

**Universidad de El Salvador**

FACULTADA MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICA



**INFORME FINAL DEL CURSO DE ESPECIALIZACIÓN:**  
EN 3-VARIEDADES Y NUDOS TOPOLÓGICOS

**TÍTULO DEL INFORME FINAL:**  
CIRUGÍA EN 3-VARIEDADES

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:**  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

**PRESENTADO POR:**  
FRANCISCO DANIEL HERNÁNDEZ CUADRA N° CARNET HC19019

**DOCENTE ASESOR:**  
M.SS. JOSÉ JOAQUÍN APARICIO RAMÍREZ

**SEPTIEMBRE 2024**  
**SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA**

# Universidad de El Salvador

Autoridades



M.SC. JUAN ROSA QUINTANILLA

**RECTOR**

DRA. EVELYN BEATRÍZ FARFÁN

**VICERRECTORA ACADÉMICA**

M.SC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

**VICERRECTOR ADMINISTRATIVO**

LIC. PEDRO ROSALÍO ESCOBAR CASTANEDA

**SECRETARIO GENERAL**

LIC. CARLOS ALMILCAR SERRANO RIVERA

**FISCAL GENERAL**

**Universidad de El Salvador**

Autoridades



M.SC. CARLOS IVÁN HERNÁNDEZ FRANCO

**DECANO**

DRA. NORMA AZUCENA FLORES RETANA

**VICEDECANA**

LIC. CARLOS DE JESÚS SANCHÉZ

**SECRETARIO**

ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA MARTÍNEZ

**JEFE DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**

M.SC. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

**COORDINADORA DEL PROCESO DE GRADO DEL DEPARTAMENTO DE  
CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Topología en 3-variedades . . . . .	5
1.2. Nudos topológicos . . . . .	9
<b>2. La cirugía</b>	<b>12</b>
2.1. Superficies incompresibles . . . . .	12
2.2. Proceso de cirugía en 3-variedades . . . . .	14
2.3. La cirugía de Dehn . . . . .	18
<b>3. Aplicaciones</b>	<b>23</b>
3.1. La conjetura de Poincaré . . . . .	23
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>26</b>

## Resumen

Esta investigación presenta una introducción a la cirugía en 3-variedades, tomando conceptos básicos de topología sobre 3-variedades; La topología de 3-variedades es el estudio de espacios tridimensionales que, localmente, se comportan como el espacio euclidiano tridimensional. Estos espacios, conocidos como 3-variedades, son esenciales en el análisis de estructuras geométricas y topológicas. Un ejemplo simple de una 3-variedad es el propio espacio en el que vivimos,  $\mathbb{R}^3$ , pero también existen ejemplos más abstractos, como la esfera tridimensional  $\mathbb{S}^3$  o el toro tridimensional. y nudos topológicos; para luego ver cómo se realizar el proceso de cirugía manera descriptiva y luego validando todos esos procesos mediante la cirugía de Dehn. Finalizando en una aplicación, que una de ellas es en la conjetura de Poincaré, Esta conjetura fue un desafío central en la topología durante gran parte del siglo XX, ya que si bien existía una comprensión profunda de las esferas en dimensiones superiores o inferiores, la dimensión tres resultó ser especialmente difícil. Finalmente, en 2003, el matemático ruso Grigori Perelman demostró la conjetura utilizando herramientas avanzadas de la geometría y la topología, completando una serie de trabajos iniciados por el teorema de geometrización de Thurston. Su demostración fue revolucionaria y llevó a la resolución de uno de los problemas más fundamentales de la matemática, ganándole a Perelman el reconocimiento mundial y la Medalla Fields, que rechazó. Ahora se llama Teorema de Poincaré.

**Palabras clave:** cirugía, topología, Poincaré.

## Abstract

This research presents an introduction to surgery on 3-manifolds, starting with basic topology concepts related to 3-manifolds. The topology of 3-manifolds is the study of three-dimensional spaces that locally behave like three-dimensional Euclidean space. These spaces, known as 3-manifolds, are essential in the analysis of geometric and topological structures. A simple example of a 3-manifold is the very space we live in,  $\mathbb{R}^3$ , but there are also more abstract examples such as the three-dimensional sphere  $\mathbb{S}^3$  or the three-dimensional torus, and topological knots. We then explore how the surgery process is performed descriptively, followed by the validation of these processes through Dehn surgery. Finally, we conclude with an application, one of which is related to the Poincaré conjecture. This conjecture was a central challenge in topology throughout much of the 20th century. While there was a deep understanding of spheres in higher or lower dimensions, the three-dimensional case proved to be particularly difficult. Finally, in 2003, the Russian mathematician Grigori Perelman proved the conjecture using advanced tools from geometry and topology, completing a series of works initiated by Thurston's Geometrization Theorem. His proof was revolutionary and led to the resolution of one of the most fundamental problems in mathematics, earning Perelman worldwide recognition and the Fields Medal, which he declined. It is now known as the Poincaré Theorem.

**Keywords:** Surgery, topology, Poincaré.

## Introducción

La topología, por lo tanto, es la especialización que hace foco en el estudio de las funciones continuas y los espacios topológicos. Esta disciplina trabaja con los objetos de distintas formas, siempre que no se interrumpa la mencionada continuidad. En palabras del lenguaje cotidiano, podría decirse que la topología tiene permitido doblar, estirar, retorcer o encoger los elementos, pero sin quebrarlos ni segmentar aquello que esté unido ni pegar lo que esté separado. A nivel topológico, un triángulo es lo mismo que una circunferencia: uno puede ser transformado en el otro de manera continua, sin necesidad de cortar o pegar.

En cambio, una circunferencia nunca puede ser transformada en un segmento desde el punto de vista topológico, ya que dicha transformación requeriría de romper la continuidad de la figura. Entre las ramas de la topología, es posible distinguir general (también llamada conjuntista), la diferencial y la algebraica.

Ahora existe una especie de 'operación' en las estructuras topológicas llamada la cirugía; esta es una técnica matemática utilizada para modificar la estructura de un espacio topológico, generalmente una variedad. Se usa para construir nuevas variedades a partir de las existentes y para estudiar sus propiedades. En la cual solamente se tomará el caso para 3-variedades. Este trabajo presenta una pequeña introducción al mundo de cómo podemos nosotros operar sobre las 3-variedades topológicas.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Topología en 3-variedades

**Definición 1.1.1.** Una 3-variedad topológica  $M$  es un conjunto que es:

- 1) Tiene que ser Hausdorff ( $T_2$ ).
- 2) Tiene que ser un conjunto  $2^o$  numerable, es decir, para cada punto  $x \in M$ , existe un  $n \in \mathbb{Z}^+$ , una vecindad  $U$  de  $x$  y un homeomorfismo  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- 3) Existe una familia de pares (un atlas),  $\{M_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  que cumple:
  - $\forall \alpha \in I, M_\alpha$  es un abierto de  $M$ ,  $M = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$ .
  - $\forall \alpha \in \phi_\alpha : M_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(M_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo.

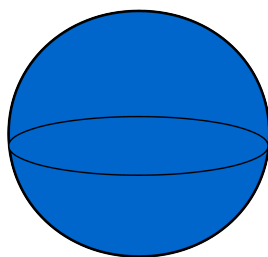


Figura 1.1:  $S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$

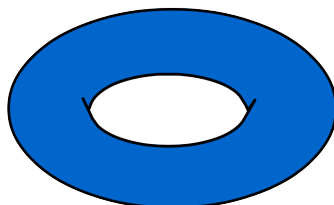


Figura 1.2:  $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$

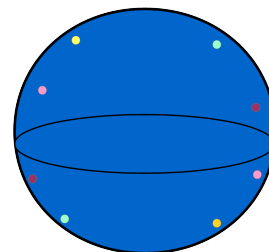


Figura 1.3: Pegando los puntos antipodales

La esfera  $S^3$  nos será de gran ayuda para el proceso de cirugía, pero antes de todo, demostraremos que  $S^n$  es una  $n$ -variedad, probando primero que  $\mathbb{R}^n$  es una  $n$ -variedad.

¿Es  $\mathbb{R}^n$  una n-variedad?

**Demostración:**

Primero se necesitará saber si es un conjunto  $T_2$  (Hausdorff); como  $\mathbb{R}$  sabemos que ya es un conjunto  $T_2$  y cómo el producto de conjuntos que son  $T_2$  sigue siendo  $T_2$  entonces  $\mathbb{R}^n$  es Hausdorff.

Análogamente, como  $\mathbb{R}$  sabemos que ya es un conjunto segundo numerable y cómo el producto de conjuntos que son segundo numerable sigue siendo segundo numerable entonces  $\mathbb{R}^n$  es segundo numerable.

Ahora solo nos quedará ver cual sería nuestro atlas, y en este caso pues es fácil ver que el homeomorfismo que se necesita es la identidad (ya se sabe que la identidad es un homeomorfismo), porque para cualquier n-bola que tomemos en  $\mathbb{R}^n$  me mandara a la misma n-bola mediante la función identidad por lo tanto nuestro atlas sería  $\{\mathbb{R}^n, I_d\}$ . ■

Ahora se demostrará que  $S^n$  es una n-variedad.

**Demostración:**

Sea  $M = S^n$  dónde  $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) / x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ ; ahora probaremos que  $M$  es una n-variedad.

¿Será  $M$  un conjunto que es Hausdorff? Primero observemos que todo subespacio de un conjunto que es Hausdorff es Hausdorff; ahora por la definición del propio conjunto, sabemos que  $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , y como  $\mathbb{R}^{n+1}$  es un conjunto que es Hausdorff, y además  $M = S^n$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; por lo tanto,  $S^n$  es Hausdorff.

Ahora, ¿es  $S^n$  un conjunto segundo numerable?, análogamente como se hizo para probar que es Hausdorff; como todo subespacio de un conjunto que es segundo numerable es segundo numerable; ahora por la definición del propio conjunto, sabemos que  $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , y como  $\mathbb{R}^{n+1}$  es un conjunto que es ya segundo numerable, y además  $M = S^n$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; por lo tanto,  $S^n$  es segundo numerable.

Para finalizar, nos queda demostrar la existencia de un atlas.

Sea  $M_1 = S^n - \{(0, 0, \dots, 1)\}$  y  $h : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección estereográfica.

Sabemos que la proyección estereográfica ya es un homeomorfismo, entonces ahora definiremos

$M_2 = S^n - \{(1, 0, 0, \dots, 0)\}$ , y definiremos la siguiente función.

$$M_2 \xrightarrow{r} \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

En dónde la función  $r$  es la reflexión por  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  y lo que hacemos es que nuestro homeomorfismo va ser  $h' = r \circ h$  dónde  $h' : M_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y lo que hacemos es lo siguiente: primero al aplicar la proyección estereográfica, me proyecta todos los puntos en el plano, para que veamos la idea observemos que es lo que pasa para  $\mathbb{R}^2$  observamos que todos los puntos de  $S^2$  se me proyectan en el plano, exceptuando el punto que eliminamos que fué el  $(0, 0, 0, \dots, 1)$  pero nos falta aún, un abierto para ese punto y lo que hacemos es usar la función reflexión para abarcar dicho punto; en donde ya aplicando la función, el punto que eliminamos que en particular es el único que os interesa porque es el que nos falta, se refleja en el plano en  $\mathbb{R}^2$ . Y esta misma lógica la heredamos para  $n$  dimensiones. De este modo, nuestro atlas sería  $\{(M_1, h), (M_2, h')\}$ .

Por lo tanto,  $S^n$  es una  $n$ -variedad. ■

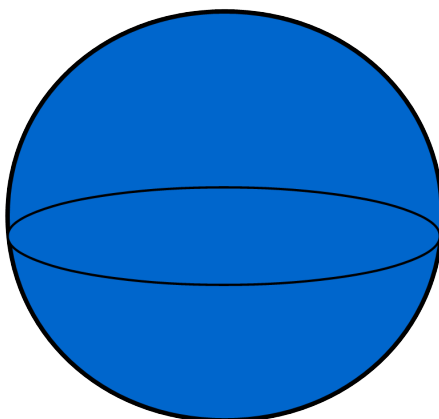
**Definición 1.1.2.** Sea  $M$  una 3-variedad con frontera si cumple que:

- 1) Tiene que ser Hausdorff ( $T_2$ ).
- 2) Tiene que ser un conjunto  $2^o$  numerable, es decir, para cada punto  $x \in M$ , existe un  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , una vecindad  $U$  de  $x$  y un homeomorfismo  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- 3) Existe un atlas  $\{(M_\alpha, \phi_\alpha)\}$  tal que  $\phi_\alpha : M_\alpha \rightarrow H^3$  es un homeomorfismo; es decir,  $M_\alpha$  es homeomorfo a un abierto de  $H^n$ .

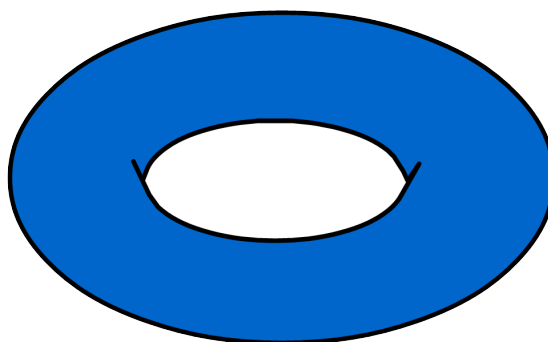
También vamos a definir a la **frontera** de una 3-variedad como el conjunto  $Fr(M) = \{x \in M / \exists M_\alpha \ni x \text{ tal que } M_\alpha \cong H^3\} = \partial(M)$ .

**Definición 1.1.3.** Diremos que una 3-variedad  $M$  es **cerrada** si el borde de  $M$  es vacío y es compacta.

Observemos que en  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



su frontera es vacía y además es compacta, por lo tanto  $S^2$  es una variedad cerrada. De igual manera pasa lo mismo con el  $T^2 = S^1 \times S^1$ ,



su frontera es vacía y además es compacta, por lo tanto  $T^2$  también es una variedad cerrada.

**Definición 1.1.4.** Dadas  $M$  y  $N$  dos variedades y  $f : M \rightarrow N$ . Diremos que  $f$  es un encaje ó embebimiento si  $f|_{f(M)}$  es un homeomorfismo.

**Definición 1.1.5.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos, y  $f$  una función de  $X$  a  $Y$ ; entonces,  $f$  es un homeomorfismo si se cumple que:

- $f$  es una función continua bien definida.
- $f$  es una biyección.
- La inversa de  $f$  es continua.

**Definición 1.1.6.** Un difeomorfismo es un isomorfismo en la categoría de las variedades diferenciables; es decir, Dadas dos variedades  $M$  y  $N$ , una aplicación  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo si es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable. ( $M \approx N$ )

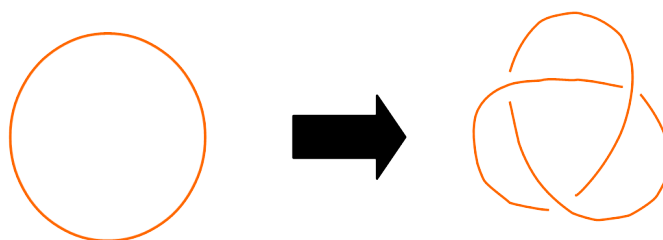
**Definición 1.1.7.** Sean  $M$  y  $N$  3-variedades. Dos funciones  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$  son homotópicas si existe una función continua  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que  $H(x, 0) = f_0(x)$  y  $H(x, 1) = f_1(x)$  para todo  $x \in M$ . La función  $H$  se llama una homotopía entre  $f_0$  y  $f_1$ .

**Definición 1.1.8.** Dos embebimientos  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$  son isotópicas si existe una función continua  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que  $H(x, 0) = f_0(x)$  y  $H(x, 1) = f_1(x)$  para todo  $x \in M$ , y tal que para todo  $t \in [0, 1]$ , la función  $f_t$  definida por  $H(x, t)$  es un embebimiento. La función  $H$  se llama isotopía entre  $f_0$  y  $f_1$ . Dos subvariedades  $S_0, S_1$  de  $M$  son isotópicas si sus mapeos de inclusión son isotópicos.

**Definición 1.1.9.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  3-variedades. Eliminamos 3-bolas abiertas  $B_1$  de  $M_1$  y  $B_2$  de  $M_2$ . Identificamos  $M_1$  y  $M_2$  a lo largo de las componentes de la frontera resultante, que son esferas de dimensión 2. Esto da como resultado una 3-variedad llamada suma conexa de  $M_1$  y  $M_2$ , y se denota por  $M_1 \# M_2$ .

## 1.2. Nudos topológicos

**Definición 1.2.1.** Un nudo es un encaje de  $S^1$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $(S^3)$ , entonces es una curva simple cerrada en  $\mathbb{R}^3$   $(S^3)$ . El nudo más sencillo es el nudo trivial  $U$ :



Además, un nudo  $K$  se dice que está desanudado si se puede 'deformar sin romper' al nudo trivial:

**Definición 1.2.2.** Dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  son equivalentes si existe una función continua  $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $H(K, 0) = K_1$  y  $H(K, 1) = K_2$  y además  $H$  es inyectiva. A esto se le llama isotopía espacial.

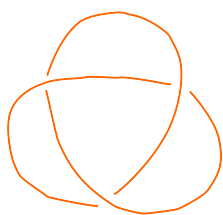
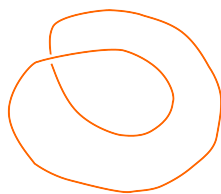
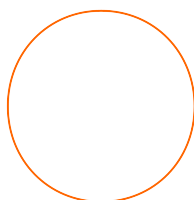
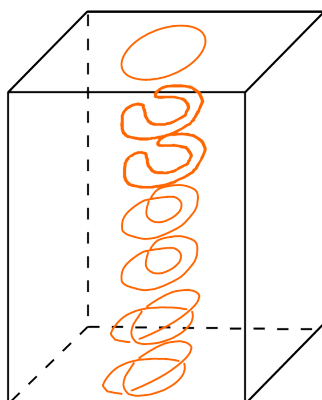


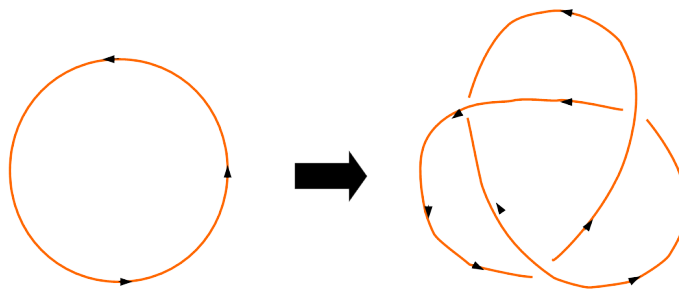
Figura 1.4: Nudo

Figura 1.5: Primer des-  
anudadoFigura 1.6: Totalmente  
desanudadoFigura 1.7:  $S^1$ 

**Definición 1.2.3.** Un *enlace* en una 3-variedad es una colección de curvas cerradas (es decir, círculos) que están incrustadas de manera no entrelazada o entrelazada en una 3-variedad.

**Definición 1.2.4.** Sea  $K$  y  $K'$  nudos,  $K \sim K'$ , si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $h(K) = K'$ .

Sim embargo, en general es muy difícil con este criterio decir si dos nudos son equivalentes o no. Este problema puede ser un poco más difícil si al nudo le añadimos una orientación (inducida por la de  $S^1$ ):



Entonces para que  $K \sim K'$  pediremos además que el homeomorfismo  $h$  preserve la orientación de <sup>3</sup>.

**Definición 1.2.5.** Un cruce de un nudo es el punto del diagrama donde tiene una autointersección.

Entre ellos, existen dos tipos de nudos:

- Nudos dóciles: Son los nudos que tienen un número finito de cruces.
- Nudos salvajes: Son los nudos que tienen un número infinito de cruces.

**Definición 1.2.6.** Aparte de ello, existen otro tipo de nudo llamado nudos alternantes que son los nudos que su diagrama de hebras van alternando, ya sea, arriba-abajo ó abajo-arriba, al recorrer el nudo en una dirección fija.

## Capítulo 2

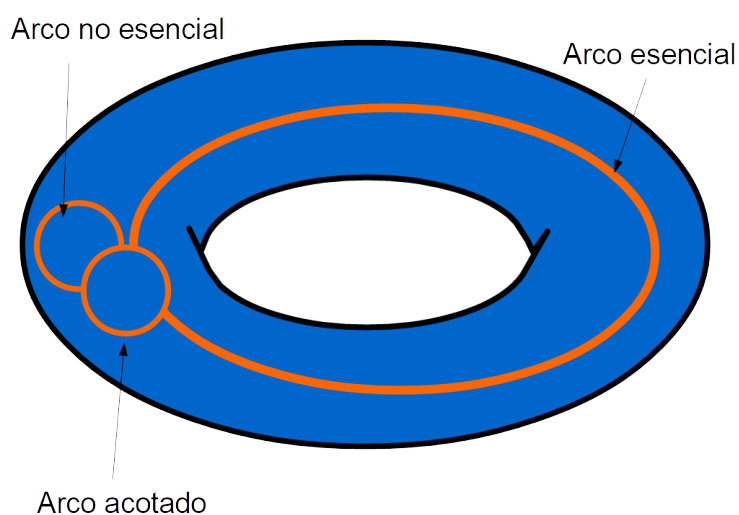
# La cirugía

### 2.1. Superficies incompresibles

**Definición 2.1.1.** Una subvariedad  $S$  en una  $n$ -variedad  $M$  compacta, es propia *encajada en  $M$*  si  $\partial(S) = S \cap \partial(M)$ .

En lo que sigue, asumiremos que una subvariedad  $S$  de  $M$  es **propia**, y simplemente escribiremos  $S$  contenida en  $M$  ó  $S \subset M$ , a menos que se indique explícitamente que  $\partial(S)$  se encuentra en otro lugar.

**Definición 2.1.2.** Un arco simple  $\alpha$  en una superficie  $F$  es esencial si no existe un arco simple  $\beta$  en  $\partial(F)$  tal que  $\alpha \cup \beta$  sea una 1-variedad cerrada que delimite un disco  $F$ .



**Definición 2.1.3.** Sea  $M$  una 3-variedad. Una superficie  $S$  en  $M$  es compresible si se cumple:

- $S$  es una 2-esfera acotada a una 3-bola en  $M$ , ó
- Existe una curva cerrada simple  $c$  en  $S$  que delimita un disco  $D$  con interior en  $M \setminus S$  pero no delimita un disco cuyo interior sea una componente de  $S \setminus c$ .

Una superficie que no es compresible se llama **incompresible**. Ahora observemos en las siguientes figuras. El disco  $D$  se llama un disco de compresión para  $S$ , o simplemente un disco de compresión si el contexto es claro.

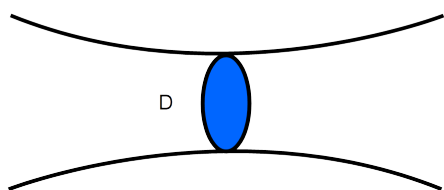


Figura 2.1: Un disco compresible para una superficie

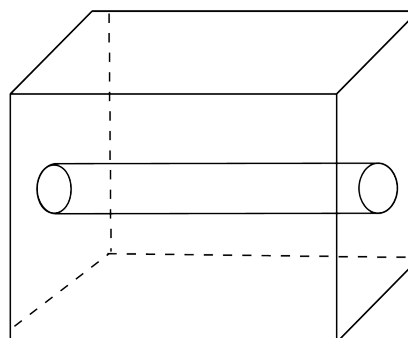


Figura 2.2: Un 2-toro compresible en el 3-toro

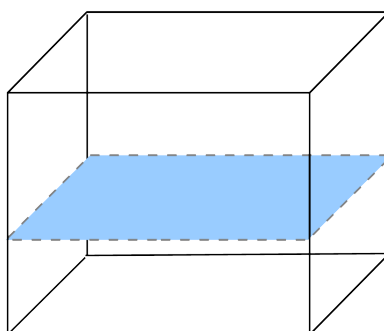


Figura 2.3: Un 2-toro incompresible en el 3-toro.

**Definición 2.1.4.** Sea  $M$  una 3-variedad. Una superficie  $S \subset M$  es **compresible en el borde**, ó  $\partial$  – compresible, si existe un arco simple esencial  $\alpha$  en  $S$  y un arco simple esencial  $\beta$  en  $\partial(M)$  tales que  $\alpha \cup \beta$  forma una 1-variedad cerrada que delimita un disco  $D$  en  $M$  con interior disjunto de  $S$ . Una superficie que no es compresible en el borde es **incompresible en el borde**.

**Definición 2.1.5.** Una 3-variedad orientable e irreducible que contiene una superficie esencial propia se llama una **3-variedad de Haken**.

## 2.2. Proceso de cirugía en 3-variedades

Ahora iniciaremos describiendo el proceso de cirugía, pero antes de ello definiremos algunos elementos:

- $\epsilon$  –  *cuello*: Es un tubo largo y fino que, tras reescalar la métrica, está próximo a  $S^2 \times I$ , donde  $I$  es de longitud  $2/\epsilon$  y  $S^2$  tiene curvatura seccional constante  $1/2$ .
- $\epsilon$  –  *gorro*: es una componente difeomorfa a  $B^3$  ó  $RP^3 \setminus B^3$ .

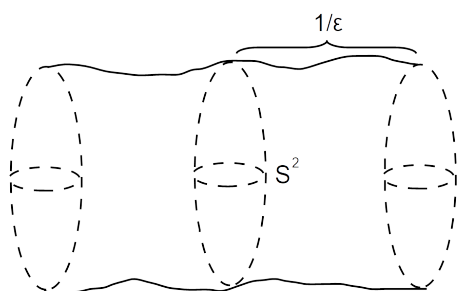


Figura 2.4:  $\epsilon$  –  *cuello*

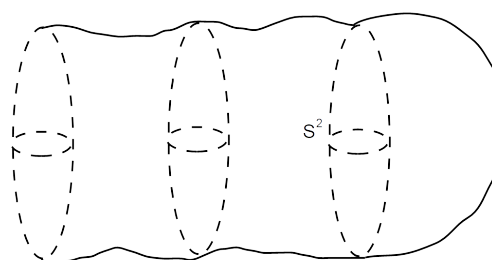
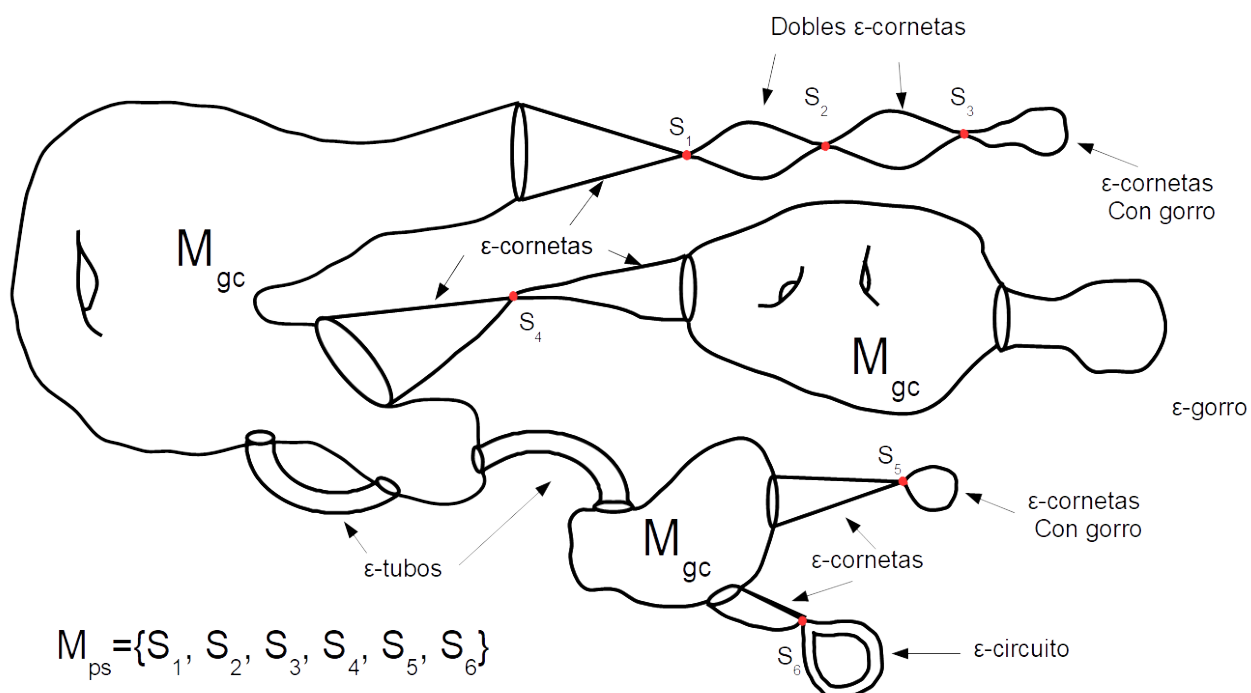


Figura 2.5:  $\epsilon$  –  *gorro*

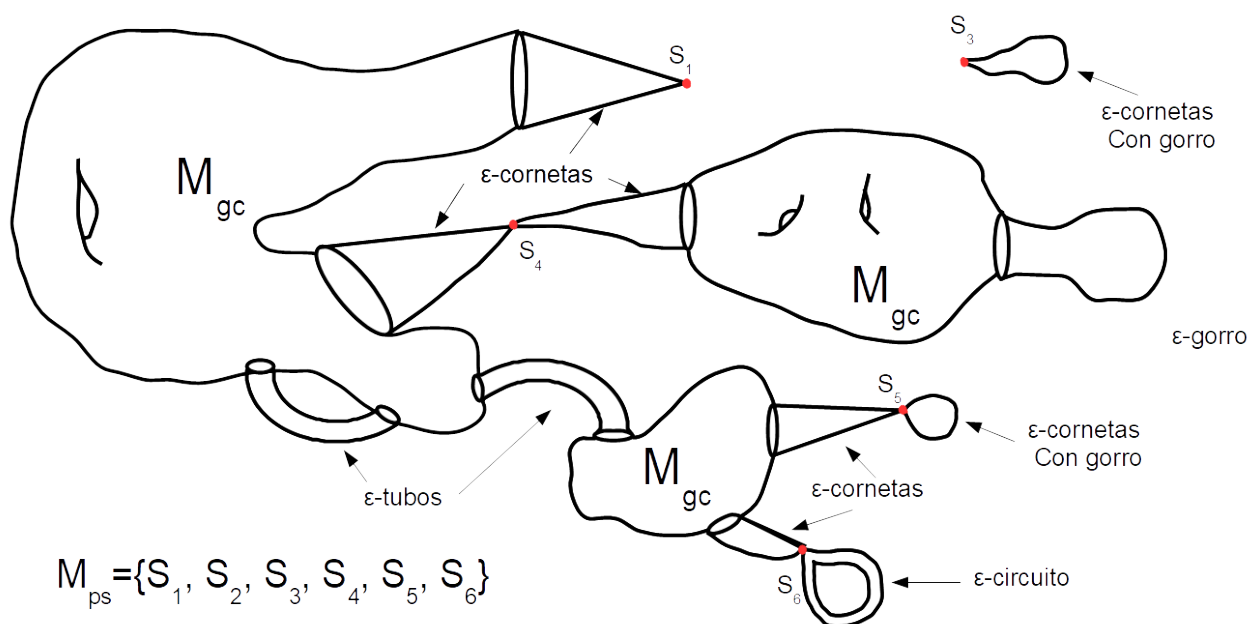
- $\epsilon$  –  *circuito*: son componentes difeomorfas a  $S^2 \times S^1$ .
- $M_T = M_{ps} \sqcup M_{gc} \sqcup M_{ce}$
- $M_{ps} = \{\text{conjunto de puntos singulares}\} = \{x \in M_T : \lim_{t \rightarrow T^-} |Sec(x, t)| = \infty\}$ .
- $M_{gc}$  = es la parte de geometría controlada (en el sentido de que la curvatura no es demasiado grande).
- $M_{ce}$  = contiene las regiones de curvatura elevada.

Ahora describiremos el proceso de cirugía

Tenemos la siguiente 3-variedad:



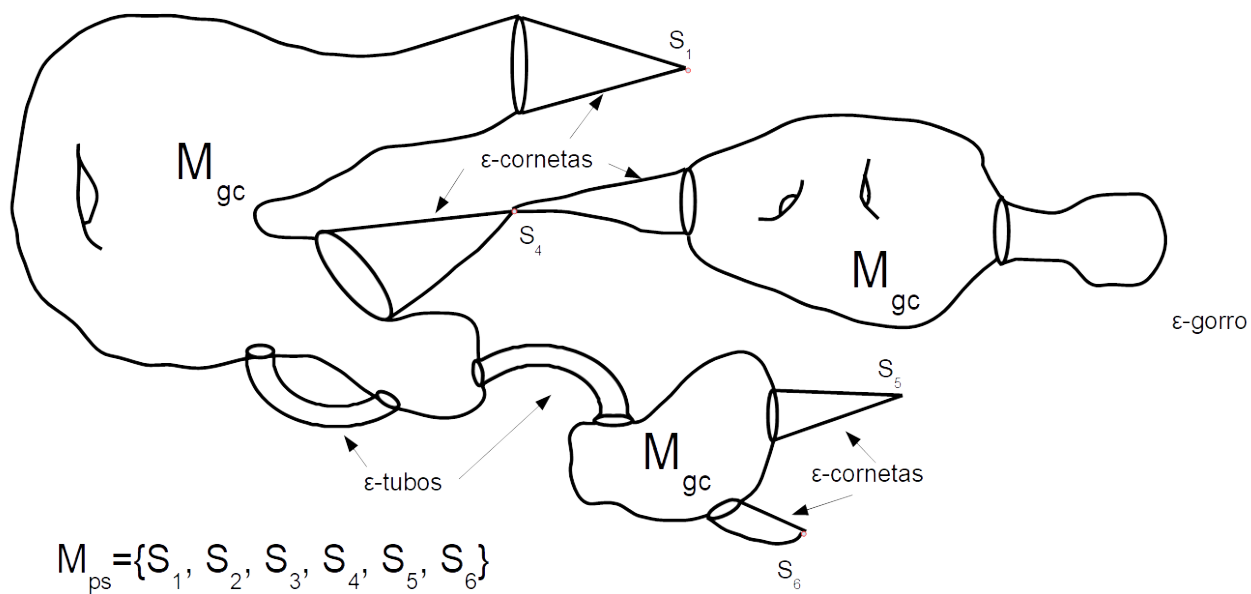
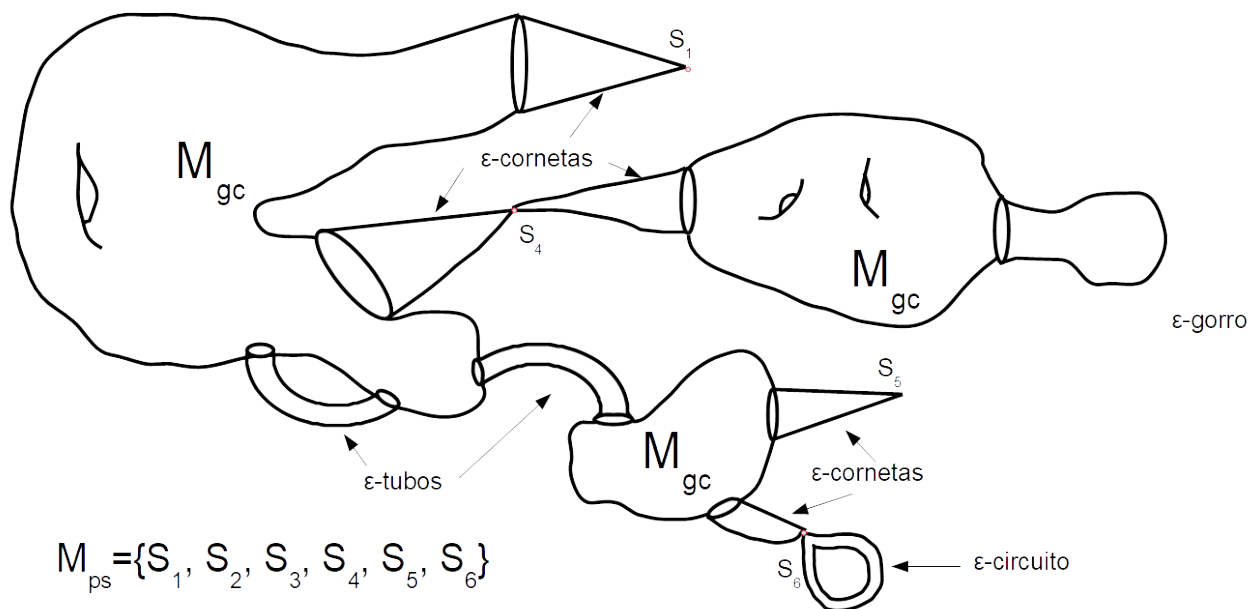
Ahora observemos que cortamos sobre los puntos singulares, y eliminamos las dobles  $\epsilon$  - *cornetas*

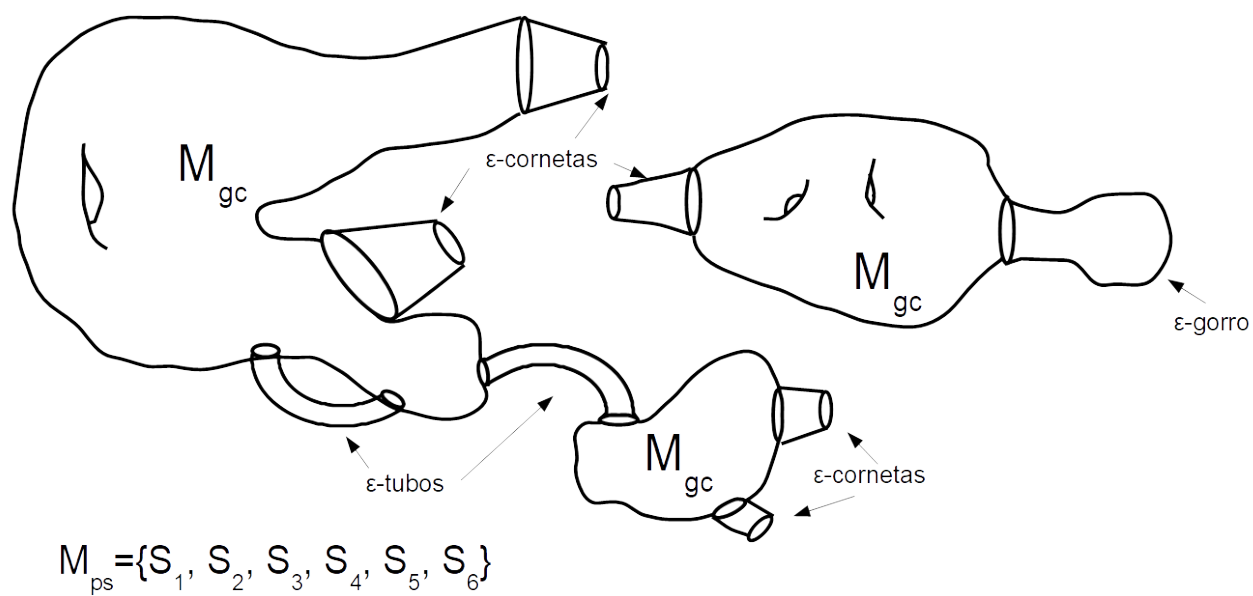
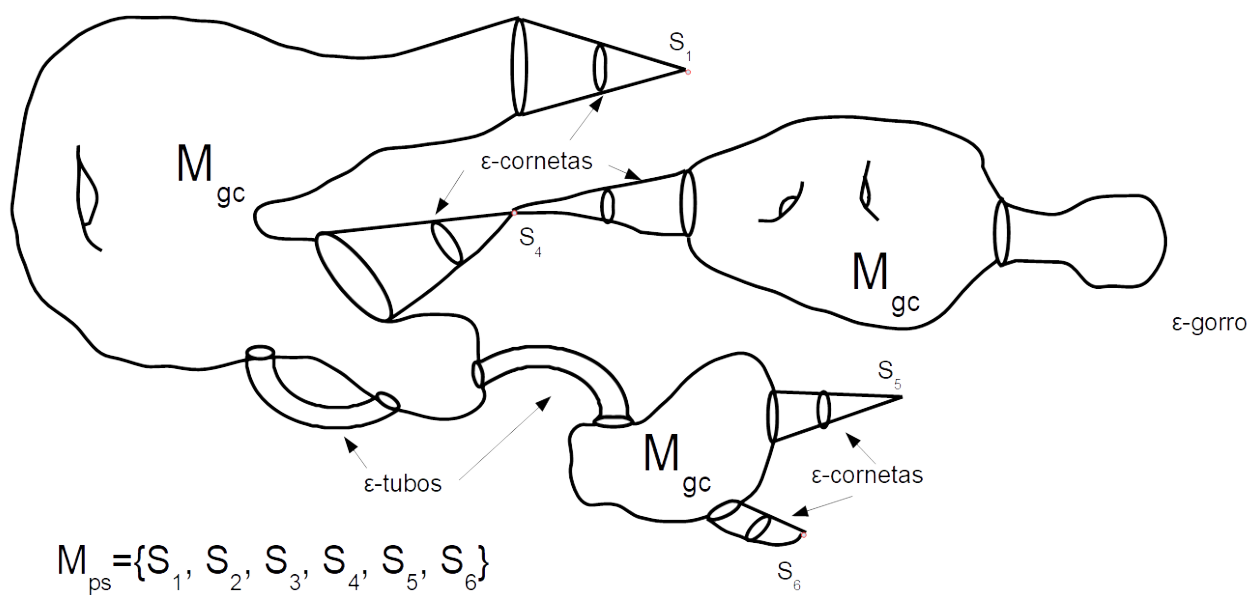


y eliminamos las  $\epsilon$  - *corneta* con gorro.

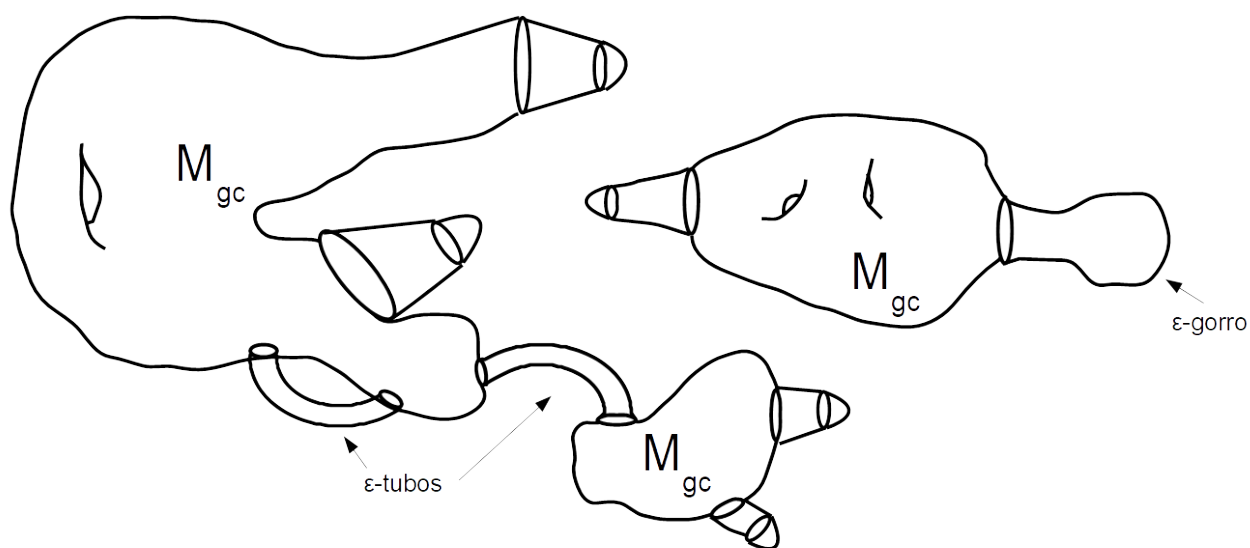
eliminamos el  $\epsilon$  - *circuito*.

Cortamos mediante un disco sobre las  $\epsilon$  - *cornetas*





y finalizamos pegando una 2-bola sobre el disco que cortamos.



### 2.3. La cirugía de Dehn

La idea detrás de la cirugía de Dehn es simple: Dado un nudo (o enlace, respectivamente) en el nudo  $K \subset S^3$ , definimos  $C(K) = S^3 \setminus \eta(K)$ . Ahora creamos una nueva 3-variedad al adjuntar un toro sólido (ó varios toros sólidos, respectivamente) a los componentes de  $\partial(C(K))$ . Se necesita decir más acerca de los detalles del reensamble. El objetivo aquí es obtener una nueva 3-variedad, no simplemente reconstruir  $S^3$ . Por esta razón, introducimos un sistema de coordenadas. Para hacerlo, primero debemos probar un lema.

**Lema 1.** Sea  $K \subset S^3$  un nudo. Definimos a  $C(K) = S^3 \setminus \eta(K)$ . Sea  $S_1$  y  $S_2$  superficies de Seifert para  $K$ . Entonces  $S_1 \cap \partial(C(K))$  es paralela

#### **Demostración:**

Hay que isotopar a  $S_1$  y  $S_2$  de manera que  $S_1 \cap C(K)$  y  $S_2 \cap C(K)$  se intersequen en arcos y curvas cerradas simples. Note que, si  $S_i \cap C(K)$  es compresible, entonces podemos realizar compresiones para obtener una superficie incompresible. El resultado es una superficie que no es homeomorfa a  $S_i$  pero tiene el mismo borde que  $S_i \cap C(K)$ . Por lo tanto, como solo nos interesa una afirmación sobre los bordes de  $S_1 \cap C(K)$  y  $S_2 \cap C(K)$ , podemos asumir que  $S_1 \cap C(K)$  y  $S_2 \cap C(K)$  son incompresibles

Ahora, si hay curvas cerradas simples en la intersección de  $S_1 \cap C(K)$  y  $S_2 \cap C(K)$ , entonces

pueden ser eliminadas mediante un argumento estándar del disco más interno. A continuación, isotopar  $S_1 \cap C(K)$  y  $S_2 \cap C(K)$  de manera que haya el menor número posible de componentes de intersección. Luego, considerar un arco de intersección. Recuerde que las superficies de Seifert están orientadas. A lo largo de un arco de intersección, la regla de la mano derecha induce una orientación en este arco. Esta orientación determina un punto inicial + o - y un punto terminal - o + del arco. En particular, el número de puntos iniciales es el mismo que el número de puntos terminales.

Ahora considere cómo los dos nudos en el toro  $S_1 \cap \partial(C(K))$  y  $S_2 \cap \partial(C(K))$  se intersectan en el toro  $\partial(C(K))$ . Recuerde que se han isotopado para intersectar en el menor número posible de puntos. Al marcar los lados positivos y negativos de  $S_1 \cap \partial(C(K))$  y  $S_2 \cap \partial(C(K))$  en  $\partial(C(K))$ , podemos seguir si los puntos de intersección son puntos iniciales o terminales. Sin embargo, dado que los nudos en el toro se intersectan en un número mínimo de puntos, todos ellos son puntos iniciales o todos son puntos terminales. Así, no puede haber tales intersecciones y las curvas en  $S_1 \cap \partial(C(K))$  y  $S_2 \cap \partial(C(K))$  son paralelas. ■

**Definición 2.3.1.** Sea  $K \subset \mathbb{S}^3$  un nudo. Definimos  $C(K) = \mathbb{S}^3 \setminus \eta(K)$ . Denotemos por  $m$  a la curva en  $\partial(C(K))$  que delimita un disco  $N(K)$ . Llamamos a esta curva **meridiana**. Cualquier curva en  $\partial(C(K))$  que interseca a  $m$  exactamente una vez se llama **longitud**. Sea  $S$  una superficie de Seifert para  $K$ . Denotemos  $l$  a la curva  $S \cap \partial(C(K))$ . Llamamos a esta curva la **longitud preferida**.

El proceso de eliminar  $\eta(K)$  de  $\mathbb{S}^3$  y adjuntar un toro sólido al 3-variedad resultante de manera que una meridiana se transforme en una curva con pendiente  $m/l$  (es decir, que se envuelve  $m$  veces alrededor de la meridiana y  $l$  veces alrededor de la longitud preferida) en  $\partial(C(K))$  se llama **cirugía de Dehn**  $m/l$ . El caso de  $r = 1/0$  también se llama  $\infty$  – cirugía ó cirugía trivial.

Si  $M$  es una 3-variedad compacta con un componente de borde toroidal especificado en el que se han fijado coordenadas, entonces el proceso de adjuntar un toro sólido a  $M$  de manera que la meridiana se transforme en una curva con pendiente  $r$  en el componente de borde toroidal especificado de  $M$  se llama **relleno de Dehn** de  $M$  y se denota por  $M(r)$ . De manera similar, si  $M$  tiene varios componentes de borde toroidales con coordenadas especificadas, escribimos  $M(r_1, \dots, r_k)$  para la 3-variedad resultante de la secuencia apropiada de rellenos de Dehn.

**Lema 2.** Sea  $M$  la suma conectada de  $g$  factores  $S^2 \times S^1$ . Entonces  $M$  se obtiene realizando cirugía de Dehn  $(1/0, \dots, 1/0)$  en el enlace de  $g$  componentes en  $\mathbb{S}^3$ .

**Demostración:**

Consideramos el primer caso en el que  $g = 1$ . En este caso, la cirugía de Dehn  $1/0$  implica eliminar un vecindario regular del enlace, lo que crea un toro sólido  $V$ , y luego adjuntar un toro sólido  $W$  al componente de borde resultante de manera que una meridiana de  $W$  se transforme en una meridiana de  $V$ . Esto da como resultado  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

De manera más general, considere el enlace de  $g$  componentes. Separe los  $g$  componentes mediante una colección disjunta  $S$  de  $g - 1$  2-esferas en  $\mathbb{S}^3$ . En cada componente del enlace, realice cirugía de Dehn  $1/0$ . Ahora  $S$  es un conjunto de esferas de descomposición que factoriza la 3-variedad resultante en  $g$  factores, cada uno homeomorfo a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . ■

**Lema 3.** *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada de género  $g$ . Sea  $c$  una curva cerrada simple en  $S$ . Sea  $f$  un giro de Dehn alrededor de  $c$ . Sea  $M_1$  la 3-variedad obtenida al identificar dos cuerpos de género  $g$  a lo largo de sus bordes mediante  $f$ . Sea  $M_2$  la 3-variedad obtenida al identificar  $S$  con la superficie de partición de la descomposición estándar de género  $g$  de la suma conectada de  $g$  factores de  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$  y luego realizar cirugía de Dehn  $1/1$  a lo largo de  $c$ . Entonces  $M_1 = M_2$ .*

**Demostración:**

Ambas 3-variedades en cuestión tienen descomposiciones de Heegaard de género  $g$ . En el caso de  $M_1$ , esto se deduce de la construcción. En el caso de  $M_2$  véase las siguientes figuras, en especial la figura 2.7.

En  $M_2$ , podemos isotopar  $c$  para que quede justo debajo de la superficie de descomposición y luego considerar que la cirugía de Dehn tiene lugar completamente en un cuerpo de manejo. Denotemos este cuerpo de manejo por  $H$ .

Sea  $A$  un anillo entre  $c$  y el borde de  $H$ . Denotemos una versión ligeramente truncada de  $A$  que se encuentra en  $H \setminus \eta(c)$  como  $A'$ . Ahora, consideremos el efecto de la cirugía de Dehn en  $c$  dentro de  $H$ . Es el mismo que el efecto de eliminar  $\eta(c)$  de  $H$ , cortar a lo largo de  $A$ , realizar un giro completo, volver a pegar a lo largo de  $A$ , y reemplazar  $\eta(c)$ . Una curva  $\partial(H)$  habrá cambiado por un giro de Dehn a lo largo de  $c$ . En particular, las curvas que especifican cómo adjuntar las 2-manijas del cuerpo de compresión complementario habrán cambiado por un giro de Dehn a lo largo de  $c$ . Es decir,  $M_1$  es homeomorfo a  $M_2$ . ■

**Teorema 2.3.1.** *Toda 3-variedad orientable cerrada puede ser obtenida mediante cirugía de Dehn en*

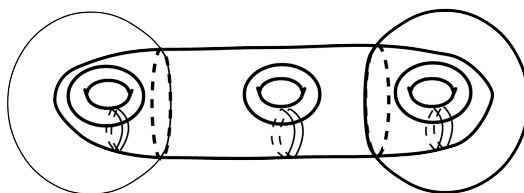


Figura 2.6: Antes de la cirugía de Dehn

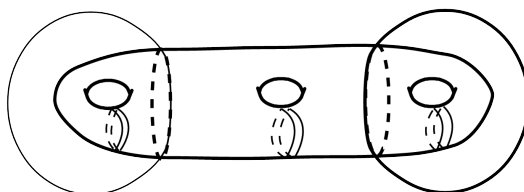
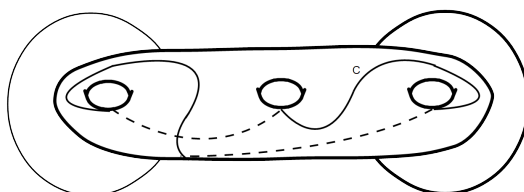


Figura 2.7: Después de la cirugía de Dehn

Figura 2.8: La curva  $c$ 

un enlace en  $\mathbb{S}^3$ .

**Demostración:** Sea  $M$  una 3-variedad cerrada y orientable. Entonces,  $M$  tiene una descomposición de Heegaard  $M = \cup_S W$ . Sea  $g$  el género de esta descomposición de Heegaard. Por el Lema 3, obtenemos la suma conexa de  $g$  copias de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  mediante cirugía de Dehn en un enlace en  $\mathbb{S}^3$ . Aquí, la descomposición de Heegaard de la suma conexa de  $g$  copias de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  tiene dos copias del cuerpo de manejo  $v$  identificadas a lo largo de sus fronteras mediante el mapa de identidad.

Por el teorema 2.3.3, podemos factorizar  $f$  en giros de Dehn, es decir,  $f = f \circ \dots \circ f_n$ , donde cada  $f_i$  es un giro de Dehn alrededor de una curva  $c_i$ . Consideremos ahora la 3-variedad que es la suma conexa de  $g$  factores de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Además, considera  $n$  copias paralelas  $S_1, \dots, S_n$  de la superficie de partición

de esta 3-variedad. Cortar a lo largo de cada superficie  $S_i$  y reidentificar mediante el firo de Dehn  $f_i$  da como resultado  $M$ . Según el lema 3, este objetivo también puede alcanzarse mediante cirugías 1/1 a lo largo de las curvas  $c_i$ .

## Capítulo 3

# Aplicaciones

### 3.1. La conjetura de Poincaré

La conjetura de Poincaré es un problema topológico, establecido en 1904 por el matemático francés Henri Poincaré, que caracteriza de una manera muy sencilla la esfera tridimensional. Se trata de utilizar únicamente el primer invariante de topología algebraica –el grupo fundamental– también definido y estudiado por Poincaré. La conjetura implica que si un espacio no tiene agujeros esenciales es que se trata de la esfera. Este problema fue resuelto entre 2002 y 2003 por Grigori Perelman, directamente y como consecuencia de su demostración de la conjetura de geometrización de Thurston, que culminaba así el camino marcado por Richard Hamilton.

La conjetura de Poincaré es el único problema del milenio que se ha resuelto. El 18 de marzo de 2010 el Instituto Clay de Matemáticas anunció la concesión del premio de un millón de dólares al matemático ruso Grigori Perelman. Cuatro años antes, Perelman había sido galardonado con una Medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos de Madrid de 2006 por sus contribuciones a la geometría y su revolucionaria visión de la estructura analítica y geométrica del flujo de Ricci, pero ni recogió su Medalla Fields ni aceptó el premio del milenio.

La solución de Perelman está basada en ideas de Richard Hamilton usando el flujo de Ricci, que relaciona mediante ecuaciones diferenciales la curvatura con la variación de la métrica. Precisamente Hamilton recibió en 2003 el prestigioso Premio de Investigación Clay por su descubrimiento y desarrollo del flujo de Ricci, una de las más potentes herramientas dentro del análisis geométrico.

Pero antes definiremos algunas cosas para entrar en contexto de lo que es la conjetura.

**Definición 3.1.1.** Una 3-variedad  $M$  se denomina **prima** si sólo se puede descomponer como suma conexas de manera trivial, es decir, cualquier descomposición de  $M$  como  $M_1 \# M_2$  implica que  $M_1$  ó  $M_2$  son homeomorfas a  $S^3$ .

**Definición 3.1.2.** Una 3-variedad  $M$  es **irreducible** si toda 2-esfera embebida  $S^2 \subset M$  acota una 3-bola  $B^3 \subset M$ .

Ahora, toda 3-variedad  $M$  se puede expresar como suma conexas finita de 3-variedades primas de la forma :

$$M \cong (P_1 \# \dots \# P_s) \# (S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2).$$

donde los factores  $P_i$  son irreducibles. Además, la colección  $\{P_i\}_{i=1}^s$  son irreducibles.

**Definición 3.1.3.** Una 3-variedad topológica  $M$  es diferenciable si cumple ser un conjunto:

- 1) Tiene que ser Hausdorff ( $T_2$ ).
- 2) Tiene que ser un conjunto  $2^o$  numerable, es decir, para cada punto  $x \in M$ , existe un  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , una vecindad  $U$  de  $x$  y un homeomorfismo  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- Existe una familia de pares ( un atlas)  $\{M_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  tal que los mapeos de transición  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  entre cartas son  $C^\infty$ .

**Definición 3.1.4.** Una **métrica riemanniana**  $g$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es la asignación, a cada espacio tangente  $T_p M$ , de un producto escalar  $g_p$ , es decir, de una forma bilineal simétrica y definida positiva  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . Se llama **variedad riemanniana**  $(M, g)$  a una variedad diferenciable  $M$  sobre la que se ha definido una métrica riemanniana  $g$ .

Ahora la **Conjetura de geometrización** enunciada por William P. Thurston, dice que cualquier 3-variedad es geométrica o se puede descomponer (por cirugía a lo largo de esferas y toros incompresibles) en variedades geométricas.

Ahora el enunciado de la “Conjetura de Poincaré”, (ahora llamado Teorema de Poincaré) dice:

**“Toda 3-variedad cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a una 3-esfera”.**

La demostración se hace en tres pasos:

- **Paso 1:** Mostrar que, si la variedad original  $M$  tiene grupo fundamental finito entonces el flujo de Ricci con cirugía se extingue en un tiempo finito. Esto significa que, para demostrar la conjetura de Poincaré no se necesitan los resultados sobre la descomposición de  $M_t = M_{thick} \cup M_{thin}$ .
- **Paso 2:** Reconstrucción de la variedad original. Los trozos que se extinguen o desprecian son, cada uno, difeomorfos a  $S^3/\Gamma$ ,  $S^1 \times S^2$  ó  $S^1 \times S^2/Z_2$ . Luego la variedad original  $M$  es difeomorfa a una suma conexa de los anteriores elementos (posiblemente, con nuevos factores  $S^1 \times S^2$ ):

$$M \cong (S^3/\Gamma_1) \# \dots \# (S^3/\Gamma) \# S^1 \times S^2 \# \dots \# S^1 \times S^2.$$

- **Paso 3:** Aplicando el teorema de Van Kampen, el grupo fundamental de  $M$  vendrá dado por

$$\pi_1(M) = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_k * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}.$$

Como  $\pi_1(M)$  será formado por un solo punto (debido a que  $M$  es simplemente conexa), podemos concluir que  $\Gamma_i$  también contiene un único punto ( $i = 1, \dots, k$ ) y no pueden aparecer factores de la forma  $S^1 \times S^2$ . Así pues,

$$M \cong S^3 \# \dots \# S^3 \cong S^3,$$

siendo cierto esto último por ser  $S^3$  el elemento neutro de la suma conexa. Con esto queda probada la conjetura de Poincaré.

## Bibliografía

- [1 ] Jennifer Schultens. “Introduction to 3-manifolds”. En: American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2010.
- [2 ] Demostración de Hamilton-Perelman de las Conjeturas de Poincaré y Thurston por Esther Cabezas Rivas y Vicente Miquel Molina.
- [3 ] Cirugía e Invariantes para 3-variedades y el Algebra de Temperley-Lieb por Miguel Angel Zárate Reyes.