Q_2$  al arco  $A_0Q_1$ , luego

$$\begin{aligned} d(A_0, A_1) &= d(A_0, Q_1) + d(Q_1, A_1) \\ &= d(A_0, Q_2) + d(Q_2, Q_1) + d(Q_1, A_1) \end{aligned}$$

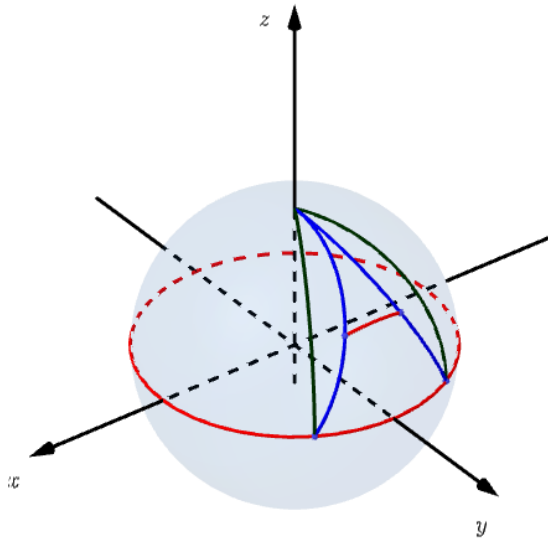
y el nuevo ángulo en el infinito mide  $\frac{\alpha'}{4}$  y al proceder iterativamente se obtiene

$$\begin{aligned} d(A_0, A_1) &= d(A_0, Q_2) + d(Q_2, Q_1) + d(Q_1, A_1) \\ &= d(A_0, Q_3) + d(Q_3, Q_2) + d(Q_2, Q_1) + d(Q_1, A_1). \end{aligned}$$

c) Siguiendo el proceso anterior:

- a.  $d(A_0, Q_n) \rightarrow 0$ , lo que implica que  $Q_n \rightarrow A_0$ .
- b. El área del triángulo geodésico  $A_0Q_n\infty$  siempre es positiva y vale  $\frac{\alpha'}{2^n}$ .
- c. Las transformaciones de Möbius son isometrías de la métrica esférica y conservan los ángulos.
- d. Al calcular el área de  $f_\Gamma^{-1}(P^1)$ :

$$A(f_\Gamma^{-1}(P^1)) < A(P^1).$$



La constante  $C$  es  $\frac{\pi}{6} \cong 0.52359877559$  ya que el área del triángulo  $T_G$  viene del área del sector de área  $\frac{\pi}{6}$ .

C. La medida de las áreas de los cuadriláteros es positiva.

*Demostración.* El área de cada cuadrilátero en cada  $P^i$  puede calcularse, descomponiéndolo en triángulos en la esfera o bien como una resta de las áreas conocidas de los triángulos  $P^i$  y  $f_\Gamma^{-1}(P^i)$  en el primer nivel de preimágenes. ■

Las observaciones anteriores demuestran que las áreas de las componentes conexas de  $f_\Gamma^{-n}(\mathcal{P})$  son positivas y están disminuyendo a medida  $n \rightarrow \infty$ .

**Definición 4.4.6.** La telaraña asociada a  $f_\Gamma$  es localmente finita en  $\mathbb{C}^*$ , si  $\infty$  es el único punto de acumulación de las secuencias

$$\{z_n\} \in f_\Gamma^{-n}(\partial\mathcal{P}).$$

**Corolario 4.4.1.** Los únicos puntos de acumulación de la  $\text{Spid}(f_\Gamma)$  son cero y el infinito.

**Lema 4.4.2.** LEMA GEOMÉTRICO. La partición generada por  $f_\Gamma$  está compuesta por triángulos y cuadriláteros.

*Demostración.* Como las componentes de  $f_\Gamma$  y sus inversas son transformaciones conformes, mandan circunferencias en circunferencias y por lo tanto dejan invariantes los lados de los triángulos que tienen vértice común en el punto al infinito. Como son traslaciones, los lados sobre el Ecuador se desplazan a lo largo de los lados fijos determinando subtriángulos contenidos en el triángulo

original y cuadriláteros en el complemento de los subtriángulos, pero dentro del triángulo inicial. La preimagen de  $P^1 \cup P^2 \cup P^3 \cup P^4$  bajo  $f_0$  determina una descomposición del casquete inferior, el cual es la reflexión con respecto al Ecuador de la descomposición inicial de casquete superior. Por lo tanto  $f_\Gamma^{-1}(\mathcal{P})$ , es una partición de la esfera por triángulos y cuadriláteros, la cual es un refinamiento de  $\mathcal{P}$  de la esfera.

Aplicando este esquema iterativo para toda  $n > 1$ , se obtiene una descomposición por triángulos y cuadriláteros de la esfera. ■

**Corolario 4.4.2.** *La medida de Lebesgue de las componentes de la partición generada bajo  $f_\Gamma$  es positiva.*

**Teorema 4.4.3.**  *$f_\Gamma$  semiconjugada al corrimiento unilateral, esto es, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}} - \text{Spid}(f_\Gamma) & \xrightarrow{f_\Gamma} & \widehat{\mathbb{C}} - \text{Spid}(f_\Gamma) \\ \downarrow I & & \downarrow I \\ \sum_{f_\Gamma} & \xrightarrow{\sigma} & \sum_{f_\Gamma} \end{array}$$

es conmutativo, es decir

$$\sigma \circ I = I \circ f_\Gamma.$$

*Demostración.* Sea  $s = (r_0 r_1 \cdots r_n \cdots)$  algún elemento de  $\sum_{f_\Gamma}$  y sea

$$s_n = (r_0 r_1 \cdots r_n),$$

por definición de  $\sum_{f_\Gamma}$ ,  $\lambda(P^{r_0 r_1 \cdots r_n}) > 0$  y

$$I(P^{r_0 r_1 \cdots r_n}) = s_n.$$

Como  $I$  es continua y tomando  $n \rightarrow \infty$  se concluye que

$$I(P^{r_0 r_1 \cdots r_n \cdots}) = s,$$

luego, la aplicación  $I$  es sobreyectiva. Para la conmutatividad del diagrama, se tiene:

Para  $s = (r_0 r_1 \cdots r_n \cdots)$

$$\sigma(s) = (r_1 r_2 \cdots r_n \cdots).$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f_\Gamma(P^{r_0 r_1 \cdots r_n \cdots}) &= P^{r_1 r_2 \cdots} \\ I \circ (f_\Gamma(z)) &= \sigma \circ (I(z)). \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.4.4. CONJETURA.** *Sea  $U$  una componente conexa de  $\mathcal{F}(f_\Gamma)$ . Dado  $r < 1$ , existe  $N \gg 1$  de tal manera que las componentes conexas de  $f_\Gamma^N(U)$  intersecan a cualquier vecindad de radio  $r$  de  $0$  o de  $\infty$ .*

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN:

Sea  $U$  una componente conexa cualquiera. Sin pérdida de generalidad, supóngase que  $U \in P^1$ , por tanto, existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $f_\Gamma^{N_1}(U) \in P^0$  y  $f_\Gamma^{N_1+1}(U)$  se descompone en una serie de componentes que son parte del refinamiento de la partición en la esfera de Riemann y pertenecen a alguna región triangular o rectangular, las cuales tienen área positiva y van disminuyendo según las Consideraciones Geométricas 4.4.2, por tanto, existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $f_\Gamma^{N_2+N_1+1}(U) \cap P^1 \neq \emptyset$ , dichos puntos eventualmente entran  $P^0$  y por tanto  $f_\Gamma^{N_2+N_1+2}(U)$  vuelve a descomponerse en una serie de componentes que son parte del refinamiento de la partición en la esfera de Riemann y pertenecen a alguna región triangular o rectangular de área positiva que está disminuyendo; continuando iterativamente el proceso hasta que las áreas de las regiones triangulares sean a lo más  $r$  en  $P^0$ , se tiene garantizado la existencia de  $N$  de la forma  $N_s + \dots + N_2 + N_1 + s$  tal que  $f_\Gamma^N(U) \subset P^0$  en algún vecindario de  $0$ , el cual en la siguiente iteración la componente caería en algún vecindario de  $\infty$ .

**Definición 4.4.7.** Se denota  $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ y } a \neq 0\}$ .

**Teorema 4.4.5.** CLASIFICACIÓN.

A. Si  $z \in \mathbb{Q}[i] \cap \mathcal{F}(f_\Gamma)$ , la órbita de  $z$  tiene la forma

$$\{z, f_\Gamma(z), f_\Gamma^2(z), \dots, f_\Gamma^N(z), 0, \infty\}.$$

B.  $\text{Per}(f_\Gamma) \subseteq \mathcal{C}$ .

C. Para  $z \in \mathbb{C}^* - \mathbb{Q}[i] \cup \text{Per}(f_\Gamma)$ , existe una sucesión de  $\{N_j\} \in \mathbb{N}$  y un entero positivo  $M \gg 1$  tal que

$$|f_\Gamma^{N_j}(z)| < \frac{1}{M}.$$

*Demostración.* ■ El literal A es una consecuencia de que la imagen de cualquier  $z \in \mathbb{Q}[i]$  eventualmente tiende a  $\infty$ .

- Si  $z \in \text{Per}(f_\Gamma)$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  para el cual  $f_\Gamma^N(z) = z$  y por tanto  $z$  pertenece a la órbita  $\{z, f_\Gamma(z), f_\Gamma^2(z), \dots, f_\Gamma^{N-1}(z)\}$ , donde  $|f_\Gamma^k(z)| \leq R = \max(|f_\Gamma^k(z)|)$ , así:  $|f_\Gamma^{N_j}(z)| \leq R$ .
- Si  $z \in \mathbb{C}^* - \mathbb{Q}[i] \cup \text{Per}(f_\Gamma)$ , su órbita es infinita, no periódica, sin embargo, cuando algún representante está en alguna componente conexa en el disco,  $|f_\Gamma^{N_j}(z)| < \epsilon$ , para lo cual siempre es posible encontrar un entero positivo  $M$  tal que  $|f_\Gamma^{N_j}(z)| < \frac{1}{M} \leq \epsilon < 1$  (**Propiedad Arquimediana de los Números Reales**) y en la siguiente iteración,  $|f_\Gamma^{N_j+1}(z)| \gg 1$ . ■

**Observaciones.** ■ Si  $z = p + qi$ , con  $p, q \in \mathbb{Z}$ , existe  $N$  tal que  $f_\Gamma^N(z) = \infty$ . Si  $z = p + qi$ , con  $p$  y  $q$  enteros, entonces

$$\begin{aligned} f_\Gamma^{|p|+|q|}(z) &= 0 \\ f_\Gamma^{|p|+|q|+1}(z) &= \infty. \end{aligned}$$

- Si  $z = 0 = 0 + 0 \cdot i$ , claramente  $f_\Gamma(0) = \infty$  ya que  $0 \in P^0$ .
- Si  $z = 1, -1, i, -i$

$$\begin{aligned} f_\Gamma^2(1) &= f_\Gamma(0) = \infty, \\ f_\Gamma^2(-1) &= f_\Gamma(0) = \infty, \\ f_\Gamma^2(i) &= f_\Gamma(0) = \infty, \\ f_\Gamma^2(-i) &= f_\Gamma(0) = \infty. \end{aligned}$$

- Finalmente, si  $z = m + ni \in (\mathbb{S}^1)^c$ , entonces  $z \in P^1 \cup P^2 \cup P^3 \cup P^4$  y en cualquiera de los casos, al aplicar la transformación  $|m|$  ó  $|n|$  veces, se tendrá

$$\begin{aligned} z &= m + ni \\ f_\Gamma^{|m|}(z) &= ni, \text{ si } z \in P^2 \text{ o bien } z \in P^4 \\ f_\Gamma^{|m|+|n|}(z) &= 0 \\ f_\Gamma^{|m|+|n|+1}(z) &= \infty. \end{aligned}$$

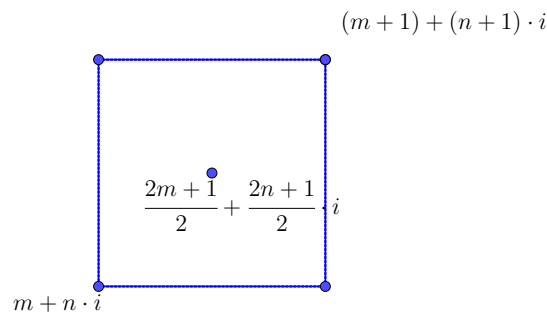
Por otro lado:

$$\begin{aligned} z &= mi, \quad m \in \mathbb{Z} \\ f_\Gamma^{|m|}(z) &= 0, \text{ si } z \in P^1 \text{ o bien } z \in P^3 \\ f_\Gamma^{|m|+1}(z) &= \infty. \end{aligned}$$

- Si  $z = p + qi$ , con  $p$  y  $q$  racionales, entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\begin{aligned} f_\Gamma^N(z) &= 0 \\ f_\Gamma^{N+1}(z) &= \infty. \end{aligned}$$

Al analizar las órbitas de los centros de los cuadrados determinados por los puntos de  $\mathbb{Z}[i]$  se tiene:



**Figura 4.8:** Centros de los cuadrados generados por  $\mathbb{Z}[i]$ .

Cada uno de estos centros tiene la forma

$$\begin{aligned} z &= \frac{2m+1}{2} + \frac{2n+1}{2}i \\ z &= m + ni + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ f_\Gamma^{|m|+|n|}(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Al analizar la órbita de  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ , se tiene

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ f_\Gamma(w) &= -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}i \\ f_\Gamma^2(w) &= -1 + i \\ f_\Gamma^3(w) &= i \\ f_\Gamma^4(w) &= 0 \\ f_\Gamma^5(w) &= \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, cualquier punto de la forma  $z = \frac{2m+1}{2} + \frac{2n+1}{2}i$ , luego de  $|m|+|n|+5$  iteraciones se va a  $\infty$ .

Por otro lado, al analizar las órbitas de los puntos de la forma

$$z = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}i, |n| \geq 2$$

se tiene

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}i \\ f_\Gamma(z) &= -\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} + \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}i \\ &= -\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}} + \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}}i \\ &= -\frac{n}{2} + \frac{n}{2}i. \end{aligned}$$

Los puntos anteriores, son los centros de los cuadrados determinados a lo largo de la recta identidad, los cuales también se irán a  $\infty$ .

- El caso general, para un número de la forma  $z = p + qi$  con  $p, q \in \mathbb{Q}[i]$  se desprende directamente del Lema [4.4.1](#).

### 4.4.3. Comportamiento estadístico de las órbitas

El siguiente resultado mide el tiempo promedio de estadía de las órbitas de  $f_\Gamma$  para la función característica del disco.

**Teorema 4.4.6.** *COMPORTAMIENTO ESTADÍSTICO DE LAS ÓRBITAS.*

Para todo punto  $z \in \mathbb{C}$ .

$$\tau_{\mathbb{D}}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{0 \leq j < n \mid f_\Gamma^j(z) \in \mathbb{D}\}| < \infty$$

y

$$\frac{\pi}{2} \leq \int_{\mathbb{C}} \tau_{\mathbb{D}} d\mu \leq \mu(\mathbb{D}) = \pi,$$

donde  $\mu$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{C}$ .

**Observación.** Nótese que  $\tau_{\mathbb{D}}(\infty) = 0$ .

*Demostración.* Primero, se demuestra que la función está definida para todo  $z \in \mathbb{C}$ . El límite siempre existe, ya que

- Si  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ , siempre es posible encontrar  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $f_\Gamma^N(z) = 0$ ,  $f_\Gamma^{N+1}(z) = \infty$ , por el Lema 4.4.1,  $\tau_{\mathbb{D}}(z) = 0$  para cualquier  $z$  con parte real e imaginaria un número racional.
- Si  $z$  es un punto periódico bajo  $f_\Gamma$  de periodo  $N$  con al menos  $K$  representantes en el disco, donde  $K < N$ .

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbb{D}}(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{0 \leq j < n \mid f_\Gamma^j(z) \in \mathbb{D}\}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K \cdot \lfloor \frac{n}{N} \rfloor}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K \cdot \left( \frac{n}{N} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left( 2\pi k \cdot \frac{n}{N} \right) \right)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{K}{N} - \frac{K}{2n} + \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left( 2\pi k \cdot \frac{n}{N} \right) \right) \\ &= \frac{K}{N} < 1. \end{aligned}$$

- Si  $z$  no es un punto periódico bajo  $f_\Gamma$ ,  $z$  tiene un itinerario infinito, no periódico en  $\sum_{f_\Gamma}$ , porque de lo contrario,  $z$  sería un número irracional cuadrático. Para un punto  $z$ , cuyo itinerario tiene la forma

$$I(z) = (s_0 s_1 s_2 \cdots s_n \cdots),$$

existe una secuencia infinita  $\{t_k\}$  tal que  $t_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ , lo cual sugiere que para algún bloque de la forma  $(s_0 s_1 s_2 \cdots s_{n-1})$  la cantidad de veces que aparece 0 es  $n - l(n)$ , donde  $l(n)$  es la

cantidad de dígitos no nulos y por tanto:

$$\begin{aligned}\tau_{\mathbb{D}}(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{0 \leq j < n \mid f_\Gamma^j(z) \in \mathbb{D}\}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - l(n)}{n} : \quad \text{donde } l \text{ es el número de dígitos no nulos en } I(z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{l(n)}{n}\right).\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\frac{l(n)}{n} \leq \frac{[n/2]}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & , n \text{ par,} \\ < \frac{1}{2} & , n \text{ impar.} \end{cases}$$

Por tanto

$$\frac{1}{2} \leq \left(1 - \frac{l(n)}{n}\right) < 1.$$

Nótese que la sucesión  $\left\{1 - \frac{l(n)}{n}\right\}$  es una sucesión monótona y acotada, por tanto es convergente, así, el límite anterior existe.

Finalmente:

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{\mathbb{C}}} \tau_{\mathbb{D}} d\mu &= \int_{\{\infty\} \cup \mathbb{Q}[i] \cup \text{Per}(f_\Gamma) \cup \text{Per}^c(f_\Gamma)} \tau_{\mathbb{D}} d\mu \\ &\leq 0 \cdot \mu(\{\infty\}) + 0 \cdot \mu(\mathbb{Q}[i]) + \frac{K}{N} \mu(\text{Per}(f_\Gamma)) + \mu(\text{Per}^c(f_\Gamma)) \\ &= 1 \cdot \mu(\mathbb{D}) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

■



# Capítulo 5

## Perspectivas

Derivado del estudio realizado en este trabajo, resulta razonable plantear las siguientes situaciones problemáticas a futuro:

- I. Hacer el estudio para un grupo kleiniano arbitrario con una cúspide.
- II. ¿Es posible relacionar la dinámica de un grupo así con la del grupo de Picard?
- III. Repetir el estudio para un grupo kleiniano arbitrario con un número finito de cúspides.

## Agradecimiento

*Dedico este trabajo a mi madre: Rosa Elida Rivas Chacón, por su apoyo incondicional en todo mi trayecto profesional, a mis hermanos, a mis amigos quienes acompañaron y estuvieron motivando en todo momento. A mis asesores, por su tiempo, su paciencia e ideas propuestas para la realización de este trabajo. A las instituciones que financiaron este proyecto, así como estancias de investigación CIMPA, CONACYT de El Salvador y sobre todo a la Universidad de El Salvador.*

# Bibliografía

- [AR] ANDERSON, JAMES W., AND ANDRÉ C. ROCHA. *Analyticity of Hausdorff dimension of limit sets of Kleinian groups*. ANNALES-ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE SERIES A1 MATHEMATICA. Vol. 22. ACADEMIA SCIENTIARUM FENNICA, 1997.
- [BH] BEARDON, ALAN F., M. HOCKMAN, AND IAN SHORT. *Geodesic continued fractions*. Michigan Mathematical Journal 61.1 (2012): 133-150.
- [BS1] BOWEN, ROBERT; SERIES, CAROLINE. *Markov maps associated with Fuchsian groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 50 (1979), 153–170.
- [BS2] BUFETOV, ALEXANDER I., AND CAROLINE SERIES. *A pointwise ergodic theorem for Fuchsian groups*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 151. No. 1. Cambridge University Press, 2011.
- [CL] CRUZ LÓPEZ, MANUEL. *Dynamics of Piecewise Conformal Automorphisms of the Riemann Sphere*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 25 (2005) 6, pp.1767–1774.
- [Dev] DEVANEY, ROBERT. *A first course in Chaotic Dynamical Systems*, Segunda Edición, 2020.
- [EJ] ELSTRODT, F. GRUNEWALD Y J. MENNICKE. *Groups acting on hyperbolic space*. Harmonic Analysis and Theory Number. Springer. *Hyperbolic manifolds and Kleinian Groups*. Oxford University Press, 2002.
- [H] HOCKMAN, MEIRA. *The Farey octahedron graph, the Poincaré polyhedron theorem and Gaussian integer continued fractions*. Annales mathématiques du Québec 44.1 (2020):149-164.
- [LM] LIND, DOUGLAS, AND BRIAN, MARCUS. *An Introduction to symbolics dynamics system and coding*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PREESS, 2021.
- [KO] KARPENKOV, OLEG N. *Geometry of Continued Fractions*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [KS] KATOK, SVETLANA. *Fuchsian Groups*. University of Chicago press, 1992.
- [Mar] MARDEN, ALBERT. *Hyperbolic Manifolds: An Introduction in 2 and 3 Dimensions*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PREESS, 2016.
- [MB] MASKIT, BERNARD *Kleinian groups*. Vol. 287. Springer Science and Business Media, 2012.
- [MT] MATSUZAKI, KATZUHIKO AND MASAHIKO, TANIGUCHI.

- [R] ROCHA, ANDRÉ CAVALCANTI. *Symbolic dynamics for Kleinian groups*. Diss. University of Warwick, 1994.
- [SH] SIEBECK, H. *Ueber periodische Kettenbrüche*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. (1846) 33: 68–70.