

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA  
ESCUELA DE MATEMÁTICA



*“Estadística no Paramétrica con Aplicaciones”*

PRESENTADO POR:

BR. RUBIDIA YAMILETH GARCÍA CABRERA  
BR. SONIA EMÉRITA SORTO VÁSQUEZ

PARA OPTAR EL GRADO DE:  
LICENCIADAS EN ESTADÍSTICA

DIRECTORES DE TESIS:  
DR. JOSÉ NERYS FUNES  
LIC. RENÉ ARMANDO PEÑA AGUILAR

CIUDAD UNIVERSITARIA, AGOSTO DE 2007.

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**  
**Autoridades Universitarias 2003-2007**

---

Dra. Maria Isabel Rodríguez  
RECTORA

Ing. Joaquín Orlando Machuca  
VICERRECTOR ACADEMICO

Lic. Alicia Margarita de Recinos  
SECRETARIA GENERAL

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

---

Msc. José Héctor Elías Díaz  
DECANO

Msc. Francisco Antonio Chicas  
VICEDECANO

**ESCUELA DE MATEMÁTICA**

---

Lic. Mauricio Hernán Lovo Córdova  
DIRECTOR

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**  
**ESCUELA DE MATEMÁTICA**

**TRABAJO DE GRADUACIÓN:**

“ESTADÍSTICA NO PARAMÉTRICA CON APLICACIONES”

**PRESENTADO POR:**

- BR. RUBIDIA YAMILETH GARCÍA CABRERA
- BR. SONIA EMÉRITA SORTO VÁSQUEZ

**PARA OPTAR EL TÍTULO DE:**

LICENCIADAS EN ESTADÍSTICA

**ASESORES:**

LIC. RENÉ ARMANDO PEÑA AGUILAR: \_\_\_\_\_

DR. JOSÉ NERYS FUNES TORRES: \_\_\_\_\_

## **DEDICATORIAS**

En primer lugar le doy gracias a Dios por haberme permitido culminar mi carrera profesional; agradezco a mis queridos padres José Abelino García Gómez y Elizabeth Cabrera de García por apoyarme en todos los proyectos de mi vida, ya que gracias a su amor y sacrificio logre alcanzar mi meta; le doy gracias a mis tíos en especial a mi tía Evila Emelí Cabrera por su apoyo incondicional, a mis abuelos por su apoyo moral y a mi hermana Karla Elizabeth Cabrera García por su comprensión. A mi compañera de tesis que con su apoyo en equipo logramos finalizar la investigación; de igual manera a mis asesores Lic. René Armando Peña Aguilar y Dr. José Nerys Funes Torres por su apoyo y enseñanza en el desarrollo del trabajo de investigación. Y finalmente agradezco a mis amigos y a todas las personas que indirectamente se involucraron en el desarrollo del trabajo de graduación.

**Rubidia García Cabrera**

Agradezco primeramente a Dios por haberme permitido culminar mis estudios profesionales; a mis amados padres Ana Lilian de Sorto y Julio Sorto por apoyarme en todos mis proyectos de vida, por su amor y consejos que siempre he tenido; a mi esposo Manuel Antonio Pérez Ramírez por el apoyo incondicional que me ha brindado en todas las circunstancias de mi vida; a mi hermano Manuel Sorto que me apoyó en los momentos de mi carrera. A mi compañera de tesis que con su apoyo en equipo logramos finalizar la investigación; de igual manera agradezco la paciencia y dedicación que me fueron dados por el Lic. René Peña y Dr. Nerys Funes que sin ellos no hubiese sido posible ésta investigación. Y finalmente agradezco a todas aquellas personas que con paciencia me apoyaron indirectamente al desarrollo del trabajo de investigación.

**Sonia Emérita Sorto**

# INDICE

INTRODUCCIÓN.....	7
<b>Capítulo I</b> .....	9
1.1 Introducción.....	10
1.2 Escalas de medición de las variables.....	11
1.2.1 <i>Escala Nominal</i> .....	11
1.2.2 <i>Escala Ordinal</i> .....	13
1.2.3 <i>Escala de intervalos</i> .....	15
1.2.4 <i>Escala de Razón</i> .....	15
1.3 Diferencias en los requerimientos de los métodos paramétricos frente a los no paramétricos. ....	16
1.3.1 <i>Métodos Paramétricos</i> .....	18
1.3.2 <i>Métodos No Paramétricos</i> .....	21
1.4 Transformaciones de probabilidades continuas.....	29
1.5 Estadísticos Ordenados.....	35
1.5.1 <i>Estadísticos de Orden en muestras de variables aleatorias continuas</i> . ....	35
1.5.2 <i>Distribución conjunta de <math>n</math> estadísticos de orden</i> .....	37
1.5.3 <i>Distribuciones marginales de Estadística de orden</i> .....	40
<b>Capítulo II</b> .....	42
2.1 Introducción.....	43
2.2 Pruebas de bondad de ajuste.....	44
2.2.1 <i>Prueba de ji-cuadrado</i> .....	44
2.2.2 <i>Prueba de Kolmogorov-smirnov</i> .....	49
2.2.2.1 <i>Para una sola muestra</i> .....	49
2.2.2.2 <i>Para dos muestras</i> . ....	58
2.2.3 <i>Prueba de Smirnov para <math>k</math> muestras</i> .....	62
2.2.3.1 <i>Pruebas de Smirnov para una cola</i> .....	62
2.2.3.2 <i>Prueba de Smirnov para dos colas</i> .....	65
2.3 Pruebas de asociación.....	67
2.3.1 <i>Prueba de independencia. Ji-cuadrado</i> .....	67
2.3.2 <i>Coefficiente de correlación <math>R_s</math> de Spearman</i> . ....	71
2.3.3 <i>Coefficiente <math>\tau</math> de Kendall</i> . ....	76
2.4 Pruebas de rachas.....	80
2.4.1 <i>Prueba basada en el número total de rachas</i> . ....	80
2.4.2 <i>Una prueba basada sobre los rangos</i> .....	85
2.5 Pruebas de localización. ....	87
2.5.1 <i>Prueba de signos</i> . ....	87
2.5.2 <i>Prueba de rango con signo de Wilcoxon</i> .....	98
2.5.3 <i>Prueba de Kruskal-Wallis para hacer análisis de varianza unifactorial</i> . ....	113
2.5.4 <i>Prueba de cuantiles</i> .....	117

<b>Capítulo III</b> .....	127
3.1 Cuando las suposiciones fallan.....	128
3.2 Datos Atípicos y su influencia.....	130
3.2.1 <i>Naturaleza y detección de datos atípicos</i> .....	130
3.2.3 <i>Influencia y robustez</i> .....	134
3.3 El Bootstrap .....	137
3.3.1 <i>Bootstrap e Inferencia Estadística</i> .....	137
3.3.2 <i>Muestra Bootstrap</i> .....	138
3.3.3 <i>Los Intervalos de confianza Bootstrap</i> .....	145
3.3.4 <i>Técnicas Relacionadas</i> .....	149
3.3.5 <i>Utilización del Bootstrap en la Investigación Educativa</i> .....	150
 <b>Capítulo IV</b> .....	 161
4.1 Introducción.....	162
4.2 Objetivos relacionados a la aplicación .....	163
4.2.1 <i>Objetivo General</i> .....	163
4.2.2 <i>Objetivos Específicos</i> .....	163
4.3 Descripción de la información contenida en la base de datos. ....	164
4.3.1 <i>Conceptos Generales</i> .....	164
4.3.2 <i>Variables importantes de la base de datos</i> .....	165
4.4 Metodología estadística a utilizar .....	168
4.5 Estadística no Paramétrica para análisis e interpretación de la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples 2004 a jefes/as de hogares de San Salvador. ....	169
4.5.1 <i>Descripción de variables</i> .....	169
4.5.2 <i>Clasificación de las variables según tipo de datos</i> .....	170
4.5.3 <i>Búsqueda de Pruebas no Paramétricas</i> . ....	171
4.5.4 <i>Aplicaciones del Método Bootstrap</i> .....	188
 Apéndice de Tablas .....	 204
Referencias Bibliográficas .....	242

## ***INTRODUCCIÓN***

Los procedimientos estadísticos que no requieren plantear ciertas suposiciones fuertes previas como se hace con la inferencia clásica acerca de las distribuciones poblacionales o cuando no hay un supuesto de trabajo paramétrico previo, es decir, las cuestiones que se tienen que resolver son más generales: estimar una cierta característica de una población que no tiene un modelo probabilístico conocido, verificar si el comportamiento de una población corresponde a un determinado modelo probabilístico, etc. Los procedimientos que resuelven dicha cuestiones, se le conocen como *métodos no paramétricos o de distribución libre*.

Actualmente en nuestro país es difícil encontrar aplicaciones donde se utilicen métodos no paramétricos, dado que en la mayoría de los casos los investigadores y en muchos de los libros de estadística hace referencia al uso de la estadística Paramétrica. Para tal efecto, el presente trabajo de graduación tiene como finalidad mostrar los conceptos generales sobre la Estadística no Paramétrica como una alternativa de los métodos paramétricos cuando éstos no se puedan aplicar; además se presenta ciertas pruebas no paramétricas más relevantes para el contraste de hipótesis estadístico. Ésta investigación esta conformada por cuatro capítulos siguientes: 1) Introducción y conceptos básicos de estadística no paramétrica, 2) Teoría para los procedimientos de pruebas métodos no paramétricos, 3) Estimaciones Robustas y 4) Aplicaciones de Estadística no Paramétrica.

En el primer capítulo constituye una introducción general de los conceptos básicos de la Estadística no Paramétrica, donde se conocen definiciones específicas de los métodos paramétricos y no paramétricos, así como también las diferencias principales. Se menciona además una introducción de las estadísticas de orden cuya objetividad es manipular las muestras de manera ordenada.

En el capítulo dos desglosa pruebas de inferencia de tipo no paramétrico, centrándose en los casos de los contrastes de hipótesis. Tras justificar la necesidad de la inferencia, se comentarán algunos de los contrastes no paramétricos más conocidos y los resultados generales en los que se basan. Revisaremos algunas de las pruebas No Paramétricas más generales existentes tales como: Pruebas de bondad de ajuste, Pruebas de asociación, Pruebas de Rachas y Pruebas de Localización.

El capítulo tres contiene una introducción sobre los métodos robustos, éstos pretenden minimizar la influencia de datos atípicos u otras observaciones anómalas cuando éstos llevan una equivocación en las suposiciones básicas. Dentro de los métodos robustos tenemos el Bootstrap, el cual es valioso en situaciones donde la teoría existente es intratable o difícil de aplicar. La característica principal de este método es que la distribución del estadístico se determina simulando un número elevado de muestras aleatorias con reemplazamiento construidas directamente a partir de los datos observados.

En el capítulo cuatro desarrolla una aplicación específica del uso adecuado de la inferencia estadística no paramétrica, para proporcionar herramientas necesarias en el análisis de la información. La aplicación está enfocada en aspectos sociales tomando como base a la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples (EHPM) presentando una metodología de base, tales como: 1) Búsquedas de pruebas no Paramétricas sobre ciertas variables socioeconómicas para una muestra, dos muestras o más muestras 2) Aplicaciones sobre métodos de remuestreo el más conocido el Bootstrap para estimación de varianzas.

Finalmente se muestra un apéndice de tabla que es necesario para contrastar los estadísticos de prueba, así también referencias bibliográficas de esta investigación.

# Capítulo I

## Introducción y Conceptos Básicos en Estadística No Paramétrica

### 1.1 Introducción

Una manera de definir la estadística es considerando una serie ordenada de métodos que se ocupan de la recolección, organización, presentación, análisis e interpretación de datos cualitativos o cuantitativos. Se acostumbra a dividirla, según el propósito que se persigue ya sea en descriptiva o inferencial. *La estadística descriptiva* consta de una serie de procedimientos diseñados para recoger, organizar, resumir y presentar la información contenida en una muestra extraída de una determinada población; es decir *la descripción de los datos* y *la estadística inferencial* engloba una serie de estrategias que permiten generalizar (inferir, inducir) las propiedades de ese conjunto de datos contenida en una muestra al total de datos (población) a los que representan; es decir *la extracción de conclusiones*. La inferencia estadística paramétrica es una de las herramientas principales e importantes para el análisis de datos, se aplica fundamentalmente en la estimación de parámetros y pruebas de hipótesis; la base de estas pruebas se fundamenta en modelos probabilísticos determinados. Muchas veces se asumen determinados modelos por características que poseen los estadísticos como es el caso de la normal para  $\bar{x}$  por el teorema central del límite, independientemente del modelo  $F(X)$ ; también está el caso de la Chi-cuadrado en la prueba de bondad de ajuste para muestras grandes, etc. Sin embargo, muchas veces, en aplicaciones prácticas no se cumple el supuesto de normalidad o ninguna distribución clásica. Lo ideal entonces será buscar técnicas de inferencia que sean válidas independientemente de la distribución de la población  $F(X)$  en estudio.

Para tal efecto, el presente capítulo constituye una introducción general de los conceptos básicos de la Estadística no Paramétrica, donde se conocen definiciones específicas de la estadística paramétrica y no paramétrica, ejemplificándose particularmente la necesidad de trascender a los procedimientos de pruebas no paramétricas. En la estadística no paramétrica se menciona además una introducción de las estadísticas de orden cuya objetividad es manipular las muestras de manera ordenada, son especialmente utilizadas en aplicaciones como:

- El valor máximo en la muestra estadística ordenada es de interés en el estudio de inundaciones y otros fenómenos extremos meteorológicos.
- El mínimo valor en la muestra estadística ordenada son usados para fenómenos donde, por ejemplo, la fuerza de una cadena depende del eslabón más débil.
- Los estadísticos de orden son usados para estudiar datos atípicos (outliers).

### **1.2 Escalas de medición de las variables.**

El análisis estadístico o análisis de datos se basa, obviamente, en datos o variables, rasgos o propiedades de un grupo de elementos que toman diferentes valores, magnitudes o intensidades, etc. Lo cual significa que, para poder analizar datos, es necesario asignar números o códigos a las características que se desean estudiar, este proceso se le denomina Medida o medición, que es ajeno a la estadística. De este proceso se encarga: La *teoría de la medida*<sup>1</sup>.

Para analizar datos referidos a la variable sexo, puede atribuirse el número 1 a la modalidad varón y el número 2 a la modalidad mujer. La relación que se establezca entre estos números sólo podrá ser de igualdad o desigualdad. No se podrá, por ejemplo, establecer una relación de orden (es decir, de mayor a menor), pues el valor 2 no indica mayor cantidad de sexo (ser mujer no indica, como es evidente, mayor posesión de la característica sexo que ser hombre, a pesar de que  $1 < 2$ ).

Por lo tanto, dependiendo de la riqueza de las relaciones que se pueden establecer entre los diferentes valores de una variable, existirán diferentes niveles o escalas de medida. Tradicionalmente se han distinguido cuatro escalas o niveles de medida<sup>2</sup>:

- a. Nominales (conceptos cualitativos clasificatorios)**
- b. Ordinales (conceptos cualitativos comparativos)**
- c. De intervalos (concepto cuantitativos discretos o discontinuos)**
- d. Proporcional o de razón (conceptos cuantitativos continuos).**

#### **1.2.1 Escala Nominal**

Sea  $X$  una característica observable en una población. Diremos que  $X$  está medida en una escala *nominal* si la única relación que se establece entre las modalidades es la relación de *igualdad*. Consiste en clasificar en categorías a los sujetos u objetos, de modo que todos los sujetos u objetos clasificados dentro de una misma categoría sean equivalentes respecto a la variable o propiedad que se está midiendo. Tras esto, se asignan símbolos o números a las categorías establecidas. Las categorías utilizadas (que serán tantas como niveles o categorías tenga la variable que se desea medir) deben reunir tres propiedades: exhaustividad (cada sujeto u objetos pueden ser clasificado en alguna de las categorías establecidas), complementarias

---

<sup>1</sup> Tiene por objeto el estudio de los diferentes modelos que permiten establecer las reglas que es necesario seguir para una correcta asignación de números.

<sup>2</sup> En esta investigación se tomará como jerarquía esta clasificación para las escalas de medida. Por ejemplo: una medida nominal será inferior a un dato de razón, así como una ordinal es inferior a una medida de intervalo.

(todos los sujetos u objetos pueden ser clasificados y cada uno de ellos será el complemento del conjunto universo) y exclusividad (cada sujeto u objeto pueden ser clasificados en sólo una de las categorías establecidas; las categorías no se repiten). Esta escala de medida es la más débil de todas ya que los números asignados actúan simplemente como nombres o rótulos para identificar cada una de las categorías establecidas, la única relación que es posible establecer entre los sujetos u objetos medidos es la de igualdad- desigualdad.

Hay muchos ejemplos de variables en las que sólo puede conseguirse un nivel de medida nominal: el sexo (masculino, femenino), el estado civil (soltero, casado, divorciado, etc.), etc. También notemos que entre estos valores, no cabe, obviamente, ninguna jerarquía, no esta trazando ningún ordenamiento para que las categorías de clasificación sean útiles.

Un caso particular, sería la variable color de ojos con la siguiente categoría establecida café, azul, verde, negro. A cada uno se le puede asignar símbolos que servirá como etiquetas para sustituir los nombres que permiten facilitar la estructura de una base de datos y los análisis respetivos.

Y podemos usar las siguientes etiquetas: A = café, B = azul, C = verde, D = negro; también podría ser 1 = café, 2 = azul, 3 = verde, 4 = negro.

Pero es necesario reiterar que esta asignación de valores alfabéticos o numéricos no indica orden sino simplemente una identificación a cada categoría sin involucrar una jerarquía. En sentido matemático; toda clasificación constituye una partición de un conjunto universo no vacío. Sea el conjunto universo = El color de los ojos de las personas de El Salvador.



Una partición como la anterior requiere una relación de equivalencia ( $\sim$ ) que implica tres propiedades: reflexiva ( $A \sim A$ ), simétrica (si  $A \sim B$ , entonces  $B \sim A$ ) y transitiva (si  $A \sim B$  y  $B \sim C$  entonces  $A \sim C$ ).

Para nuestro conjunto universo que hemos ejemplificado vamos a definir la siguiente relación de equivalencia: A está relacionado con B si A posee igual color de ojos que B.

Abreviadamente lo denotamos por:  $A \sim B$

Y trataremos de verificar que esta es una partición del conjunto universo

### P1 Reflexiva

$A \sim A$  es obvio ya que se habla de la misma persona y por lo tanto tiene el mismo color de ojos.

### P2 Simétrica

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

Si  $A \sim B$  entonces A posee igual color de ojos que B, pero el orden de esta relación es lo mismo que se diga que B posee igual color de ojos que A, por lo tanto  $B \sim A$ .

### P3 Transitiva

Si  $A \sim B$  y  $B \sim C \Rightarrow A \sim C$




Si A tiene igual color de ojos que B y B tiene igual color de ojos que C, es lógico que A tiene el mismo color de ojos que C y  $A \sim C$ .

Una escala nominal, no es otra cosa que una clasificación, debe cumplir, entonces, con alguna relación de equivalencia. La escala nominal permite calcular, en el ámbito de la estadística paramétrica, frecuencias, proporciones, porcentajes, moda.

### ***1.2.2 Escala Ordinal***

Sea  $X$  una característica observable en una población. Diremos que  $X$  está medida en la escala ordinal si, además de la relación de igualdad, la única relación que podemos establecer entre las modalidades es la relación de orden. Consiste en asignar a los sujetos u objetos medidos un número que permite ordenarlos según la cantidad en la variable que poseen. En la escala ordinal, además de estar presente la relación de igualdad- desigualdad propia de la escala nominal, los números asignados permiten afirmar si la cantidad de variable que posee un sujeto u objeto es mayor que o menor que la cantidad de variable que posee otro sujeto u objeto cualquiera.

En las ciencias sociales y de la salud es frecuente encontrarse con variables en las que resulta apropiado utilizar una escala de medida ordinal por ejemplo: Cuando se realizó el Mapa de Pobreza en El Salvador<sup>3</sup> en el año 2004 se clasificó la pobreza del país de la siguiente manera

-  No Pobres
-  Pobreza Relativa
-  Pobreza Extrema

Esta clasificación supone un orden de “mayor o menor que” es decir se estableció un criterio donde se compara la canasta básica con los ingresos per- cápita de los hogares en El Salvador. Por ejemplo si en un hogar su ingreso per - cápita caía en menos de \$100 mensuales se clasificaba como pobreza extrema.

---

<sup>3</sup> Fuente: Mapa de Pobreza realizado por el FISDL –DIGESTYC.

Además las variables que se pueden medir con esta escala son de tipo cuantitativo y en ésta, las variables pueden tomar diferentes valores clasificatorios, como se ha mencionado anteriormente se puede ordenar en forma ascendente o descendente, pero no se puede saber si la diferencia entre dos valores es la misma o diferente entre otros dos valores.

Así, si medimos, por ejemplo, el grado de satisfacción y le asignamos números del 1 al 5, no podemos afirmar que  $x_i = 2x_j$  aunque  $x_i = 4$  y  $x_j = 2$ , tampoco tendría sentido operaciones algebraicas tales como  $x_i + x_j$  ó  $x_i - x_j$ . Sólo tienen sentido las relaciones de igualdad y orden. *Ejemplos:* Grado de Satisfacción, Calidad de Servicios, Nivel de Estudios...

En resumen, se usa la escala ordinal cuando se pueden detectar diferentes grados del valor de una variable y que los datos recopilados a partir de ella, se pueden ordenar por rangos. Por ejemplo, a una persona se le presentan tres refrescos diferentes y se le pide que exprese su preferencia (ver tabla 1.1), podemos utilizar la escala ordinal y establecer un orden de 1º, 2º, 3º lugar en cuanto a sus preferencias, pero la diferencia en las puntuaciones no tiene importancia, pues no se puede saber si la diferencia entre un tres y un dos es la misma que entre un uno y un dos.

*Tabla 1.1. Preferencia de refrescos*

Refresco	Preferencia
Pepsi	90
Coca Cola	150
Fanta	60
n	300

Especificando que: 1º Coca , 2º Pepsi y 3º Fanta

- La diferencia absoluta entre el 2º y 1º es 1
- La diferencia absoluta entre el 3º y 2º es 1

Ambas diferencias, aunque son iguales no tienen sentido porque la verdadera diferencia entre 1º y 2º son 60 preferencias; mientras que entre el 2º y 3º es 90 y por tanto no son iguales, con esto ejemplificamos que las operaciones *algebraicas* entre la escala ordinal no tiene sentido.

### ***1.2.3 Escala de intervalos***

Este tipo de escala posee las características de ser nominal y ordinal; además la principal característica que la define es que se puede determinar la magnitud de la diferencia existente entre dos objetos medidos, los objetos de la variable se pueden distribuir en intervalos igualmente espaciados, es decir, la unidad de medida está claramente determinada y se asigna a cada objeto medido un número indicativo que lo ubica en uno y solo un intervalo.

Así un objeto al que se le asigna la puntuación 12 en una escala de intervalo tiene, en cantidad de variable, 2 unidades de medida más que un objeto al que se le asigna la puntuación 10; del mismo modo, un objeto al que se le asigna la puntuación 6 tiene 2 unidades de medida más que un objeto al que se le asigna la puntuación 4. Entre 10 y 12 existe la misma diferencia, en cantidad de variable, que entre 4 y 6. Sin embargo, en la escala de intervalo no se puede afirmar que 12 es el doble de 6. En la escala de intervalo no existe el cero absoluto, es decir, no existe un valor numérico que indique ausencia total de cantidad de variable. El valor numérico 0 es un punto más de la escala, un punto arbitrario. La temperatura, por ejemplo, es una variable que se mide utilizando una escala de intervalo. Cuando se dice, en escala Celsius, que ayer hubo 20 grados de temperatura máxima y hoy 25, se está diciendo no sólo que hoy hubo más temperatura que ayer (afirmación propia de la escala ordinal), sino que hoy hubo 5 grados más de temperatura que ayer. Del mismo modo, 20 grados son 5 más que 15. La diferencia entre 15 y 20 grados es la misma que entre 20 y 25, y esto va más allá de lo que puede afirmarse con una escala ordinal. Sin embargo, no es posible afirmar que 20 representen el doble de temperatura que 10. Esto es debido a que, en la escala Celsius, el punto cero es un punto arbitrario de la escala y, por tanto, no indica ausencia de cantidad de variable.

### ***1.2.4 Escala de Razón***

Diremos que una variable esta medida en una escala de razón si a través de un proceso de medición es posible asignar valores numéricos (valores reales) a la variable, en los que el cero representa la ausencia de dicha variable. Este tipo de escala posee todas las características de las escalas anteriores, es decir, es la escala más completa de medición.

Ejemplos de escala de razón son las siguientes: el tiempo, la extensión, el peso, la longitud, la masa, la intensidad de la corriente eléctrica y otras variables del mundo físico. Pero si medimos ciertos cuerpos en metros, no sólo es posible afirmar que la diferencia existente entre 300 y 600

metros es la misma que entre 600 y 900 (afirmación válida también en la escala de intervalo), sino, además que 600 metros son el doble de 300 metros.

Otra situación será, la variable gasto mensual de una persona que no tuvo gastos durante la semana, entonces es válido decir que sus gastos mensuales fueron iguales a cero; también es posible realizar ciertas operaciones matemáticas, tales como la obtención de proporciones y cocientes. Esto quiere decir que un valor de 20 en una escala de este tipo es el doble de un valor de 10, o de las dos terceras partes de 30.

Difícilmente las escalas que intervienen en las ciencias sociales son medidas con escalas de razones, ya que son contados los casos en que dichas variables pueden ser definidas con la exactitud y la precisión necesarias. La economía y la demografía son, entre estas disciplinas, las que más utilizan escalas de razones. También son de interés en la economía y administración estos tipos de variables, otro ejemplo, podría ser la antigüedad de una persona en una empresa; si sabemos de alguien que apenas va a entrar a trabajar ahí y no tiene antigüedad se puede decir que su antigüedad es igual a cero años o meses. En resumen; este tipo de escala constituye el nivel más completo de medición y admite todas las técnicas y pruebas tanto paramétricas como no paramétricas.

### ***1.3 Diferencias en los requerimientos de los métodos paramétricos frente a los no paramétricos.***

Como hemos venido mencionando, al realizar un análisis de datos el investigador se enfrenta o se predispone a un conjunto de herramientas estadísticas que metodológicamente se ocupan de analizar e interpretar la información. Uno de los métodos estadísticos más importantes en la rama de la estadística es hacer inferencias a los datos, es decir, “extracción de conclusiones”. Tal es el caso cuando estamos estimando y realizando algún tipo de prueba de hipótesis, esta metodología que hemos mencionado han sido basados en las pruebas paramétricas cuya objetividad primaria es que se distinga o se identifique a la población de donde procede, es decir, identificamos el tipo de distribución clásica basándose principalmente en un conjunto de suposiciones. Pero este método tradicional sigue un procedimiento o una especificación de pasos para el análisis inferencial que a continuación se muestra:

- 1) El tipo de medida de la variable a analizar. Se distingue en que clasificación de escala se encuentra la variable.

- 2) La distribución que caracteriza a la medición de la variable.
- 3) La homogeneidad de las varianzas en los grupos de ellas, el impacto de los residuos y el tamaño de la muestra.
- 4) El poder de la prueba que se usará, es decir, la capacidad de aceptar o rechazar, correctamente, la hipótesis nula. Es decir el tipo de test que se aplicará para justificar la aceptación o rechazo de la hipótesis. En el *Tabla 1.2* se presenta una guía para la valoración de los datos estadísticos de carácter cuantitativo.

Tabla 1.2: Valoración de las características de los datos
1. Determinar el tipo de medida de la variable de interés. Es decir identificar en las variables de estudio el tipo de escala al que pertenece.
2. Valorar la distribución de las variables. <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Medidas de tendencia central para cada variable. (si es posible calcularla)</li><li>▪ Sesgo y curtosis para cada variable (calcular la curtosis y la simetría)</li><li>▪ Valoración visual de la distribución de los datos (graficando las variables en plots Q-Q)</li><li>▪ Examinar los diagramas de las probabilidades de la distribución.</li><li>▪ Si se considera necesario transformar las variables.</li><li>▪ Ver los resultados de la transformación.</li></ul>
3. Ver el tamaño de muestra total y de los subgrupos
4. Determinar que prueba estadística paramétrica o no paramétrica es la más adecuada.

Se enumera el procedimiento o valoración de las características a los datos en estudio; así pues, conociendo tal procedimiento de análisis las pruebas usadas aquí son las de la *estadística paramétrica*.

Los procedimientos estadísticos no requieren plantear suposiciones previas como se hace con la inferencia clásica acerca de los parámetros poblacionales o cuando no hay un supuesto de trabajo paramétrico previo, es decir, las cuestiones que se tienen que resolver son más generales: estimar una cierta característica poblacional que no tiene expresión paramétrica conocida, verificar si es cierta o no determinada afirmación sobre la distribución de la población, afirmación que no es expresable en función de parámetros, se le conoce como métodos *no paramétricos o de distribución libre*.

A continuación se presentan los conceptos básicos de los Métodos paramétricos y No paramétricos, a fin de visualizar la diferencia entre ambos métodos:

### 1.3.1 Métodos Paramétricos

En el desarrollo de los métodos estadísticos modernos las primeras técnicas de inferencia que aparecieron fueron las que hicieron buen número de suposiciones acerca de la naturaleza de la población de la que obtuvieron los datos.

Dentro de las pruebas paramétricas, se tienen para muestras grandes y para muestras pequeñas. Un supuesto que se aplica es que la muestra que se toma debe haber sido seleccionada en forma aleatoria o probabilística y que sus observaciones son independientes entre si. Y como se ha venido mencionado anteriormente las pruebas paramétricas identifica el tipo de distribución clásica basándose principalmente en las suposiciones.

Pero es importante mencionar que las pruebas paramétricas o la inferencia estadística clásica, realmente, es el método más conocido por la mayor cantidad de aplicaciones en problemas concretos. Pero a qué llamaremos *Pruebas Paramétricas*:

Todas aquellas pruebas que se basan en la suposición de que las muestras aleatorias se seleccionan de poblaciones que pueden modelarse mediante distribuciones clásicas (normal, ji-cuadrada, exponencial, entre otras.). Afortunadamente, la mayor parte de estas pruebas son confiables cuando experimentamos leves desviaciones de un modelo teórico como las mencionadas, en particular cuando el tamaño de la muestra es grande, puede estudiarse con más facilidad la tendencia de algún modelo. Tradicionalmente, estos procedimientos de prueba se denominan *métodos paramétricos*.

¿De qué se ocupa los métodos paramétricos? El planteamiento, a grandes rasgos, es más o menos el siguiente:

El investigador se encuentra estudiando una gran población (características poblacionales, el rendimiento de combustible por millas, tornillos, automóviles, etc.) y quiere disponer de algunos valores promedios, desvíos, tendencias, forma de la distribución, etcétera, que sean válidos en forma general, para toda la población en estudio. Sin embargo, le resulta imposible acceder a toda la información, medir la variable analizada en todos y cada uno de los integrantes de la población.

¿Qué hace dicho método?

Apela al estudio de muestras, que son subconjuntos de la población original, pero que intentan representarla del modo más fiel posible. En algún sentido puede decirse que una muestra seleccionada honestamente es un modelo reducido a escala de la población. Por supuesto, al

tomar la muestra siempre se producen errores y se pierden detalles, debido a razones económicas, falta de tiempo, etc.

Existen numerosas técnicas para seleccionar muestras. Este paso es de vital importancia en un estudio estadístico, porque las conclusiones que se obtienen dependen esencialmente de la/s muestra/s analizada/s. Las técnicas que proporcionan las mejores muestras son las aleatorias, en las que cualquier integrante de la población tiene la misma probabilidad de ser elegido. La cantidad de elementos que integran la muestra (el tamaño de la muestra) depende de múltiples factores, como el dinero y el tiempo disponibles para el estudio, la importancia del tema analizado, la confiabilidad que se espera de los resultados, las características propias del fenómeno analizado, etcétera. A partir de la muestra seleccionada se realizan algunos cálculos y se estima el valor de los parámetros de la población tales como la media, la varianza, la desviación estándar o la forma de la distribución.

### Estimación y Prueba de Hipótesis

La parte más importante de la inferencia con respecto al estudio de muestras es realizar Estimaciones y Pruebas de hipótesis de parámetros poblacionales. Se detalla de manera breve cada una de estas etapas fundamentales en la inferencia.

#### a) Estimación

Existen dos formas: la estimación puntual y la estimación por intervalo de confianza. En la primera se busca, con base en los datos muestrales, un único valor estimado para el parámetro. Para la segunda, se determina un intervalo dentro del cual se encuentra el valor del parámetro, con nivel de confianza.

Algunos criterios para seleccionar un buen estimador se menciona a continuación:

1. Insesgamiento. Se dice que la estadística  $T = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$  es un estimador insesgado del parámetro  $\theta$ , si  $E(T) = \theta$  para todos los posibles valores de  $\theta$ .
2. Eficiencia. Un estimador es eficiente cuando su varianza es mínima.
3. Consistente. Sea  $T$  el estimador de un parámetro  $\theta$ , y sea  $T_1, T_2, \dots, T_n$  una secuencia de estimadores que representan a  $T$  con base en muestras de tamaño  $1, 2, \dots, n$ , respectivamente. Se dice que  $T$  es un estimador consistente para  $\theta$  si

$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1$ . Es decir, si un estimador es consistente, convergen en probabilidad al valor del parámetro que está intentando estimar conforme el tamaño de la muestra crece.

4. **Suficiencia.** Una estadística es suficiente para un parámetro  $\theta$  si utiliza toda la información contenida en la muestra aleatoria con respecto a  $\theta$ .

Las propiedades antes mencionadas son importantes para los contrastes de hipótesis, que hacemos con respecto a un parámetro de población. Siempre que se hace un contraste de hipótesis se plantean dos opciones: la hipótesis nula ( $H_0$ ) y la alternativa ( $H_1$ ). Después recolectamos datos de muestra, producimos estadísticas de muestra que estimen a dicho parámetro y usamos esta información para decidir que tan probable es que sea correcto nuestro parámetro de población acerca del cual hicimos la hipótesis nula  $H_0$ .

### b) Pruebas de hipótesis

En este caso se establecen contrastes de proposiciones, para verificar la aceptación o rechazo de las hipótesis que se plantean, que más adelante se detallan la realización de la prueba de hipótesis.

Una hipótesis es una proposición acerca de algo. En Estadística, puede ser una suposición acerca del valor de un parámetro desconocido, de la forma de la distribución de una población, independencia entre datos, etc.

Pasos en la prueba de hipótesis:

1. Definir la hipótesis nula: establecer la proposición paramétrica a contrastar.
2. Formular una hipótesis alternativa: es una contra-hipótesis nula.
3. Definir el estadístico de prueba con su distribución.
4. Definir un criterio de decisión para rechazar o no la hipótesis nula.
5. Recabar datos de la muestra.
6. Calcular el valor del estadístico de muestra.
7. Utilizar la estadística de muestra y su distribución para determinar la región de rechazo y evaluar la hipótesis.

El propósito de la prueba de hipótesis no es cuestionar el valor calculado de la estadística de muestra, sino hacer un juicio respecto a la diferencia entre esa estadística de muestra y un

parámetro de población hipotetizado. El siguiente paso después de establecer la hipótesis nula y la alternativa consiste en decidir qué criterio utilizar para decidir si aceptar o rechazar la hipótesis nula. Para cada tipo de prueba de hipótesis se selecciona un nivel de significancia que oscilan entre 1% y 10%. Siempre que afirmemos que aceptamos la hipótesis nula, en realidad lo que queremos decir es que no hay suficiente evidencia estadística para rechazarla.

Para la prueba de hipótesis existen dos tipos de errores:

- Error de tipo I: Es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es cierta, es representada por el símbolo de  $\alpha$ .
- Error de tipo II: Es la probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando esta es falsa, es simbolizado por  $\beta$ .

Para aplicar los Métodos Paramétricos se requiere el cumplimiento de al menos las siguientes condiciones.

1. Requieren que las variables se midan con escalas de intervalo o de razón<sup>4</sup>.
2. Asumen conocida a  $F(x)$ ; es decir; dependen de ella.

### ***1.3.2 Métodos No Paramétricos***

Se ha venido hablando de manera general todo lo relacionado a las pruebas Paramétricas, pero se debe presentar ciertos conceptos en cuanto a lo que se refiere las pruebas no paramétricas. Estas pruebas no requieren el conocimiento de la distribución de la población, por lo que a estas técnicas también se les conoce como de libre distribución.

Cuando se realizan ciertos experimentos o investigaciones, no siempre se obtienen respuestas de que se hayan medido al menos con una escala de intervalo, por ejemplo, cuando los datos se encuentran en una escala ordinal como: las habilidades de los vendedores, el atractivo de cinco modelos de casas, la preferencia por sopas de cinco marcas diferentes, resultados de este tipo solamente los podemos ordenar, a luz del ejemplo es imprescindible hacer uso de las pruebas no Paramétricas.

¿A que llamaremos *Pruebas No Paramétricas?*

---

<sup>4</sup> [www.medigraphic.com/pdfs/pediat/sp-2003/sp032i.pdf](http://www.medigraphic.com/pdfs/pediat/sp-2003/sp032i.pdf).

Se denominan Pruebas No Paramétricas aquellas que no presuponen una distribución de probabilidad para los datos, por ello se conocen también como de distribución libre (*distribution free*). En la mayor parte de ellas los resultados estadísticos se derivan únicamente a partir de procedimientos de ordenación y recuento, por lo que su base lógica es de fácil comprensión. Cuando trabajamos con muestras pequeñas ( $n \leq 10$ ) en las que se desconoce si es válido suponer la normalidad de los datos, conviene utilizar pruebas no paramétricas, al menos para corroborar los resultados obtenidos a partir de la utilización de la teoría basada en la normal. En estos casos se emplea como parámetro de centralización la mediana, que es aquel punto para el que el valor de  $X$  está el 50% de las veces por debajo y el 50% por encima.

¿Por qué los administradores, estadísticos, analistas, etc.; deben tener conocimientos sobre Estadística no Paramétrica? Estas pruebas, se usan ampliamente en las aplicaciones de negocios, lo que demuestra la importancia de la habilidad para manejar datos categóricos o jerarquizados además de los cuantitativos.

Las pruebas no paramétricas se caracterizan<sup>5</sup> por:

1. Independencia de las observaciones aleatorias a excepción de datos apareados.
2. Pocas asunciones con respecto a la distribución de la población.
3. El punto primario es el ordenamiento por rango o por frecuencias.
4. Las hipótesis se hacen sobre algún estadístico de prueba a través de los rangos, las medianas o frecuencias de los datos.
5. No se cumplen las suposiciones de normalidad o se desconoce la distribución de la población.
6. El tamaño de muestra generalmente es pequeño.

Algunas limitaciones que tienen las pruebas no paramétricas son las siguientes:

1. A veces, ignoran, desperdician o pierden información<sup>6</sup>.
2. En muestras grandes las pruebas no paramétricas son muy laboriosas.
3. Llevan a una mayor probabilidad de no rechazar una hipótesis nula falsa (incurriendo en un error de tipo II).

---

<sup>5</sup> Revista Mexicana de Pediatría, Vol. 70, núm. 2, 2003 Pág. 91-99

<sup>6</sup> <http://html.rincondelvago.com/estadistica-no-parametrica.html>

Para aplicar los Métodos no Paramétricos se requiere el cumplimiento de al menos las siguientes condiciones.

1. Son pruebas de hipótesis que no dependen de  $F(x)$  la forma de la distribución de la población.
2. Los datos no necesariamente son medidos con una escala de intervalo o de razón. Es posible también que la escala sea nominal u ordinal, pero debemos recordar que también las variables cuantitativas continuas pueden utilizarse en estos tipos de pruebas.
3. Algunas pruebas no se relacionan con el estudio de un parámetro de la población si no también con la independencia entre poblaciones, homogeneidad y la estimación de modelos probabilísticos.

A continuación se detalla el siguiente ejemplo:

Un criminólogo realizó una investigación para determinar si la incidencia de ciertos tipos de delitos variaba de una zona a otra en una gran ciudad. Los delitos en particular de interés fueron asalto, robo en casas, latrocinio y homicidio. La tabla siguiente muestra el número de delitos cometidos en cuatro zonas de la ciudad durante cierto año<sup>7</sup>:

Distrito	Tipo de delito			
	Asaltos	Robo en casas	Latrocinios	Homicidios
1	162	118	451	18
2	310	196	996	25
3	258	193	458	10
4	280	175	390	19

¿Se puede concluir de estos datos, con un nivel de significancia de 0.01, que la ocurrencia de estos tipos de delitos depende de la zona de la ciudad?

$H_0$  : La ocurrencia de estos tipos de delitos es independiente de la zona de la ciudad.

$H_1$  : La ocurrencia de estos tipos de delitos depende de la zona de la ciudad.

---

<sup>7</sup> Probabilidad y estadística. Walpole.

Distrito	Tipo de delito				Total
	Asaltos	Robo en casas	Latrocinios	Homicidios	
1	162 (186.37)	118 (125.85)	451 (423.49)	18(13.29)	749
2	310(379.96)	196 (256.57)	996 (863.38)	25 (27.08)	1527
3	258 (228.67)	193(154.41)	458(519.68)	10 (16.30)	919
4	280 (214.99)	175 (145.17)	390 (488.51)	19 (15.32)	864
Total	1010	682	2295	72	4059

Aplicando el criterio de prueba ji-cuadrado se tiene

$$\chi^2 = \frac{(162 - 186.37)^2}{186.37} + \frac{(118 - 125.85)^2}{125.85} + \dots + \frac{(19 - 15.32)^2}{15.32} = 124.52$$

Con grados de libertad

$$v = (r - 1)(c - 1) = (4 - 1)(4 - 1) = 3(3) = 9$$

$$\chi_{0.01}^2 = 21.66 \text{ con } v = 9 \text{ entonces } \chi^2 > \chi_{0.01}^2$$

Por lo tanto la hipótesis nula se rechaza con un nivel de significancia de 0.01 y se concluye que la ocurrencia de estos tipos de delitos depende de la zona de la ciudad.

Observe entonces que el tipo de prueba que se realizó en el ejemplo no se relaciona con la prueba de un parámetro, si no más bien con la independencia entre poblaciones, en este caso, los tipos de delitos y los diferentes distritos.

A continuación se presenta un análisis comparativo entre los métodos Paramétricos y no Paramétricos.

Tabla 1.3. Diferencias de los Métodos Paramétricos frente a los No Paramétricos

MÉTODOS PARAMÉTRICOS	MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS
a. Las pruebas de hipótesis se basan en la suposición de que las muestras aleatorias se seleccionan de poblaciones que pueden modelarse mediante distribuciones clásicas de probabilidad.	a. Se definen como pruebas que no presuponen una distribución de probabilidad para los datos, por ello se conocen también como de distribución libre.
b. Se recomienda que el tamaño muestral sea como mínimo de 30.	b. El tamaño de muestra requerido pueden ser menor o igual a 20.
c. Las poblaciones pueden ser discretas o continuas.	c. Las poblaciones son discretas o continuas.
d. Se usan tablas de probabilidades que están asociadas al modelo probabilística de la población.	d. Se usan tablas de probabilidad asociados a un modelo probabilístico del estadístico de prueba construido, que es independiente (libre) del modelo poblacional.
e. El tipo de escala de variable que se ocupan para realizar pruebas inferenciales clásicas son <sup>8</sup> : de intervalo y razón en su mayoría esta última.	e. El tipo de escala de medición de variable que ocupan para realizar pruebas inferenciales no paramétricas son: todas las escalas de medida <sup>9</sup> : Nominal, Ordinal, Intervalo y de Razón.

En la estadística paramétrica como se ha venido mencionando es uno de los métodos más relevantes para los investigadores, con éste se logra realizar inferencia cuando se cumplen los principales supuestos clásicos. Pero se presentan muchos casos en los que no se cumplen las asunciones para poder ejercer dicho método. A continuación se presenta un caso donde no se puede aplicar la inferencia clásica ya que se desconoce la distribución de la población en estudio.

<sup>8</sup> Métodos no Paramétricos aplicados al tratamiento de variables cualitativas, Universidad de Buenos Aires.

<sup>9</sup> Conover, Practical Nonparametric Statistic, Pag 94.

Ejemplo 1.1: Un Monitoreo Atmosférico se realizó en la Escuela de Física, del 01 al 25 de noviembre de 2000; reportó los siguientes promedios de datos diarios de velocidad del viento empleando un anemómetro, cada dato tiene como unidad de medida Km./h y a continuación se muestra:

3.78, 3.08, 4.08, 3.71, 3.47, 2.70, 2.46, 3.25, 2.75,  
2.66, 2.88, 2.81, 2.36, 4.28, 4.20, 2.93, 2.44, 2.80,  
2.43, 5.30, 6.19, 6.53, 5.20, 2.23, 2.21.

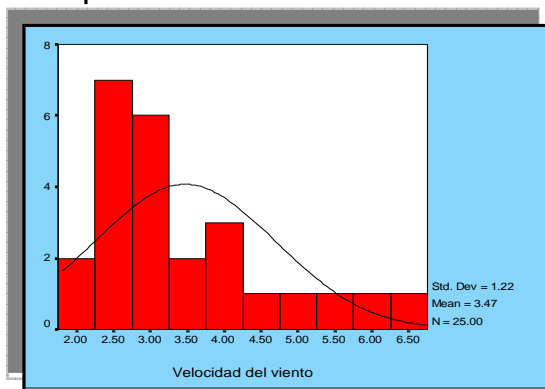
El tamaño de la muestra es  $n = 25$  con un tipo de variable cuantitativo continuo. Con los datos anteriores se pretende analizar si proceden de alguna población con un determinado modelo probabilística para poder aplicar inferencia paramétrica sobre la muestra.



Una alternativa más factible para verificar la normalidad de los datos son los gráficos de normalidad<sup>10</sup>, entre los más comunes tenemos:

### Los Histogramas

Fig. 1.1: Histograma correspondiente a la Velocidad del viento



En el gráfico anterior se muestra un histograma de la variable velocidad del viento y se observa que los datos tienden hacia la izquierda, por lo que no se visualiza una tendencia normal. Además se observa cierta uniformidad en la cola derecha del gráfico. Entonces concluimos que los datos no provienen de una distribución normal.

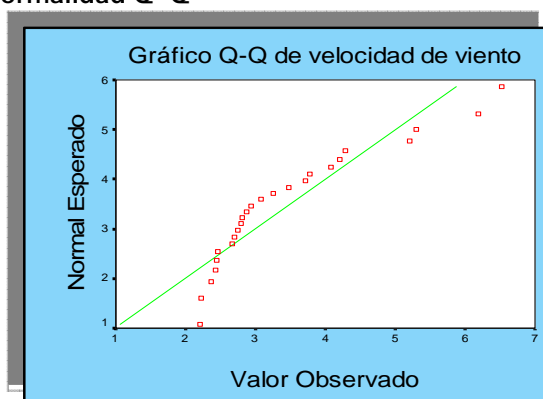
---

<sup>10</sup> Los gráficos se obtuvieron a través del paquete estadístico SPSS.

Los gráficos de normalidad Q-Q

En un gráfico Q- Q normal, cada valor observado ( $Y_i$ ) es comparado con la puntuación típica  $NZ_i$  que teóricamente le correspondería a ese valor en una distribución normal estandarizada. En el eje de las abcisas están representados los valores observados ordenados desde el más pequeño al más grande ( $Y_i$ ), en el de las ordenadas están representadas las puntuaciones típicas normales ( $NZ_i$ ). Cuando una muestra procede de una población normal, los puntos correspondientes a cada par se encuentran agrupados en torno a la diagonal representada en el diagrama. Las desviaciones de la diagonal indican desviaciones de la normalidad.

Fig. 1.2: El gráfico de normalidad Q- Q



En el gráfico se observa para la variable velocidad del viento, muchas desviaciones con respecto a la diagonal, por lo que podemos concluir que los datos no proceden de una población normal.

Además de los gráficos, se tienen pruebas de hipótesis formales para verificar la normalidad de los datos como la bondad de ajuste, Kolmogorov – Smirnov y Shapiro- Wilk, entre otras. Para este ejemplo en la siguiente tabla mostramos los estadísticos de Kolmogorov – Smirnov y Shapiro- Wilk acompañados de su significancia. Ambos estadísticos permiten contrastar la hipótesis nula de que los datos muestrales proceden de poblaciones normales: se rechaza la hipótesis de normalidad cuando la significancia muestral (P-valor) es menor que el nivel de significancia establecido (0.05).

Tabla 1.4 Pruebas de normalidad

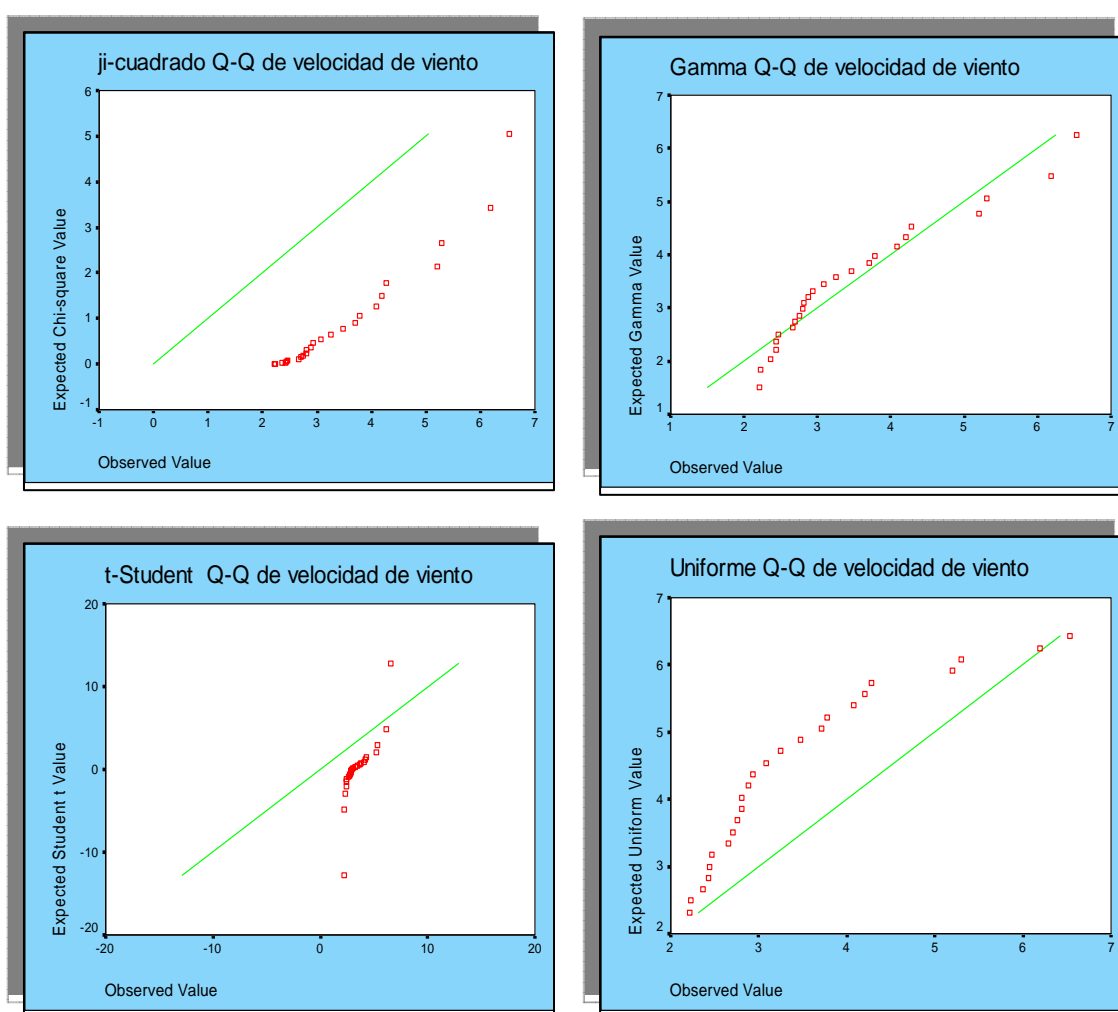
	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
velocidad de viento	.191	25	.020	.852	25	.002

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Observemos en la tabla 1.4 que la significancia muestral es menor que el nivel de significancia establecido. Lo que nos lleva a concluir que la velocidad del viento no procede de distribución normal.

Además no basta comprobar que el supuesto de normalidad no se cumple. Faltaría verificar, por lo menos, que no podemos emplear ningún otro modelo de inferencia paramétrica clásica. Para tal efecto se verifica a través del gráfico Q-Q si la variable velocidad del viento tiene algún comportamiento con algún modelo probabilístico señalado a continuación.

Fig. 1.3: Gráficos Q-Q con respecto a la variable velocidad del viento



Los gráficos anteriores proporcionan información para conocer el tipo de distribución en que se comportan los datos. Se tiene que para las distintas distribuciones que se han mostrado podemos decir que los datos no se distribuyen con ningún tipo de distribución de las consideradas, ya que los datos precisamente presentan desviaciones extremas en cuanto a la diagonal.

Dado que no se cumple ningún supuesto básico de la inferencia clásica, también la muestra es pequeña y los datos son continuos. Entonces para analizar este problema se deberá acudir a otros métodos que favorezcan a la inferencia de estos datos, porque es preciso mencionar que lo fundamental de la estadística es realizar inferencias confiables y consistentes. Para tal efecto se necesita conocer otros métodos que respondan a estos casos como el planteado en este ejemplo 1.1 de este capítulo.

### **1.4 Transformaciones de probabilidades continuas.**

a) Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra de  $n$  variables aleatorias continuas con función de probabilidad conjunta  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que no se anula en la región  $n$ -dimensional  $S_X$ .

Definimos la transformación

$$\begin{aligned}y_1 &= u_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\y_2 &= u_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\y_n &= u_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Una transformación biunívoca<sup>11</sup> de  $R^n$  en  $R^n$ , es decir, existe la transformación inversa definida sobre el recorrido de la transformación,

$$\begin{aligned}x_1 &= w_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\x_2 &= w_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\&\vdots \\x_n &= w_n(y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

b) Suponemos que tanto la transformación como su inversa son continuas.

c) Suponemos que existen las derivadas parciales

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_1}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial x_1}{\partial y_n}; \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial x_2}{\partial y_n}; \dots; \frac{\partial x_n}{\partial y_1}, \frac{\partial x_n}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial y_n}$$

y que son continuas

d) Suponemos que el jacobiano de la transformación

---

<sup>11</sup> Biunívoca: correspondencia de un elemento de un cierto conjunto con uno y sólo uno de otro conjunto.

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Es distinto de cero en el recorrido de la transformación.

Pues bien, bajo estas hipótesis, la variable aleatoria  $n$ -dimensional  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  es continua y tiene por función de densidad conjunta.

$$l(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(w_1(y_1, y_2, \dots, y_n), w_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, w_n(y_1, y_2, \dots, y_n)) \cdot |J|$$

### Ejemplo 1.2

Veamos un ejemplo enfocado a las transformaciones de funciones de probabilidades continuas en el caso particular  $n=2$ .

Sea  $(X_1, X_2)$  una variable aleatoria bidimensional uniformemente distribuida en el círculo unidad. Sea la variable aleatoria

$$\begin{cases} Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \\ Y_2 = \arctan(X_2 / X_1) \end{cases}$$

Determinar la función de densidad conjunta del vector  $(Y_1, Y_2)$ .

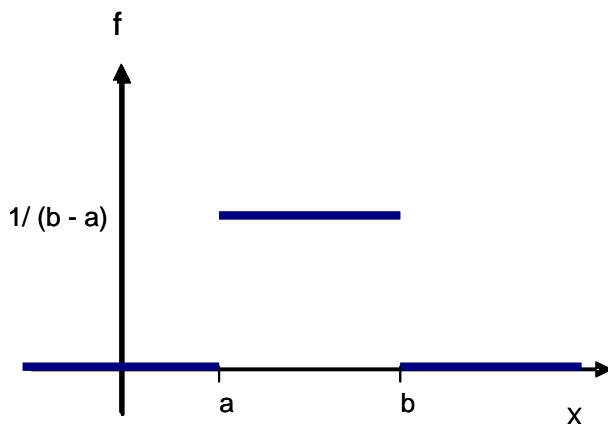
1º Se debe determinar la función de densidad conjunta  $(X_1, X_2)$ .

Hagamos un bosquejo previo en los reales para tener una idea de la función de densidad conjunta en  $(X_1, X_2)$ .

La distribución uniforme  $[a, b]$  esta determinada de la siguiente manera

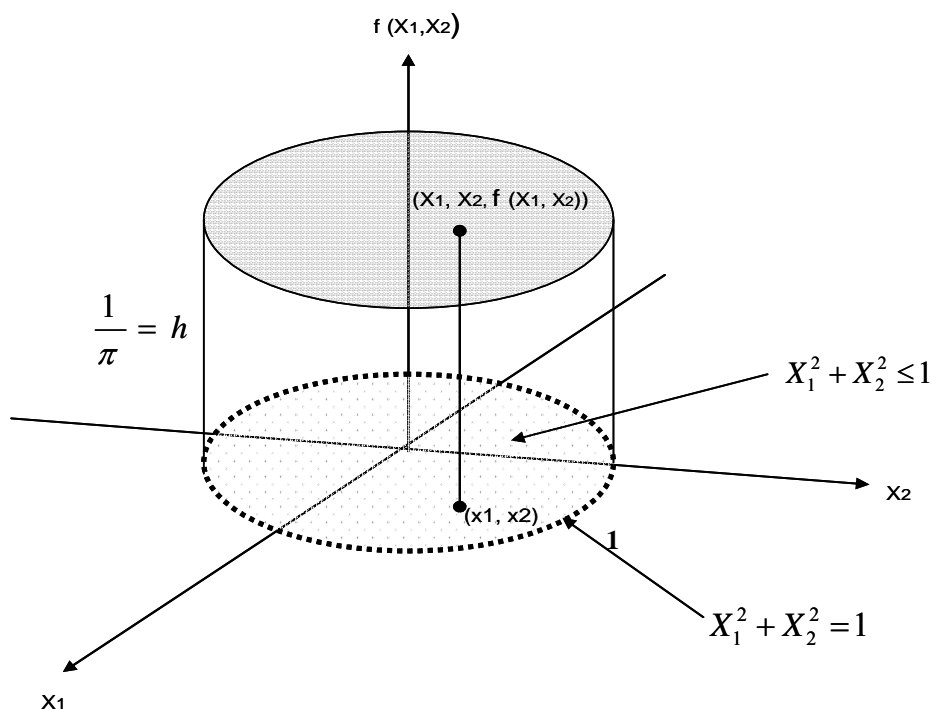
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Gráficamente tenemos



Entonces si la imagen de esta función es  $\frac{1}{b-a}$  el área (A) de esa región se determina base por altura = la distancia de “a” hasta “b” por la altura de la imagen de esa función  $\frac{1}{b-a}$ ; entonces tenemos  $A = (b-a)\left(\frac{1}{b-a}\right) = 1$ . Además se está comprobando una de las condiciones para que sea una función de densidad ya que el área es 1.

Ahora, volvemos al análisis del ejemplo anterior.



Nos interesa conocer el volumen de la región del cilindro, que viene dada por:

$$V = (\text{Altura})(\text{Área del cilindro}) = h.A_c$$

## Capítulo I

---

$A_C = \pi R^2$ , donde  $R=1$  entonces

$$A_C = \pi(1)^2 = \pi$$

Para que el volumen nos de 1 la altura tendrá que valer  $\frac{1}{\pi}$ . Determinamos el  $V$  así

$$V = h \cdot A_C$$

$$V = \frac{1}{\pi} \pi = 1$$

A su vez demostramos que es una función de densidad, ya que su volumen nos da 1 y es una función no negativa. Por tanto, determinamos la función de densidad bidimensional uniformemente como.

$$f(X_1, X_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & 0 < X_1^2 + X_2^2 \leq 1 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Siguiendo la definición se debe encontrar las transformaciones inversas, en este caso nos auxiliamos de las transformaciones polares para lograr tal objetivo.

Sea

$$X_1 = r \cos \theta$$

$$X_2 = r \sin \theta$$

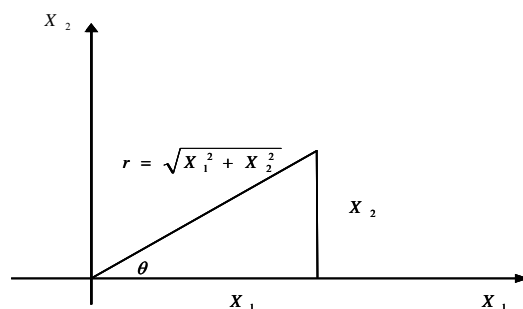
$$X_1^2 + X_2^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = Y_1$$

Ahora, la transformación inversa, es:

$$X_1 = r \cos \theta = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \cos \theta = Y_1 \cos \theta$$

$$X_2 = r \sin \theta = Y_1 \sin \theta$$

$$\begin{cases} X_1 = Y_1 \cos \theta \\ X_2 = Y_1 \sin \theta \end{cases}$$



$$\tan \theta = \frac{X_2}{X_1} \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{X_2}{X_1}\right) = Y_2$$

Finalmente quedan determinadas las transformaciones inversas en términos de  $(Y_1, Y_2)$ .

$$\begin{cases} X_1 = Y_1 \cos Y_2 & 0 \leq Y_1 \leq 1; 0 \leq Y_2 \leq 2\pi \\ X_2 = Y_1 \sin Y_2 & 0 \leq Y_1 \leq 1; 0 \leq Y_2 \leq 2\pi \end{cases}$$

Evidentemente, estas transformaciones inversas son continuas.

Se determina las derivadas parciales con respecto a la transformación inversa encontradas anteriormente y se tienen.

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \cos Y_2 \qquad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = -Y_1 \sin Y_2$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \sin Y_2 \qquad \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = Y_1 \cos Y_2$$

Observe que las derivadas parciales encontradas son continuas.

Determinamos el Jacobiano

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos Y_2 & -Y_1 \sin Y_2 \\ \sin Y_2 & Y_1 \cos Y_2 \end{vmatrix}$$

$$J = Y_1 \cos^2 Y_2 + Y_1 \sin^2 Y_2$$

$$J = Y_1 (\cos^2 Y_2 + \sin^2 Y_2)$$

$$J = Y_1$$

Así, la función de densidad del vector  $(Y_1, Y_2)$  será

$$f_{Y_1, Y_2}(Y_1, Y_2) = f_{(X_1, X_2)}(X_1, X_2) \cdot |J|$$

$$f_{Y_1, Y_2}(Y_1, Y_2) = f_{(X_1, X_2)}(Y_1 \cos Y_2, Y_1 \sin Y_2) \cdot |Y_1|$$

$$f_{Y_1, Y_2}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{\pi} \cdot Y_1$$

O equivalentemente,

$$f_{Y_1, Y_2}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} \frac{Y_1}{\pi}, & \text{Si } 0 \leq Y_1 \leq 1, 0 \leq Y_2 \leq 2\pi \\ 0, & \text{En otros casos} \end{cases}$$

Ahora para el caso  $n = 1$

Si  $X$  es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad  $f_X$  que satisface  $f_X(x) > 0$  para  $a < x < b$ , y  $y = H(x)$  es una función de  $x$  continua estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces la variable aleatoria  $Y = H(x)$  tiene la función de densidad.

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Con  $x = H^{-1}(y)$  expresada en términos de  $y$ .

### Ejemplo 1.3

Sea  $X$  una variable aleatoria con dominio  $(0, 3)$  y función de densidad

$$f_X(X) = \begin{cases} \frac{X^2}{9}, & 0 < X < 3 \\ 0, & \text{En otros casos} \end{cases}$$

Sea  $Y = H(X) = X^2$  la variable aleatoria transformada.

En esta situación es una función estrictamente creciente sobre el rango  $0 < X < 3$  y la función inversa será la siguiente

$$H^{-1}(y) = \sqrt{y} \rightarrow (H^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Es continua, y está definida si  $0 < y < 9$ . Así pues,  $Y$  es una variable aleatoria continua con dominio  $0 < Y < 9$  y función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{y})^2}{9} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{18}, & 0 < Y < 9 \\ 0, & \text{En otros casos} \end{cases}$$

## 1.5 Estadísticos Ordenados

### 1.5.1 Estadísticos de Orden en muestras de variables aleatorias continuas.

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una población con función de distribución acumulada continua  $F_X$ . Dado que  $F_X$  es continua, la probabilidad de que  $X_i = X_j$ , es igual a cero, para todo  $i \neq j$ . Por lo tanto, existe un único orden dentro de la muestra. Supongamos  $X_{(1)}$  es el más pequeño de estos valores  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ;  $X_{(2)}$  es el segundo más pequeño, etc.; y  $X_{(n)}$  es el más grande. Entonces

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$$

La muestra aleatoria original esta ordenada en forma creciente, y así se definen en términos generales los *estadísticos de orden* de muestras aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . El  $X_{(r)}$  para  $1 \leq r \leq n$ , se llama el  $r$ -ésimo estadístico de orden. El asunto de las estadísticas de orden generalmente se trata con las propiedades de  $X_{(r)}$  o funciones de algún subconjunto de los  $n$  estadísticos de orden.

Las estadísticas de orden son particularmente útiles en la estadística no Paramétrica porque la transformación  $U_{(r)} = F_X(X_{(r)})$  produce una variable aleatoria que es el  $r$ -ésimo estadístico de orden para una población uniforme en  $(0,1)$ . Sin tener en cuenta a  $F_X$  ya que no se tiene alguna suposición de  $Y = F_X(X)$ , por consiguiente  $U_{(r)}$  es de distribución libre. Esta propiedad se debe a la llamada transformación de probabilidad integral, que se demuestra en el siguiente teorema.

#### Teorema 1.1 Transformación de Probabilidad integral

*Dado una variable aleatoria  $X$  tenemos una función de distribución acumulada  $F_X$ . Si  $F_X$  es continua, entonces la variable aleatoria  $Y$  producida de la transformación  $Y = F_X(X)$  tiene una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo  $(0,1)$ .*

Prueba.

Se tiene que  $0 \leq F_X(X) \leq 1$  para todo  $x$ , tenemos  $F_Y(Y) = 0$  para  $y \leq 0$  y  $F_Y(Y) = 1$  para  $y \geq 1$ . Para  $0 < y < 1$ , se define  $u$  como el número más grande satisfaciendo  $F_X(u) = y$ . Entonces  $F_X(x) \leq y$  si solo si  $X \leq u$ , y se tiene que

$$F_Y(y) = P[F_X(X) \leq y] = P(X \leq u) = F_X(u) = y$$

que es una distribución uniforme. ■<sup>12</sup>

Como consecuencia de este teorema, podemos concluir que si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una muestra aleatoria para una población con distribución continua  $F_X$ , entonces  $F_X(X_1), F_X(X_2), \dots, F_X(X_n)$  constituye una muestra aleatoria para una población uniforme. De manera similar, si  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$  son los estadísticos de orden de la muestra original, entonces.

$$F_X(X_{(1)}) < F_X(X_{(2)}) < \dots < F_X(X_{(n)})$$

Son los estadísticos de orden de la distribución uniforme sobre (0,1).

Una aplicación práctica importante de las distribuciones de las transformaciones de probabilidad- integral es la generación de observaciones de distribuciones de probabilidad continua específicas. Por ejemplo, supóngase que generamos una observación  $X$  para una distribución exponencial con media 2. Podemos hacer lo siguiente. La función de distribución continua (fcd) de  $X$  es  $F_X(x) = 1 - e^{-x/2}$ , y por el Teorema 1.1 la transformación de la variable aleatoria  $Y = 1 - e^{-x/2}$  esta distribuida en  $U$ , una observación de la distribución uniforme en el intervalo (0,1). Haciendo  $1 - e^{-x/2} = U$  y resolviendo para  $X = -2\ln(1-U)$ . Usando un generador de números aleatorios (los paquetes estadísticos o calculadores de bolsillo pueden proporcionarlo), obtenemos  $U$  y entonces el valor deseado  $X$  de la transformación  $X = -2\ln(1-U)$ . Otras aplicaciones de la transformación de probabilidad – integral son dados en el tema 1.5.2. Para cada muestra aleatoria queremos generar una o más de una distribución de probabilidad continua específica, podemos generar una muestra aleatoria de la distribución uniforme (0,1) y aplicar la transformación apropiada a cada observación en la muestra.

Algunas aplicaciones conocidas de estadísticos de orden que son obvias se muestran a continuación:

1.  $X_{(n)}$ , es el valor máximo en la muestra, es de interés en el estudio de inundaciones y otros fenómenos extremos meteorológicos.
2.  $X_{(1)}$ , es el mínimo valor, son usados para fenómenos donde, por ejemplo, la fuerza de una cadena depende del eslabón más débil.

---

<sup>12</sup> ■ Símboliza que termina demostración

3. La mediana muestral, definida como  $X_{[(n+1)/2]}$  para  $n$  impar y, cualquier número entre  $X_{(n/2)}$  y  $X_{(n/2+1)}$  para  $n$  par, es una medida de localización y una estimación de la tendencia central.
4. El rango medio de la muestra, es definido como  $(X_{(1)} + X_{(n)})/2$ , es también una medida de tendencia central.
5. El rango muestral  $X_{(n)} - X_{(1)}$  es una medida de dispersión.
6. El rango intercuartil de la muestra  $(Q_3 - Q_1)/2$  es también una medida de dispersión.
7. En muestras censuradas, el proceso de muestreo algunas veces termina después de completar las  $r$  observaciones de  $n$ . Por ejemplo, en la prueba de la duración de un bombillo eléctrico, uno puede comenzar con un grupo de  $n$  bombillas pero detenerse antes de que salga el  $r$ -ésimo bombillo quemado. Entonces la información sólo ésta disponible en  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(r)}$  donde  $r \leq n$ .
8. Los estadísticos de orden son usados para estudiar datos atípicos (outliers) o valores extremos, es decir, llamados valores contaminados (manipulados) son datos sospechosos.

El estudio de los estadísticos de orden en este tema, está limitado a sus propiedades matemáticas y estadísticas, incluyendo la distribución de probabilidad conjunta, distribución de probabilidad marginal, momentos exactos, momentos asintóticos y distribuciones marginales asintóticos.

### **1.5.2 Distribución conjunta de $n$ estadísticos de orden**

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida tomada de la población continua con una función de densidad de probabilidad  $f_X$ , la función de probabilidad conjunta es:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i)$$

La distribución conjunta de las  $n$  estadísticas de orden para esta muestra aleatoria no es la misma, dado que las estadísticas de orden, obviamente no son ni independientes ni idénticamente distribuidas. Estas distribuciones son fáciles de derivar, usando el método del Jacobiano para transformaciones.

Por ejemplo:

- Para  $n = 2$ , supongamos que la muestra es  $(X_1, X_2)$  y se tiene la transformación:

$$Y_1 = X_2 = \min (X_1, X_2)$$

$$Y_2 = X_1 = \max (X_1, X_2)$$

$$\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(Y_1, Y_2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1$$

Ahora, otra posible transformación es:

$$Y_1 = X_1 = \min (X_1, X_2)$$

$$Y_2 = X_2 = \max (X_1, X_2)$$

$$\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(Y_1, Y_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

En general, el número de transformaciones posibles serán  $n!$ . Para  $n=3$ , se tendrían que analizar  $3!= 6$  transformaciones posibles, así como se hizo en  $n=2$ . El objetivo es que los determinantes de todas las transformaciones posibles, siempre sean  $-1$  ó  $1$ .

De manera general, si se tiene una muestra  $X_1, X_2, \dots, X_n$  definimos los estadísticos de orden:

$Y_1 =$  el más pequeño de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$Y_2 =$  segundo más pequeño de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

.....

$Y_r =$  r-ésimo más pequeño de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

.....

$Y_n =$  el más grande  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Estas transformaciones no son de uno a uno. En efecto, ya que  $n!$  es el número posible de arreglos de la variable aleatoria original en orden creciente y de magnitud, entonces existen  $n!$  inversos para la transformación.

Una de estas  $n!$  permutaciones podría ser

$$X_5 < X_1 < X_{n-1} < \dots < X_n < X_2$$

Y las correspondientes transformaciones inversas son

$$X_5 = Y_1$$

$$X_1 = Y_2$$

$$X_{n-1} = Y_3$$

.....

$$X_n = Y_{n-1}$$

$$X_2 = Y_n$$

Como ya enfatizamos anteriormente, el Jacobiano de esta transformación puede resultar ser  $-1$  ó  $1$ . Así, la función de densidad conjunta de las variables aleatorias en estas transformaciones particulares sería:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(y_2, y_n, \dots, y_3, y_{n-1}) |J| = \prod_{i=1}^n f_X(y_i) \text{ para } y_1 < y_2 < \dots < y_n$$

Esta misma expresión resulta para cada uno los  $n!$  arreglos, puesto que cada Jacobiano tiene valores absolutos  $1$  y la multiplicación es conmutativa. Por lo tanto, aplicamos la técnica general del Jacobiano descrito en el tema anterior, resulta lo siguiente.

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}}(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \sum_{i=1}^{n!} \prod_{i=1}^n f_X(y_i) \\ &= n! \prod_{i=1}^n f_X(y_i) \end{aligned}$$

para  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ , donde  $n!$  es el número de transformaciones inversas.

En otras palabras, la función de densidad conjunta de las  $n$  estadísticas de orden es  $n!$  de la distribución conjunta de la muestra original. Por ejemplo, para una muestra aleatoria de tamaño  $n$  para una distribución normal, tenemos:

$$f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n!}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right]$$

para  $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty$

### 1.5.3 Distribuciones marginales de Estadística de orden

El método usual para encontrar la distribución marginal de cualquier variable aleatoria puede ser aplicado al  $r$ -ésimo estadístico de orden por integración entre las restantes  $n-1$  variables conjunta encontrada en 1.5.2.

Para el elemento más grande de la muestra,  $X_{(n)}$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 f_{X_{(n)}}(y_n) &= n! f_X(y_n) \int_{-\infty}^{y_n} \int_{-\infty}^{y_{n-1}} \dots \int_{-\infty}^{y_3} \int_{-\infty}^{y_2} \prod_{i=1}^{n-1} f_X(y_i) dy_i \\
 &= n! f_X(y_n) \int_{-\infty}^{y_n} \int_{-\infty}^{y_{n-1}} \dots \int_{-\infty}^{y_3} [F_X(y_2) f_X(y_2)] \prod_{i=3}^{n-1} f_X(y_i) dy_2 \dots dy_{n-1} \\
 &= n! f_X(y_n) \int_{-\infty}^{y_n} \int_{-\infty}^{y_{n-1}} \dots \int_{-\infty}^{y_4} \frac{[F_X(y_3)]^2}{2(1)} f_X(y_3) \prod_{i=4}^{n-1} f_X(y_i) dy_3 \dots dy_{n-1} \\
 &= n! f_X(y_n) \frac{[F_X(y_n)]^{n-1}}{(n-1)!} \\
 &= n [F_X(y_n)]^{n-1} f_X(y_n)
 \end{aligned}$$

Similaramente, para los pequeños elementos,  $X_{(1)}$ ,

$$\begin{aligned}
 f_{X_{(1)}}(y_1) &= n! f_X(y_1) \int_{y_1}^{\infty} \int_{y_2}^{\infty} \dots \int_{y_{n-2}}^{\infty} \int_{y_{n-1}}^{\infty} \prod_{i=2}^n f_X(y_i) dy_n dy_{n-1} \dots dy_3 dy_2 \\
 &= n! f_X(y_1) \int_{y_1}^{\infty} \int_{y_2}^{\infty} \dots \int_{y_{n-2}}^{\infty} [1 - F_X(y_{n-1})] f_X(y_{n-1}) \prod_{i=2}^{n-2} f_X(y_i) dy_{n-1} \dots dy_2 \\
 &= n! f_X(y_1) \int_{y_1}^{\infty} \int_{y_2}^{\infty} \dots \int_{y_{n-1}}^{\infty} \frac{[1 - F_X(y_{n-2})]^2}{2(1)} f_X(y_{n-2}) \prod_{i=2}^{n-3} f_X(y_i) dy_{n-2} \dots dy_2 \\
 &\dots \\
 &= n! f_X(y_1) \frac{[1 - F_X(y_1)]^{n-1}}{(n-1)!}
 \end{aligned}$$

$$= n[1 - F_X(y_1)]^{n-1} f_X(y_1)$$

Para los  $r$ -ésimo estadísticos de orden, se tiene: el orden de integración que son más fáciles de trabajar  $\infty > y_n > y_{n-1} > \dots > y_r$  seguido por  $-\infty < y_1 < y_2 < \dots < y_r$ , de modo que tengamos las siguientes combinaciones de técnicas usadas para  $X_{(n)}$  y  $X_{(1)}$

$$f_{X(r)}(y_r) = n! f_X(y_r) \int_{-\infty}^{y_r} \int_{-\infty}^{y_{r-1}} \dots \int_{-\infty}^{y_2} \int_{y_{r+1}}^{\infty} \int_{y_{n-1}}^{\infty} \dots \int_{y_{n-1}}^{\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n-1} f_X(y_i) dy_n \dots dy_{r+2} dy_{r+1} dy_1 \dots dy_{r-1}$$

$$= n! f_X(y_r) \frac{[1 - F_X(y_r)]^{n-r}}{(n-r)!} \int_{-\infty}^{y_r} \int_{-\infty}^{y_{r-1}} \dots \int_{-\infty}^{y_2} \prod_{i=1}^{r-1} f_X(y_i) dy_1 \dots dy_{r-2} dy_{r-1}$$

.....

$$= n! f_X(y_r) \frac{[1 - F_X(y_r)]^{n-r}}{(n-r)!} \frac{[F_X(y_r)]^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F_X(y_r)]^{r-1} [1 - F_X(y_r)]^{n-r} f_X(y_r)$$

# Capítulo II

## Teoría para los procedimientos de Pruebas de Métodos no Paramétricos

### 2.1 Introducción.

Se ha venido mencionando definiciones generales tanto de las pruebas paramétrica como las pruebas no paramétrica. Si se conoce la forma funcional de la función de distribución que sigue la variable aleatoria, objeto de estudio, sólo tenemos que estimar los parámetros que la determinan, estamos en un problema de *inferencia estadística paramétrica*; por el contrario cuando no se conoce la forma funcional de la distribución que sigue la variable aleatoria continua objeto de estudio, estamos ante un problema de *inferencia estadística no paramétrica*.

Hasta ahora, casi todos los procedimientos para realizar inferencia que se han examinado, trabajan bajo hipótesis paramétrica. Así, en el caso de querer realizar inferencia sobre una cierta población a la que asociamos una v.a.  $X$ , y que suponemos que  $f_X(x)$  (es decir que  $X$  se distribuye de algunas distribuciones clásicas conocidas).

Sin embargo, en más de una situación real, no se dispone de la información suficiente que permita mantener esa hipótesis de trabajo. El ejemplo típico, tiene lugar cuando lo que se desea es, precisamente, establecer la distribución de la variable aleatoria  $X$ .

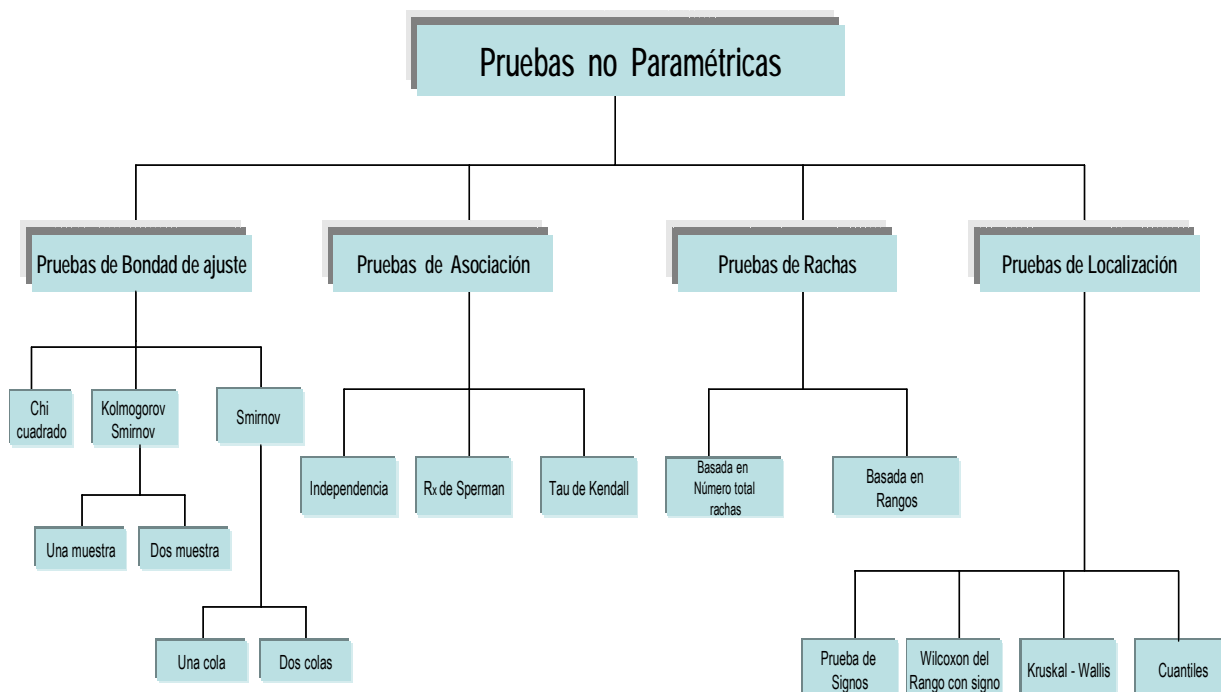
Aunque se restrinja el grupo de herramientas a manejar, al conjunto formado por los métodos de contraste no paramétricos, las cuestiones que se pueden abordar con ellos son de muy variada índole. Y obviamente, también es muy amplio el conjunto de contrastes resultantes. El presente capítulo de esta investigación, comentaremos algunos métodos no paramétricos de los que se conocen como contrastes de una muestra, dos muestras y  $k$  muestras; que sirven para hacer inferencia sobre una o varias variables con respecto a una población.

Este capítulo desglosa pruebas de inferencia de tipo no paramétrico, centrándose en los casos de los contrastes de hipótesis. Tras justificar la necesidad de la inferencia, se comentarán algunos de los contrastes no paramétricos más conocidos y los resultados generales en los que se basan.

Revisaremos algunas de las pruebas No Paramétricas más generales existentes tales como:

- a) Pruebas de bondad de ajuste
- b) Pruebas de asociación
- c) Pruebas de Rachas
- d) Pruebas de Localización

Presentando un panorama general de las pruebas inferenciales no paramétricas en la Figura 2.1. Explicando con detalle cada una de estas pruebas que se ponen a disposición las herramientas posibles para que se cuente con el recurso necesario en el análisis estadístico inferencial de la información.



*Figura 2.1 Panorama de las Pruebas Inferenciales no Paramétricas.*

### **2.2 Pruebas de bondad de ajuste.**

Trataremos en este tópico los tres métodos de prueba de bondad de ajuste más generales, los cuales son:

- La prueba de ji-cuadrado
- La prueba de Kolmogorov-Smirnov.
- La prueba de Smirnov.

#### **2.2.1 Prueba de ji-cuadrado.**

La prueba ji-cuadrado permite averiguar si la distribución empírica de una variable aleatoria nominal se ajusta a una determinada distribución teórica (uniforme, binomial, multinomial, etc).

Es el contraste más antiguo y consiste en comparar las frecuencias observadas en la muestra para cada intervalo o clase del histograma, con las que se obtendrían según el modelo teórico

propuesto para ser contrastado. Para ello, como se ha dicho, los datos de la muestra se agrupan en intervalos, porque el tamaño de la muestra es grande, como lo requiere la prueba. En este caso, el primero y el último de los intervalos se dejarán abiertos, con objeto de abarcar todo el recorrido de la variable en los reales cuando la variable sea continua.

Los datos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  consisten de observaciones independientes de una variable aleatoria  $X$ , observados en una muestra de tamaño  $n$ , es que ha de ser lo suficientemente grande ( $n > 25$ ), suponemos que la característica sigue un modelo probabilístico determinado.

Algunas definiciones de las que haremos uso en esta prueba son las siguientes:

### Definición 2.1

Las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$ , son independientes si y solo si para toda  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n).^{13}$$

Donde  $f_i(x_i)$  es la marginal de  $x_i$ .

### Definición 2.2

Al tratar con vectores aleatorios  $n$  dimensionales el dominio es el espacio euclidiano  $R^n$  y para  $n \geq 4$ , y no son posibles las representaciones gráficas. A pesar de ello, las distribuciones marginales están en una dimensión y la distribución condicional para una variable dados los valores correspondientes a las otras variables esta en una dimensión. La distribución condicional de  $X_i$  dados los valores  $(x_2, \dots, x_n)$  se denota por

$$f_{X_i / x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n}(x_i) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i}.$$

En muestras sucesivas, el número de observaciones pertenecientes a cada intervalo constituye una variable aleatoria. El experimento consiste en obtener  $n_1$  observaciones en la clase 1,  $n_2$  observaciones en la clase 2, ..., y  $n_k$  observaciones en la clase  $k$ , siendo  $p_1, p_2, \dots, p_k$  las probabilidades de cada uno de los  $k$  resultados posibles. La distribución de las variables aleatorias  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sigue un modelo de probabilidad multinomial, que da la probabilidad de

---

<sup>13</sup> Hines, William, W. and C. Montgomery, Douglas (1993). Probabilidad y estadística para ingenieros y administración. segunda edición. Editorial Continental, S.A. de C.V. México. Pag 156.

obtener una muestra con una distribución de frecuencias determinada para las  $k$  categorías contempladas.

El número  $n_i$ , de observaciones contabilizadas en la muestra para el intervalo  $i$ -ésimo, son las frecuencias absolutas reflejadas en la primera columna de la Tabla 2.1. Es preciso que el valor esperado de la frecuencia  $e_i$ , en todas las clases sea mayor o igual a 5. Si este requisito no se cumple, es necesario unir las clases con los valores más próximos de frecuencias observadas más frecuentes.

El problema radica, por tanto, en encontrar el estadístico adecuado para evaluar la discrepancia entre valores observados y valores teóricos de las frecuencias. Veamos como se puede conseguir.

Tabla 2.1: Contraste  $\chi^2$  de Pearson

Intervalos	Frecuencias observadas $n_i$	Probabilidad $p_i / H_0$	Frecuencias esperadas $e_i$	Valor del estadístico $\frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$
Menos de $L_1$	$n_1$	$p_1$	$e_1 = np_1$	$\frac{(n_1 - e_1)^2}{e_1}$
$L_1 - L_2$	$n_2$	$p_2$	$e_2 = np_2$	$\frac{(n_2 - e_2)^2}{e_2}$
...	...	...	...	...
$L_{i-1} - L_i$	$n_i$	$p_i$	$e_i = np_i$	$\frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$
...	...	...	...	...
$L_{k-1}$	$n_k$	$p_n$	$e_k = np_k$	$\frac{(n_k - e_k)^2}{e_k}$
	$\sum n_i = n$	$\sum p_i = 1$		$\chi^2_{obs}$

**Hipótesis de prueba**

Sea  $F(x)$  una función de distribución desconocida de  $X$  y sea  $F^*(x)$  alguna función de distribución hipotética, tenemos que

$$H_0 : F(x) = F^*(x) \text{ para todo } x$$

$$H_1 : F(x) \neq F^*(x) \text{ para algún } x$$

La hipótesis se lee de la siguiente forma:

$H_0$ : La función de distribución de la variable aleatoria observada es  $F^*(x)$ .

$H_1$ : La función de distribución de la variable aleatoria observada es diferente que  $F^*(x)$ .

### Estadístico de prueba

El valor esperado de  $n_i$ , por tanto, vendrá dado por  $E(n_i) = e_i = np_i$ , tal como se refleja en la penúltima columna de la Tabla 2.1.

Hemos considerado el caso para  $k = 2$ :

$$n_i = b(p_i, n) \approx N(np_i, np_i(1-p_i))$$

por tanto,

$$\frac{n_i - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}} \rightarrow N(0,1) \quad \text{para } i = 1, 2$$

Así;

$$\left( \frac{n_i - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}} \right)^2 \rightarrow \chi_1^2 \quad \text{para } i = 1, 2$$

$$\frac{(n_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)} = \sum_{i=1}^2 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \rightarrow \chi_1^2$$

Para el caso de  $k = 2$  tiene aproximadamente una distribución ji-cuadrado con un grado de libertad conforme  $n$  va tomando valores cada vez más grandes. El estadístico adecuado, si fuese cierta la hipótesis nula, para evaluar la significación estadística de la discrepancia será:

$$\sum_{i=1}^k \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} \approx \chi_{k-1}^2, \quad e_i = np_{i0}, \quad p_{i0}: \text{probabilidad de la clase } i \text{ bajo } H_0.$$

### Regla de decisión

La región crítica para el contraste (rechazo de la hipótesis sobre el modelo propuesto) estará situada en la cola de la derecha, para valores grandes del estadístico, indicando que cuanto mayor sea la discrepancia entre  $n_i$  y  $e_i$ , más razones tendremos para rechazar  $H_0$ . Para valores pequeños de esta expresión, se concluirá que no hay evidencia estadística suficiente para rechazar que la muestra proviene del modelo enunciado en la hipótesis nula.

Ahora bien el resultado del valor observado ( $\chi_{obs}^2$ ) para la variable  $\chi^2$  que mide la discrepancia. Si este valor supera el punto crítico (cuantil) determinado por el nivel de significación  $\alpha$  en la distribución  $\chi_{k-1}^2$ , se rechazará el modelo poblacional propuesto en la hipótesis nula.

### Ejemplo 2.1

El gerente de una planta industrial pretende determinar si el número de empleados que asisten al consultorio médico de la planta se encuentra distribuido, en forma equitativa, durante los cinco días de trabajo de la semana. Con base en una muestra aleatoria de 4 semanas completas de trabajo, se observó el siguiente número de consultas:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	viernes
49	35	32	39	45

Con  $\alpha = 0.05$ , ¿existe alguna razón para creer que el número de empleados que asisten al consultorio médico, no se encuentran distribuidos en forma equitativa durante los días de trabajo de la semana?

Una distribución uniforme implicaría que para cada día de la semana sean iguales.

**Solución:**

Probaremos las siguientes hipótesis:

$H_0$ : Esta muestra aleatoria representa observaciones de una distribución uniforme  $p_i = 0.2$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , donde  $p_i$  es la probabilidad correspondiente a cada día de trabajo de la semana.

$H_1$ : Esta muestra aleatoria tiene una función de distribución diferente a la descrita en la hipótesis nula.

Dado que el tamaño de la muestra es  $n = 200$ , la frecuencia esperada para cada día es  $np_i = 40$ . Entonces, el valor de la estadística de prueba es

$$\chi^2 = \frac{(49 - 40)^2}{40} + \frac{(35 - 40)^2}{40} + \frac{(32 - 40)^2}{40} + \frac{(39 - 40)^2}{40} + \frac{(45 - 40)^2}{40} = 4.9$$

Para  $k = 5$  clases, se observa en la tabla B que el valor crítico es  $\chi_{0.95,4}^2 = 9.49$ . Ya que  $\chi^2 = 4.9 < \chi_{0.05,4}^2 = 9.49$ , no puede rechazarse la hipótesis nula.

Con base a esta evidencia, no existe ninguna razón para creer que el número de empleados que acuden al consultorio no se encuentre distribuido en forma uniforme a lo largo de la semana de su trabajo.

## 2.2.2 Prueba de Kolmogorov-smirnov

### 2.2.2.1 Para una sola muestra.

En la prueba de bondad de ajuste de la  $\chi^2$ , la comparación entre las frecuencias observadas y esperadas es hecho por un conjunto de  $k$  grupos. Solo  $k$  comparaciones son hechas para las  $n$  observaciones, donde  $k \leq n$ . Si las  $n$  observaciones de la muestra son valores de una variable aleatoria continua, a distinción de los datos estrictamente categóricos, las comparaciones pueden ser hechas entre frecuencias acumuladas relativas para cada valor diferente observado.

Si  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  denota los estadísticos de orden de una muestra aleatoria, la función de distribución acumulativa empírica esta definida por:

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{(1)} \\ \frac{k}{n} & \text{si } X_{(k)} \leq x < X_{(k+1)} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(n)} \end{cases}$$

$S_n(x)$  es también algunas veces llamado la imagen estadística de la población.

Esta prueba estadística de bondad de ajuste es una estimación de la población, son funciones de las desviaciones entre la distribución acumulada observada y la correspondiente probabilidad acumulada esperada bajo la hipótesis nula.

### Hipótesis de prueba

Asumimos una muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tomada de una población  $F_X$  continua y desconocida. Las hipótesis de interés son:

A. Prueba de dos lados.

$$H_0 : F_X(x) = F_0(x) \text{ para todo } x$$

$$H_1 : F_X(x) \neq F_0(x) \text{ para algún } x$$

B. Prueba de un lado ( $F_X(x) < F_0(x)$ ).

$$H_0 : F_X(x) \geq F_0(x) \text{ para todo } x$$

$$H_1 : F_X(x) < F_0(x) \text{ para algún } x$$

C. Prueba de un lado ( $F_X(x) > F_0(x)$ ).

$$H_0 : F_X(x) \leq F_0(x) \text{ para todo } x$$

$$H_1 : F_X(x) > F_0(x) \text{ para algún } x$$

*Estadístico de prueba*

La prueba estadística de una sola muestra de Kolmogorov-Smirnov esta basada en la diferencia entre las hipótesis de la función de distribución acumulada  $F_0(x)$  bajo  $H_0$  y la función de distribución empírica de la prueba  $S_n(x)$ , para todo  $x$ . Adicionalmente, declara que la función  $S_n(x)$ , con saltos ocurriendo en los valores del estadístico de orden  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  para la prueba, se acerca a la función de distribución real para todo  $x$ . Por consiguiente, para  $n$  grande, la desviación entre la función empírica y la función real  $|S_n(x) - F_X(x)|$ , muestra ser pequeño para todo valor de  $x$ , este resultado sugiere que el estadístico sea:

$$D_n = \sup_x |S_n(x) - F_0(x)| \quad (2.1)$$

para algún  $n$ , una medida razonable de la exactitud de nuestra estimación.

Este estadístico  $D_n$ , llamado la prueba estadística de una sola muestra de Kolmogorov-Smirnov, es particularmente usado en inferencia estadística no paramétrica porque la distribución de probabilidad de  $D_n$  no depende de  $F_X(x)$  siempre y cuando  $F_X$  sea continuo. Por consiguiente,  $D_n$  es un estadístico de distribución libre. Esto es el resultado del teorema 2.1 que probaremos posteriormente.

Las desviaciones direccionales definidas como

$$D_n^+ = \sup_x [S_n(x) - F_0(x)] \quad D_n^- = \sup_x [F_0(x) - S_n(x)] \quad (2.2)$$

Son llamados estadísticos unilaterales de Kolmogorov-Smirnov, donde  $D_n^+$  es el estadístico de la cola superior y  $D_n^-$  es el estadístico de la cola inferior.

El valor del estadístico Kolmogorov-Smirnov de la prueba de bondad de ajuste puede ser calculado si toda observación  $n$  tiene diferente valor numérico (Ninguno de los empates). Sin embargo, la expresión siguiente es considerada más fácil para el cálculo algebraico y se aplica cuando hay empates presentes. La fórmula es

$$\begin{aligned} D_n &= \sup_x |S_n(x) - F_0(x)| \\ &= \max_x [ |S_n(x) - F_0(x)|, |S_n(x - \varepsilon) - F_0(x)| ] \end{aligned}$$

Donde  $\varepsilon$  denota algún número pequeño positivo. El ejemplo ilustrará este método algebraico fácil de cálculo  $D_n$ . Los cuantiles de la distribución nula exacta están dados en la tabla C para  $n \leq 40$ , junto con valores aproximados para  $n > 40$ .

A continuación se presentan los teoremas que se utilizaron para deducir el estadístico de prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra.

### Teorema 2.1

Los estadísticos  $D_n$ ,  $D_n^+$  y  $D_n^-$  tienen distribuciones completamente libres para algún  $F_X$  continuo.

### Prueba

$$D_n = \sup_x |S_n(x) - F_X(x)| = \max(D_n^+, D_n^-)$$

Definiendo adicionalmente los estadísticos de orden  $X_{(0)} = -\infty$  y  $X_{(n+1)} = \infty$ , puede ser escrito

$$S_n(x) = \frac{i}{n} \text{ para } X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned} D_n^+ &= \sup_x [S_n(x) - F_X(x)] \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} \sup_{X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}} [S_n(x) - F_X(x)] \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} \sup_{X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}} \left[ \frac{i}{n} - F_X(x) \right] \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} \left[ \frac{i}{n} - \inf_{X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}} F_X(x) \right] \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} \left[ \frac{i}{n} - F_X(X_{(i)}) \right] \\ &= \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left[ \frac{i}{n} - F_X(X_{(i)}) \right], 0 \right\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Similantemente

$$\begin{aligned} D_n^- &= \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left[ F_X(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right], 0 \right\} \\ D_n &= \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left[ \frac{i}{n} - F_X(X_{(i)}) \right], \max_{1 \leq i \leq n} \left[ F_X(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right], 0 \right\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

La distribución de probabilidad de  $D_n$ ,  $D_n^+$  y  $D_n^-$  se ve que depende sólo de las variables aleatorias  $F_X(X_{(i)})$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Éstos son los estadísticos de orden de las distribuciones

uniformes (0,1), sin importar la  $F_X$  original, por la transformación de probabilidad integral. Así  $D_n$ ,  $D_n^+$  y  $D_n^-$  tiene distribuciones que son independientes de la  $F_X$  particular. ■<sup>14</sup>

**Teorema 2.2**

Para  $D_n = \sup_x |S_n(x) - F_X(x)|$  donde  $F_X(x)$  es alguna función acumulativa continua (cdf), tenemos

$$P\left(D_n < \frac{1}{2n} + v\right) = \begin{cases} 0 & \text{para } v \leq 0 \\ \int_{\frac{1}{2n}-v}^{\frac{1}{2n}+v} \int_{\frac{3}{2n}-v}^{\frac{3}{2n}+v} \dots \int_{\frac{2n-1}{2n}-v}^{\frac{2n-1}{2n}+v} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 \dots du_n & \text{para } 0 < v < \frac{2n-1}{2n} \\ 1 & \text{para } v \geq \frac{2n-1}{2n} \end{cases}$$

donde  $f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{cases} n! & \text{para } u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

**Prueba**

Como está explicado anteriormente,  $F_X(x)$  puede ser asumido como la distribución uniforme en (0,1). Primero determinaremos el dominio pertinente de  $v$ . Puesto que  $S_n(x)$  y  $F_X(x)$  están entre 0 y 1,  $0 \leq D_n \leq 1$  siempre. Por eso debemos determinar  $P(D_n < c)$  solo para  $0 < c < 1$ , que aquí requiere  $0 < \frac{1}{2n} + v < 1$  ó  $-\frac{1}{2n} < v < \frac{2n-1}{2n}$ .

Ahora, para todo  $-\frac{1}{2n} < v < \frac{2n-1}{2n}$ , donde  $X_{(0)} = 0$  y  $X_{(n+1)} = 1$ ,

$$\begin{aligned} P\left(D_n < \frac{1}{2n} + v\right) &= P\left[\sup_x |S_n(x) - x| < \frac{1}{2n} + v\right] \\ &= P\left[|S_n(x) - x| < \frac{1}{2n} + v \text{ para todo } x\right] \\ &= P\left[\left|\frac{i}{n} - x\right| < \frac{1}{2n} + v \text{ para } X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n\right] \\ &= P\left[\frac{i}{n} - \frac{1}{2n} - v < x < \frac{2i+1}{2n} + v \text{ para } X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n\right] \\ &= P\left[\frac{2i-1}{2n} - v < x < \frac{2i+1}{2n} + v \text{ para } X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n\right] \end{aligned}$$

<sup>14</sup> ■ simbololiza que termina demostración

Considerando algunos valores consecutivos de  $i$ . Debemos tener, para algún  $0 \leq i \leq n-1$ , ambos

$$A_i : \left\{ \frac{2i-1}{2n} - v < x < \frac{2i+1}{2n} + v \text{ para } X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \right\}$$

y

$$A_{i+1} : \left\{ \frac{2i+1}{2n} - v < x < \frac{2i+3}{2n} + v \text{ para } X_{(i+1)} \leq x < X_{(i+2)} \right\}$$

Donde  $X_{(i+1)}$  es la variable aleatoria común en ambos eventos y el conjunto común de los  $x$  es

$$\frac{2i-1}{2n} - v < x < \frac{2i+1}{2n} + v \text{ para } v \geq 0, \text{ entonces el evento } A_i \cap A_{i+1} \text{ para algún } 0 \leq i \leq n-1 \text{ es}$$

$$\frac{2i+1}{2n} - v < x < \frac{2i+3}{2n} + v \text{ para } v \geq 0$$

En otras palabras,

$$\frac{2i-1}{2n} - v < x < \frac{2i+1}{2n} + v \text{ para } X_{(i)} \leq x \leq X_{(i+1)} \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n$$

Si y solo si

$$\frac{2i+1}{2n} - v < X_{(i+1)} < \frac{2i+1}{2n} + v \text{ para todo } i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad v \geq 0$$

La probabilidad de distribución conjunta de los estadísticos de orden es

$$f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \text{ para } 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$$

Juntando todo lo anterior, tenemos

$$\begin{aligned} & P\left(D_n < \frac{1}{2n} + v\right) \text{ para todo } -\frac{1}{2n} < v < \frac{2n+1}{2n} = \\ & = P\left(\frac{2i+1}{2n} - v < X_{(i+1)} < \frac{2i+1}{2n} + v \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n-1\right) \text{ para todo } 0 \leq v < \frac{2n-1}{2n} \\ & = P\left[\left(\frac{1}{2n} - v < X_{(1)} < \frac{1}{2n} + v\right) \cap \left(\frac{3}{2n} - v < X_{(2)} < \frac{3}{2n} + v\right) \cap \dots \cap \left(\frac{2n-1}{2n} - v < X_{(n)} < \frac{2n-1}{2n} + v\right)\right] \\ & \text{para todo } 0 \leq v < \frac{2n-1}{2n} \end{aligned}$$

Es equivalente a la integral indicada. ■

Por ilustración, consideremos  $n = 2$ . Para todo  $0 \leq v < \frac{3}{4}$ ,

$$P\left(D_2 < \frac{1}{4} + v\right) = 2! \int_{\frac{1}{4}-v}^{\frac{1}{4}+v} \int_{\frac{3}{4}-v}^{\frac{3}{4}+v} du_2 du_1$$

Los límites supuestos cuando  $\frac{1}{4} + v \geq \frac{3}{4} - v$ , ó  $v \geq \frac{1}{4}$ . Cuando  $0 \leq v < \frac{1}{4}$ , tenemos  $u_1 < u_2$  automáticamente. Por lo tanto, para  $0 \leq v < \frac{1}{4}$ ,

$$P\left(D_2 < \frac{1}{4} + v\right) = 2 \int_{\frac{1}{4}-v}^{\frac{1}{4}+v} \int_{\frac{3}{4}-v}^{\frac{3}{4}+v} du_2 du_1 = 2(2v)^2$$

Mientras que en el intervalo  $\frac{1}{4} \leq v < \frac{3}{4}$ , la región de integración que esta ilustrada más adelante en la figura 2.2. Dividiendo la integral en dos piezas, tenemos para  $\frac{1}{4} \leq v < \frac{3}{4}$

$$P\left(D_2 < \frac{1}{4} + v\right) = 2 \left[ \int_{\frac{3}{4}-v}^{\frac{1}{4}+v} \int_{u_1}^1 du_2 du_1 + \int_0^{\frac{3}{4}-v} \int_{\frac{3}{4}-v}^1 du_2 du_1 \right] = -2v^2 + 3v - \frac{1}{8}$$

Colectivamente los resultados para todo  $v$ .

$$P\left(D_2 < \frac{1}{4} + v\right) = \begin{cases} 0 & \text{para } v \leq 0 \\ 2(2v)^2 & \text{para } 0 \leq v < \frac{1}{4} \\ -2v^2 + 3v - \frac{1}{8} & \text{para } \frac{1}{4} \leq v < \frac{3}{4} \\ 1 & \text{para } v \geq \frac{3}{4} \end{cases} \quad (2.5)$$

Para cualquier  $v$  y  $n$ , podemos evaluar  $P\left(D_n < \frac{1}{2n} + v\right)$ . El procedimiento inverso es encontrar ese número  $D_{n,\alpha}$  tal que  $P(D_n > D_{n,\alpha}) = \alpha$ . En nuestro ejemplo numérico con  $n=2$  y  $\alpha = 0.05$ , encontramos  $v$  tal que  $P\left(D_2 > \frac{1}{4} + v\right) = 0.05$  ó  $P\left(D_2 < \frac{1}{4} + v\right) = 0.95$

Y luego el conjunto  $D_{2,0.05} = \frac{1}{4} + v$ . De la ecuación (2.5) la distribución muestral de  $D_2$ , se tiene

$$2(2v)^2 = 0.95 \quad \text{y} \quad 0 \leq v < \frac{1}{4}$$

ó

$$-2v^2 + 3v - 0.125 = 0.95 \quad \text{y} \quad \frac{1}{4} \leq v < \frac{3}{4}$$

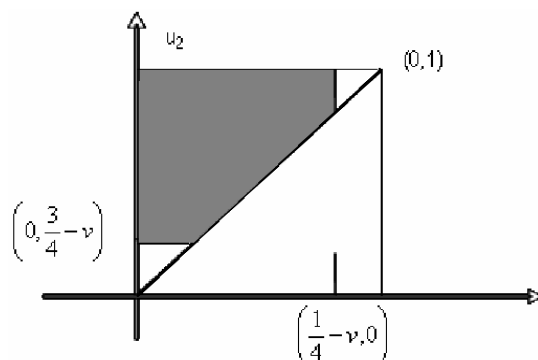


Figura 2.2 Región de integración.

El primer resultado no tiene solución, pero el segundo tiene raíz doble  $v = 0.5919$ . Por consiguiente  $D_{2,0.05} = 0.8419$ .

Para muestras grandes, Kolmogorov(1933) derivó de la siguiente aproximación para la distribución de muestreo de  $D_n$ , y Smirnov (1939) dio una prueba más simple. El resultado está dado en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3**

Para  $D_n^+ = \sup_x [S(x) - F(x)]$  donde  $F_X(x)$  es la distribución acumulada continua de una variable aleatoria  $x$ , tenemos

$$P(D_n^+ < c) = \begin{cases} 0 & \text{para } c \leq 0 \\ \int_{1-c}^1 \int_{\frac{n-1}{n-c}}^{u_n} \dots \int_{\frac{2}{n-c}}^{u_3} \int_{\frac{1}{n-c}}^{u_2} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 \dots du_n & \text{para } 0 < c < 1 \\ 1 & \text{para } c \geq 1 \end{cases}$$

$$P(D_n^+ < c) = \begin{cases} 0 & \text{para } c \leq 0 \\ \int_{1-c}^1 \int_{\frac{n-1}{n-c}}^{u_n} \dots \int_{\frac{2}{n-c}}^{u_3} \int_{\frac{1}{n-c}}^{u_2} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 \dots du_n & \text{para } 0 < c < 1 \\ 1 & \text{para } c \geq 1 \end{cases}$$

donde

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{cases} n! & \text{para } 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Prueba

Como antes, primero asumimos sin pérdida de generalidad que  $F_X$  tiene distribución uniforme en  $(0,1)$ . Entonces puede ser escrita como

$$D_n^+ = \max \left[ \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{i}{n} - X_{(i)} \right), 0 \right]$$

Para todo  $0 < c < 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} P(D_n^+ < c) &= P \left[ \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{i}{n} - X_{(i)} \right) < c \right] \\ &= P \left[ \left( \frac{i}{n} - X_{(i)} \right) < c \text{ para todo } i=1,2,\dots,n \right] \\ &= P \left[ -X_{(i)} < c - \frac{i}{n} \text{ para todo } i=1,2,\dots,n \right] \\ &= P \left[ X_{(i)} > \frac{i}{n} - c \text{ para todo } i=1,2,\dots,n \right] \\ &= \int_{1-c}^{\infty} \int_{\frac{n-1}{n-c}}^{\infty} \dots \int_{\frac{2}{n-c}}^{\infty} \int_{\frac{1}{n-c}}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

donde

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \begin{cases} n! & \text{para } 0 < x_1 < \dots < x_n < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Es equivalente a la integral indicada. ■

Teorema 2.4

Si  $F_X$  es alguna función de distribución continua, entonces para todo  $d \geq 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( D_n^+ < \frac{d}{\sqrt{n}} \right) = L(d) \text{ donde } L(d) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2d^2}$$

La función  $L(d)$  fue tabulada en Smirnov<sup>15</sup> (1948). Como resultado de este teorema, puede ser usada la tabla de ji-cuadrada para la distribución de una función de  $D_n^+$ .

*Regla de decisión*

Rechazaremos  $H_0$  con un nivel de significancia  $\alpha$ , si el estadístico de prueba apropiado  $D_n$ ,  $D_n^+$  y  $D_n^-$  excede el cuantil  $\alpha$ , que esta dado en la tabla C.

---

<sup>15</sup> Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition. Pag 110.

## Capítulo II

Los valores numéricos de  $D_{n,\alpha}$  están dados en la tabla C para  $n \leq 40$  y la selección de la cola de probabilidades  $\alpha$ , y valores aproximados están dados para valores grandes de  $n$ .

### Ejemplo 2.2

Las 20 observaciones están seleccionadas al azar de una distribución uniforme continua sobre  $(0,1)$ , registrado para cuatro cifras significativas, y acomodado en orden de magnitud creciente. Determine el valor de  $D_n$  y probar la hipótesis nula que las raíces cuadradas de estos números también tienen la distribución uniforme continua usando  $\alpha = 0.01$ .

0.0123, 0.1039, 0.1954, 0.2621, 0.2802, 0.3217, 0.3645, 0.3919, 0.4240, 0.4814, 0.5139, 0.5836, 0.6275, 0.6541, 0.6889, 0.7621, 0.8320, 0.8871, 0.9249, 0.9634.

Solución:

Los cálculos necesarios para encontrar  $D_n$  se muestran en la tabla 2.3.

Tabla 2.3 Procedimiento para encontrar  $D_n$ .

$x$	$S_n(x)$	$F_0(x)$	$ S_n(x) - F_x(x) $	$x$	$S_n(x)$	$F_0(x)$	$ S_n(x) - F_x(x) $
0.11	0.05	0.11	0.06	0.72	0.55	0.72	0.17
0.32	0.10	0.32	0.22	0.76	0.60	0.76	0.16
0.44	0.15	0.44	0.29	0.79	0.65	0.79	0.14
0.51	0.20	0.51	0.31	0.81	0.70	0.81	0.11
0.53	0.25	0.53	0.28	0.83	0.75	0.83	0.08
0.57	0.30	0.57	0.27	0.87	0.80	0.87	0.07
0.60	0.35	0.60	0.25	0.91	0.85	0.91	0.06
0.63	0.40	0.63	0.23	0.94	0.90	0.94	0.04
0.65	0.45	0.65	0.20	0.96	0.95	0.96	0.01
0.39	0.50	0.39	0.19	0.98	1.00	0.98	0.02

La entrada en la primera columna, etiquetada con  $x$ , no son las observaciones planteadas al principio, sino que son sus respectivas raíces, porque la hipótesis nula es equivalente a la distribución de las raíces cuadradas. Los  $S_n(x)$  son la proporción de valores observados menores o iguales para cada diferente valor observado  $x$ . La hipótesis de distribución es  $F_0(x) = x$ , la tercera columna es exactamente igual a la primera columna. La cuarta columna es la diferencia  $|S_n(x) - F_x(x)|$ . El supremo es la entrada más grande en cualquier de las últimas dos columnas; su valor es  $D_n = 0.36$ . Se muestra en la tabla C que para  $\alpha = 0.01$ ,  $n = 20$  y

$D_n \geq 0.352$ , rechazaremos la hipótesis nula de que los números están uniformemente distribuidos.

La justificación teórica de este ejemplo es como sigue. Dado  $Y$  que tiene distribución uniforme continua en  $(0,1)$  tal que  $f_y(y)=1$  para  $0 \leq y \leq 1$ . Entonces la distribución de  $X = \sqrt{Y}$  es  $f_x(x) = 2x$  para  $0 \leq x \leq 1$ , por lo que no es uniforme.

### 2.2.2.2 Para dos muestras.

El estadístico de Kolmogorov-Smirnov para una muestra puede ser adaptada para el problema de dos muestras. La prueba para una muestra compara la función de distribución empírica de una muestra aleatoria con una distribución acumulativa hipotética. En el caso de dos muestras, la comparación es hecha entre la función de distribución empírica de las dos muestras.

Para dos muestras aleatorias de tamaño  $m$  y  $n$  poblaciones continuas  $F_X$  y  $F_Y$  sus estadísticos de orden son  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(m)}$  y  $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$

Sus respectivas funciones de distribución, denotadas por  $S_m(x)$  y  $S_n(x)$ , son definidas como sigue:

$$S_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{(1)} \\ \frac{k}{m} & \text{si } X_{(k)} \leq x < X_{(k+1)} \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(m)} \end{cases} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, m-1$$

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < Y_{(1)} \\ \frac{k}{n} & \text{si } Y_{(k)} \leq x < Y_{(k+1)} \\ 1 & \text{si } x \geq Y_{(n)} \end{cases} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n-1$$

En una combinación de arreglos ordenados de las  $m+n$  variables aleatorias,  $S_m(x)$  y  $S_n(x)$  son las proporciones respectivas de las muestras  $X$  y  $Y$  que son menores o iguales a  $X$  y que estiman a  $F_X(x)$  y  $F_Y(y)$ .

### Hipótesis de prueba

Asumimos dos muestras aleatorias de tamaño  $m$  y  $n$  de poblaciones continuas con funciones de distribución  $F_X$  y  $F_Y$ . Sus estadísticos de orden son  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(m)}$  y  $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ .

A. Prueba de dos lados.

$$H_0 : F_X(x) = F_Y(x) \text{ para todo } x$$

$$H_1 : F_X(x) \neq F_Y(x) \text{ para algún } x$$

B. Prueba de un lado. ( $F_X(x) > F_Y(x)$ )

$$H_0 : F_X(x) \leq F_Y(x) \text{ para todo } x$$

$$H_1 : F_X(x) > F_Y(x) \text{ para algún } x$$

C. Prueba de un lado. ( $F_X(x) < F_Y(x)$ )

$$H_0 : F_X(x) \geq F_Y(x) \text{ para todo } x$$

$$H_1 : F_X(x) < F_Y(x) \text{ para algún } x$$

**Estadístico de prueba**

El estadístico de dos colas para la prueba de dos muestras de Kolmogorov-Smirnov, denotado por  $D_{m,n}$ , es el supremo de las diferencias absolutas entre las dos distribuciones empíricas

$$D_{m,n} = \sup_x |S_m(x) - S_n(x)|$$

La región de rechazo apropiada para la alternativa bilateral de diferentes poblaciones  $D_{m,n}$  son mayores. La distribución nula acumulada exacta de  $mnD_{m,n}$  está dado en tabla D para  $2 \leq m \leq n \leq 12$  ó  $m+n \leq 16$ . En la tabla también se dan los valores de los cuantiles  $m=n$  entre 9 y 20, junto con la aproximación de muestra grande.

Los elementos de entrada de la tabla D pueden ser usados para el estadístico unilateral de Kolmogorov-Smirnov de dos muestras utilizando una de las colas de la prueba bilateral.

Para calcular  $P(D_{m,n} \geq d)$ , donde  $d$  es el valor observado de  $\sup_x |S_m(x) - S_n(x)|$ , primero

arreglamos la muestra combinada de  $m+n$  observaciones en orden creciente de magnitud. El arreglo puede ser bosquejado gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas por un trayecto que comienza en el origen y moviendo un paso a la derecha para una observación  $x$  y un paso arriba para una observación  $y$ , finalizando con  $(m,n)$ . Por ejemplo, los arreglos de la muestra  $x \ y \ y \ x \ x \ y \ y$  es representado en la Figura 2.3. Los valores observados de  $mS_m(x)$  y  $nS_n(x)$  son, respectivamente, las coordenadas para todos los puntos  $(u,v)$  en el trayecto donde  $u$  y  $v$  son enteros. El número  $d$ , el mayor de las diferencias

$\left| \frac{u}{m} - \frac{v}{n} \right| = \frac{|nu - mv|}{mn}$ . Si una línea es dibujada conectando los puntos  $(0,0)$  y  $(m,n)$  en este

gráfico, la ecuación de la línea es  $nx - my = 0$  y la distancia vertical de algún punto  $(u, v)$  en el trayecto de esta línea es  $\left|v - \frac{nu}{m}\right|$ . Por lo tanto,  $nd$  para la muestra observada es la distancia de la diagonal para el punto en el trayecto que esta más lejos de la línea diagonal. En la Figura 2.3 el punto más lejos es denotado por  $Q$ , y el valor de  $d$  es  $2/4$ .

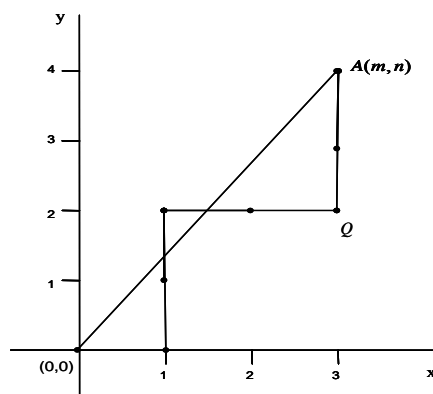


Figura 2.3 Los valores observados de  $mS_m(x)$  y  $nS_n(x)$

El número total de arreglos de  $mX$  y  $nY$  variables aleatorias es  $\binom{m+n}{m}$ , y bajo  $H_0$  cada uno de los correspondientes trayectos es igual de probable. La probabilidad de un valor observado de  $D_{m,n}$  es no menos que  $d$  además es el número de trayectos que tiene puntos para una distancia de la diagonal no menos que  $nd$ , dividido por  $\binom{m+n}{n}$ .

La prueba unilateral derecha ( $F_X(x) > F_Y(x)$ ) de dos muestras puede ser definida, basada en el estadístico

$$D_{m,n}^+ = \sup_x [S_m(x) - S_n(x)]$$

Y por último la prueba unilateral izquierda ( $F_X(x) < F_Y(x)$ ) de dos muestras puede ser definida, basada en el estadístico

$$D_{m,n}^- = \sup_x [S_n(x) - S_m(x)]$$

**Regla de decisión**

Se rechaza  $H_0$  si el estadístico de prueba según corresponda  $D_{m,n}$ ,  $D_{m,n}^+$  y  $D_{m,n}^-$  excede el cuantil  $C_\alpha$ .

Ejemplo 2.3

Mostraremos que la distribución estandarizada de una variable ji-cuadrado con grados de libertad grandes puede ser aproximada por una distribución normal estándar. Este ejemplo provee una investigación del arreglo entre estas dos distribuciones para moderados grados de libertad. Dos muestras aleatorias mutuamente independientes, cada una de ellas de tamaño ocho, fueron generadas, una de distribución normal estándar y la otra de distribución ji-cuadrado con  $\nu = 18$  grados de libertad. Los datos resultantes son los siguientes:

Normal	-1.91	-1.22	-0.96	-0.72	0.14	0.82	1.45	1.86
Chi-cuadrado	4.90	7.25	8.04	14.10	18.30	21.21	23.10	28.12

Solución:

Antes de probar la hipótesis nula de que las distribuciones son iguales ( $H_0 : F_Y(x) = F_X(x)$ ), los datos de la muestra de ji-cuadrado deben ser estandarizados sustrayendo la media  $\nu = 18$  y dividiendo por la desviación estándar  $\sqrt{2\nu} = \sqrt{36}$ . Los datos transformados son respectivamente

$$-2.18, -1.79, -1.66, -0.65, 0.05, 0.54, 0.85, 1.69$$

Combinamos los datos normales y estos datos transformados dentro de un arreglo singular, los datos subrayados son los transformados de ji-cuadrado,

$$\underline{-2.18}, -1.91, \underline{-1.79}, \underline{-1.66}, -1.22, -0.96, -0.72, \underline{-0.65}, \underline{0.05}, 0.14, \underline{0.54}, 0.82, \underline{0.85}, 1.45, \underline{1.69}, 1.86$$

Las funciones empíricas se definen de la siguiente forma:

$$S_{16}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{(1)} \\ \frac{k}{16} & \text{si } X_{(k)} \leq x < X_{(k+1)} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 15 \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(m)} \end{cases}$$

$$S_{16}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < Y_{(1)} \\ \frac{k}{16} & \text{si } Y_{(k)} \leq x < Y_{(k+1)} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 15 \\ 1 & \text{si } x \geq Y_{(n)} \end{cases}$$

Tabla 2.4 Cálculo de función empírica y sus diferencias

$x$	$S_m(x)$	$S_n(x)$	$D$	$x$	$S_m(x)$	$S_n(x)$	$D$
-2.18	1/8	0	1/8	0.05	5/8	4/8	1/8
-1.91	1/8	1/8	0	0.14	5/8	5/8	0
-1.79	2/8	1/8	1/8	0.54	6/8	5/8	1/8
-1.66	3/8	1/8	2/8	0.82	6/8	6/8	0
-1.22	3/8	2/8	1/8	0.85	7/8	6/8	1/8
-0.96	3/8	3/8	0	1.45	7/8	7/8	0
-0.72	3/8	4/8	1/8	1.69	8/8	7/8	1/8
-0.65	4/8	4/8	0	1.86	8/8	8/8	0

Calcularemos su función de distribución empírica y sus diferencias así como se muestra en la tabla 2.4. El máximo es  $D_{m,n} = 1/8$  ó  $mnD_{m,n} = 16$ . La tabla D para  $m = n = 8$  muestra que el  $P$  valor es  $P > 0.283$ , así que no se rechaza la hipótesis nula de distribuciones idénticas.

### 2.2.3 Prueba de Smirnov para $k$ muestras

Los datos consisten de  $k$  muestras aleatorias de igual tamaño  $n$ . Sus funciones de distribución empíricas respectivas son denotados por  $S_1(x), S_2(x), \dots, S_k(x)$ , desconocemos las funciones de distribución, denotadas por  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$  de las que fueron elegidas las  $k$  muestras.

Para esta prueba suponemos que:

1. Son muestras aleatorias, mutuamente independientes entre si.
2. La escala de medida es por lo menos ordinal.
3. Para que las pruebas sean exactas las variables aleatorias necesitan ser continuas. De lo contrario la prueba es probablemente conservadora

#### 2.2.3.1 Pruebas de Smirnov para una cola

##### Hipótesis de prueba

Las hipótesis para una cola de la prueba de Smirnov son las siguientes:

$$H_0 : F_1(x) \leq F_2(x) \leq \dots \leq F_k(x) \text{ para todo } x$$

$$H_1 : F_i(x) > F_j(x) \text{ para algún } i < j, \text{ y para algún } x$$

Estas hipótesis son usadas cuando la hipótesis alternativa es que la  $i$  –ésima muestra tiende a tener valores pequeños que la  $j$  –ésima muestra, para algún  $i$  menor que  $j$ . La hipótesis nula es usualmente interpretada como, “Todas las muestras provienen de poblaciones idénticas,”

porque esta prueba unilateral es usualmente apropiada si, por alguna razón física, las diferencias entre poblaciones sólo ocurren en la dirección indicada por  $H_1$ .

### *Estadístico de prueba*

El estadístico de prueba  $T_1$  es igual al supremo, para todo  $x$ , y para todo  $i$  menor que  $k$  (el número de muestras) de las diferencias  $S_i(x)$  menos  $S_{i+1}(x)$ , donde las pruebas adyacentes están siendo comparadas con  $i$  rangos para 1 a  $k-1$ . Esto puede ser denotado matemáticamente como

$$T_1 = \sup_{x, i < k} [S_i(x) - S_{i+1}(x)] \quad (2.6)$$

Para evaluar, se define primero para las muestras 1 y 2, luego para la muestra 2 y 3, y así sucesivamente para más muestras  $k-1$  y  $k$ , y  $T_1$  igual al más grande de estos.

### *Regla de decisión*

Se rechaza  $H_0$  con un nivel  $\alpha$  si  $T_1$  excede el cuantil  $(1-\alpha)$  que es dado en la tabla E. En la Tabla E es introducida un  $k$ , el número de muestras y  $n$ , el tamaño de cada uno de las  $k$  muestras. La entrada en la columna debajo  $p = 1-\alpha$  es dividido por  $n$  para dar el cuantil  $1-\alpha$ . La aproximación basada en la distribución asintótica, dado al pie de cada columna, requiere ser dividido por  $\sqrt{n}$ .

### **Ejemplo 2.4**

Cuando el ojo humano se envejece pierde su habilidad de enfocar objetos cerca. Ésta es una característica reconocida en personas con más de 40 años de edad. Para ver si las personas entre los 15 y 30 años de edad, pierden la habilidad de focalizar objetos, se seleccionaron ocho personas de cada uno de cuatro grupos de edades; cerca de 15, cerca de 20, cerca de 25, y aproximadamente de 30 años de edad. Fue asumido que estas personas se comportarían como una muestra aleatoria de su grupo de edad. Cada persona mantuvo un escrito impreso delante de su ojo derecho, con el ojo izquierdo cubierto. El escrito fue movido acercándose al ojo derecho hasta que la persona declarara que la impresión comenzaba a verse borrosa. La distancia más cercana que la persona enfocara mejor fue medida.

### **Solución:**

La hipótesis nula es que la distancia medida fue idénticamente distribuida para todas las poblaciones. La hipótesis alternativa fue que los grupos mayores tendieron a proveer medidas con distancias mayores. Las pruebas fueron numeradas de 1 a 4 en orden ascendente.

## Capítulo II

$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = F_3(x) = F_4(x)$  para todo  $x$

$H_1 : F_i(x) > F_j(x)$  para todo  $x$  y algún  $i < j$ .

Asumimos que la habilidad de focalizar objetos cercanos no se mejora con la edad, y por consiguiente podemos declarar la hipótesis nula ya citada anteriormente. Las distancias, medidas en pulgadas, son dadas en la siguiente tabla. Las pruebas son ordenadas por conveniencia.

(1) 15 años de edad		(2) 20 años de edad		(3) 25 años de edad		(4) 30 años de edad	
4.6	6.3	4.7	6.4	5.6	6.8	6.0	8.6
4.9	6.8	5.0	6.6	5.9	7.4	6.8	8.9
5.0	7.4	5.1	7.1	6.6	8.3	8.1	9.8
5.7	7.9	5.8	8.3	6.7	9.6	8.4	11.5

La diferencia entre los valores más grandes de  $S_i(x)$  y  $S_{i+1}(x)$  ocurre en los puntos de aumento de  $S_i(x)$ , que son los valores de la  $i$ -ésima muestra aleatoria. Entonces la diferencia  $S_i(x) - S_{i+1}(x)$  necesita que se calculen solamente para los  $n = 8$  números en la  $i$ -ésima muestra.

$S_1(x) - S_2(x)$	$S_2(x) - S_3(x)$	$S_3(x) - S_4(x)$
$\frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$
$\frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$	$\frac{2}{8} - 0 = \frac{2}{8}$	$\frac{2}{8} - 0 = \frac{2}{8}$
$\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{8} - 0 = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$
$\frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$	$\frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$	$\frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
$\frac{5}{8} - \frac{4}{8} = \frac{1}{8}$	$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$	$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$
$\frac{6}{8} - \frac{6}{8} = 0$	$\frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$	$\frac{6}{8} - \frac{2}{8} = \frac{4}{8}$
$\frac{7}{8} - \frac{7}{8} = 0$	$\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8}$	$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$
$\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$	$\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$	$\frac{8}{8} - \frac{6}{8} = \frac{2}{8}$
$\sup_x [S_1(x) - S_2(x)] = \frac{1}{8}$	$\sup_x [S_2(x) - S_3(x)] = \frac{3}{8}$	$\sup_x [S_3(x) - S_4(x)] = \frac{4}{8}$

El estadístico de prueba  $T_1$  es igual a  $4/8$ , es la más grande de las diferencias dadas al pie de las columnas de la tabla anterior. La región crítica corresponde a los valores de  $T_1$  más grandes

que  $w_{0.95}$ , con  $\alpha = 0.05$ , donde  $w_{0.95}$ , para  $k = 4$  muestras y  $n = 8$  observaciones por muestras, está dado en la tabla E como  $w_{0.95} = \frac{5}{n} = \frac{5}{8}$

Como  $T_1$  no se excede a  $5/8$ , la hipótesis nula es aceptada. El p-valor puede verse en la Tabla E que es mayor que 0.10.

La distribución exacta de una cola de  $k$  - muestras de la prueba estadística de Smirnov puede ser obtenida considerando cada arreglo ordenado combinando  $k$  muestras para ser igualmente probable, evaluando la prueba estadística, y luego tabulando la función de distribución del estadístico de prueba. La función de distribución de  $T_1$  está construido en Conover (1967b) es una función matemática de  $k$  y  $n$ .

### 2.2.3.2 Prueba de Smirnov para dos colas

#### *Hipótesis de prueba*

Las hipótesis para dos colas de la prueba de Smirnov son las siguientes:

$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_k(x)$  para todo  $x$  (Las funciones de distribución poblacionales son idénticas)

$H_1 : F_i(x) \neq F_j(x)$  para algún  $i, j$  y  $x$  (Las funciones de distribución poblacionales no son idénticas).

#### *Estadístico de prueba*

El estadístico de prueba es evaluado comparando la muestra “más grande” con la muestra “más pequeña”. Esto es, encuentra la observación más grande en cada muestra y denota estos por  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ . La muestra con el  $Z_i$  más grande es llamada “La muestra de rangos  $k$ ”, y su función de distribución empírica es denotada por  $S^{(k)}(x)$ . La muestra con el  $Z_i$  más pequeño es llamada “muestras de rango 1”, y la función de distribución empírica es denotada por  $S^{(1)}(x)$ . El estadístico de prueba  $T_2$  es el supremo en  $x$  de las diferencias  $S^{(1)}(x)$  menos  $S^{(k)}(x)$ . Matemáticamente esto puede ser escrito como

$$T_2 = \sup_x [S^{(1)}(x) - S^{(k)}(x)] \quad (2.7)$$

#### *Regla de decisión*

Se rechaza  $H_0$  con nivel  $\alpha$  si  $T_2$  excede el cuantil  $1 - \alpha$  dados por la tabla F, en la fila correspondiente al tamaño de muestra correcto  $n$ , y la columna correspondiente a  $p = 1 - \alpha$ . Luego seleccione en la tabla el número correcto de muestras  $k$ . Esta tabla está dividida por  $n$

para obtener el cuantil deseado. El cuantil aproximado para la distribución asintótica requiere solo la división por  $\sqrt{n}$ , y no depende de  $k$ .

**Ejemplo 2.5**

En los siguientes datos se han tomado una docena de voluntarios y fueron asignados a cada uno de los tres planes para adelgazar. La hipótesis nula es que no hay diferencia entre planes para adelgazar, y la alternativa existe alguna diferencia. Los datos fueron los siguientes.

Plan A		Plan B		Plan C	
2	17	17	5	29	5
12	4	15	6	3	25
5	25	3	19	25	32
4	6	<u>19</u>	4	28	24
<u>26</u>	21	5	9	11	<u>36</u>
8	6	14	7	7	20

Las observaciones más grandes para cada muestra están subrayadas.

$$Z_1 = 26$$

$$Z_2 = 19$$

$$Z_3 = 36$$

El valor más grande para  $Z_i$  es 36, para Plan C es llamado la muestra de rango 3. El valor más pequeño para  $Z_i$  es 19, para el Plan B es llamado la muestra de rango 1. El estadístico de prueba es calculado para aquellas dos muestras. Las diferencias  $S^{(1)}(x) - S^{(k)}(x)$  necesitan ser calculadas solamente como los números listados en la muestra de rango 1. La muestra será ordenada como sigue:

Plan B	Plan C	$S^{(1)}(x) - S^{(k)}(x)$	Plan B	Plan C	$S^{(1)}(x) - S^{(k)}(x)$
3	3	$\frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$	9	25	$\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4}{12}$
4	5	$\frac{2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$	14	25	$\frac{8}{12} - \frac{4}{12} = \frac{4}{12}$
5	7		15	28	$\frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$
5	11	$\frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{2}{12}$	17	29	$\frac{10}{12} - \frac{4}{12} = \frac{6}{12}$
6	20	$\frac{5}{12} - \frac{2}{12} = \frac{3}{12}$	19	32	
7	24	$\frac{6}{12} - \frac{3}{12} = \frac{3}{12}$	19	36	$\frac{12}{12} - \frac{4}{12} = \frac{8}{12}$

El estadístico de prueba  $T_2$ , definido por la ecuación (2.7) es

$$T_2 = \sup_x [S^{(1)}(x) - S^{(k)}(x)]$$

Es igual a  $8/12$  para estos datos. La región crítica de tamaño  $\alpha = 0.05$  corresponde a valores de  $T_2$  mayores que  $w_{0.95}$ , que son dados por la tabla F para  $n = 12$  y  $k = 3$  como

$$w_{0.95} = \frac{6}{n} = \frac{6}{12}$$

Puesto que  $T_2$  excede  $6/12$ , la hipótesis nula es rechazada. De hecho la hipótesis nula puede ser rechazada a un nivel de significancia tan pequeño como 0.01, puesto que el p-valor está cerca de 0.01.

### 2.3 Pruebas de asociación

Cuando se tiene una muestra de datos bivariados, surge la necesidad de conocer si las variables estarán o no relacionadas y qué tan fuerte serán. Para saber esto, generalmente se piensa en obtener un coeficiente de correlación que nos indique el grado de relación lineal entre las variables, pero debe tenerse cuidado de no interpretarlo como una medida de la relación causal entre las variables y también tomar en cuenta que si la relación no es lineal, la correlación no detecta la relación existente entre las variables.

#### 2.3.1 Prueba de independencia. Ji-cuadrado.

Una tabla de doble entrada es una matriz, en donde los datos de cada casilla representan el total de elementos que hay entre dos categorías de variables ambas cualitativas o ambas cuantitativas o una cuantitativa y una cualitativa.

Por ejemplo, un entomologista observó 37 insectos, de diferentes tipos, los cuales pueden ser ordenados usando una tabla de contingencia de  $2 \times 3$ , como la siguiente:

Estado \ Tipo	Polillas	Saltamontes	Otros	Total
Vivo	3	21	3	27
Muerto	9	1	0	10
Total	12	22	3	37

Como vimos en el ejemplo anterior es relativamente frecuente encontrarse con información referida a la observación de dos características de una población, en las que se establecen modalidades o categorías, mediante las cuales se clasifican los individuos o elementos que constituyen una muestra de la misma. Este tipo de distribución bidimensional de frecuencias suele presentarse en forma de tabla de doble entrada, también llamada *Tabla de Contingencia*.

Estas tablas permiten analizar si existe asociación o dependencia entre las frecuencias observadas por fila y columna, y en definitiva, si las dos variables inmersas en la clasificación son independientes, aún sin conocer cuales son sus correspondientes funciones de probabilidad. Haremos referencia al estudio de tablas de contingencia con sólo dos criterios (variables) de clasificación, tal y como la reflejada en la siguiente tabla:

Tabla 2.5: Tablas de contingencia con sólo dos criterios de clasificación.

		Categorías de la características B						Total
		1	2	...	$j$	...	$s$	
Categorías de la característica A	1	$n_{11}$	$n_{12}$	...	$n_{1j}$	...	$n_{1s}$	$n_{1.}$
	2	$n_{21}$	$n_{22}$	...	$n_{2j}$	...	$n_{2s}$	$n_{2.}$
	...	...	...	...	...	...	...	...
	$i$	$n_{i1}$	$n_{i2}$	...	$n_{ij}$	...	$n_{is}$	$n_{i.}$
	...	...	...	...	...	...	...	...
	$r$	$n_{r1}$	$n_{r2}$	...	$n_{rj}$	...	$n_{rs}$	$n_{r.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.s}$	$n$	

El cuerpo central de la tabla define la distribución conjunta de frecuencias de las características A y B, mientras que la fila y columna de totales definen, respectivamente, sus correspondientes frecuencias marginales. También se sabe que:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s n_{ij} = \sum_{i=1}^r n_{i.} = \sum_{j=1}^s n_{.j} = n$$

**Hipótesis de prueba.**

Supongamos que  $p_{ij}$  es la probabilidad de que un sujeto extraído al azar de la población pertenezca a la categoría  $(i, j)$  de la tabla anterior. Sean  $p_{i.}$  y  $p_{.j}$  las probabilidades marginales de que se encuentre en la categoría  $i$ -ésima de A y en la categoría  $j$ -ésima de B, respectivamente. Siempre que ambas categorías sean independientes, la probabilidad conjunta ha de ser igual al producto de las marginales. Por tanto, si postulamos como hipótesis nula a contrastar la independencia entre las dos variables, podremos escribirla como sigue:

$$H_0 : p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s$$

En otras palabras las hipótesis a probar se escriben de la siguiente forma:

$H_0$  : Las categorías entre las características son independientes.

$H_1$  : Las categorías no son independientes.

**Estadístico de prueba**

Por otro lado, aplicando el criterio del contraste  $\chi^2$  de bondad del ajuste, discrepancia entre frecuencias observadas y frecuencias esperadas, para las  $rs$  casillas de la tabla 2.4, se puede escribir que:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \approx \chi_{(r-1)(s-1)}^2, \quad \text{con } e_{ij} = np_{ij}$$

Pero, si la hipótesis de independencia es cierta, se tiene que  $p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}$ , por lo que la expresión anterior, para  $n$  suficientemente grande, queda como sigue:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - np_{i.}p_{.j})^2}{np_{i.}p_{.j}} \approx \chi_{(r-1)(s-1)}^2, \quad \text{donde } p_{i.} \approx \frac{n_{i.}}{n} \text{ y } p_{.j} \approx \frac{n_{.j}}{n}$$

Para realizar el contraste anterior, es preciso conocer la función de probabilidad de las variables A y B. Sin embargo, esto no es lo más frecuente, por lo que se habrán de estimar a partir de las observaciones muestrales. Habrá que corregir los grados de libertad, restando el número de parámetros estimados. Dado que  $\sum_{i=1}^r P_{i.} = \sum_{j=1}^s P_{.j} = 1$ , habrá que estimar  $(r - 1)$  parámetros de la

característica A (dado que el parámetro  $r$ -ésimo se calcula de la siguiente forma  $P_{r.} = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} P_{i.}$ ) y  $(s - 1)$  de la característica B (dado que el parámetro  $s$ -ésimo se calcula de la siguiente forma  $P_{.s} = 1 - \sum_{i=1}^{s-1} P_{.i}$ ). Por consiguiente, cuando no se conocen las probabilidades teóricas y se

estiman con las frecuencias relativas de la muestra, habrá que restar  $(r - 1) + (s - 1)$  grados de libertad a los  $(rs - 1)$  anteriores, y los grados de libertad del estadístico ji-cuadrado serán:

$$\begin{aligned} (rs - 1) - [(r - 1) + (s - 1)] &= rs - 1 - r + 1 - s + 1 \\ &= rs - r - s + 1 \\ &= r(s - 1) - (s - 1) \\ &= (s - 1)(r - 1) \end{aligned}$$

Si el valor muestral del estadístico es muy grande, cabe pensar que hay mucha discrepancia entre las frecuencias de la distribución conjunta y las obtenidas a través del producto de las distribuciones marginales, por lo que no hay evidencia de que las variables sean independientes.

Por el contrario, para valores pequeños se concluye que no hay evidencia empírica suficiente para rechazar la hipótesis de independencia.

Algunas limitaciones que se deben tomar en cuenta para estas pruebas  $\chi^2$  antes de su aplicación son las siguientes:

- Si la variable esta compuesta por dos categorías, las  $e_{ij}$  para cada una de ellas deben ser 5 o más.
- Si la variable esta compuesta por más de dos categorías sólo será aplicable si más del 20% de los  $e_{ij}$  son 5 o más.

**Regla de decisión**

Se rechaza  $H_0$  si el valor observado del estadístico de prueba excediera a  $\chi^2_{\alpha, (r-1)(s-1)}$ .

**Ejemplo 2.6**

Un grupo de investigadores formuló a un grupo de 44 personas, la siguiente pregunta ¿El comportamiento de los adolescentes se debe a la educación que se les da en casa?. Recogieron opinión de 75 personas seleccionadas aleatoriamente y se obtuvieron los resultados que se presentan en la siguiente tabla de contingencia:

Opinión \ Sexo	De acuerdo	Desacuerdo	Indiferente	Total
Varones	15	24	5	44
Mujeres	7	22	2	31
Total	22	46	7	75

Los investigadores desean saber, con un nivel de significación  $\alpha = 0.05$ , si en esta situación particular el sexo y la opinión son independientes.

Las hipótesis a probar son:

$H_0$  : La opinión es independiente del sexo.

$H_1$  : La opinión no es independiente del sexo.

Cálculo de las frecuencias esperadas en cada celda:  $e_{ij} = n p_{ij}$

Después de efectuar el cómputo las frecuencias esperadas quedaran así:

Opinión \ Sexo	De acuerdo	Desacuerdo	Indiferente	Total
Varones	12.9	27.0	4.1	44
Mujeres	9.1	19.0	2.9	31
Total	22	46	7	75

Como se puede observar en los valores esperados de las columnas de la tabla anterior, hay un porcentaje alto de datos mayores que 5, por tanto no sería posible ocupar la distribución ji-cuadrado como función de decisión. En casos como este podríamos eliminar toda la columna o suponer que las personas que no opinan no estarían de acuerdo. La opinión a tomar depende de cada situación particular. Nos inclinamos por clasificar en “de acuerdo” y “no de acuerdo”, incluyendo en el último grupo los indiferentes.

En la siguiente tabla se presentan las frecuencias observadas y esperadas

Opinión \ Sexo	De acuerdo	Desacuerdo	Total
Varones	15    12.9	29    27.0	44
Mujeres	7      9.1	24    19.0	31
Total	22	46	75

Calculando el estadístico de prueba se obtuvo un valor de 1.16 con un grado de libertad.

La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula para cualquier valor de  $\chi_0^2 > a$  de la prueba estadística tal que la  $P(\chi_1^2 \geq a) = 0.05$ , ( $a = 3.84$  según tabla B, aleatoriamente), estos resultados nos conducen a aceptar la hipótesis nula que las variables sexo y opinión en la situación planteada son independientes.

### 2.3.2 Coeficiente de correlación $R_s$ de Spearman.

Un coeficiente de correlación que se basa en rangos y que es muy utilizado, es el de Spearman  $R_s$ , este resultado es muy fácil de calcular porque su cálculo es semejante al de correlación de Pearson que generalmente se usa. Spearman desarrolló un trabajo en 1940 donde presentó este coeficiente que en lugar de utilizar los valores de las variables, utilizaba los rangos asociados a ellas, mediante éste se tiene una medida de asociación y además permite probar hipótesis; el único supuesto que tiene es que la escala de medida de la variable en estudio es al menos ordinal.<sup>16</sup>

<sup>16</sup> Alberto Castillo M. y Mario Miguel Ojeda R., op.cit. pp. 143-146.

## Capítulo II

---

Los datos provienen de una muestra aleatoria bivariada de tamaño  $n$ ,  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ . Sea  $R(X_i)$  la representación de los rangos de  $X_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $R(X_{(i)}) = i$  ya que  $X_{(i)}$  es el estadístico de orden  $i$ -ésimo. En el caso de empates se le asigna el promedio de los rangos correlativos.

Este coeficiente nos permite medir la asociación lineal entre dos variables, hay otras medidas de asociación para aquellos casos en los que la escala con la que se miden las variables es de tipo nominal.

El coeficiente de correlación de Spearman oscila en el intervalo  $-1 \leq R_s \leq 1$ ; y mide el grado de asociación lineal que existe entre los rangos de  $X$  y  $Y$ . El coeficiente  $R_s$  mide la tendencia relacional entre  $X$  y  $Y$ , es decir si es monótona creciente o decreciente, si  $R_s$  se encuentra cercano a 1 ó a  $-1$ , se sugiere una asociación monótona creciente o decreciente respectivamente para  $X$  y  $Y$ <sup>17</sup>.

### *Hipótesis de prueba*

El coeficiente de correlación de rangos de Spearman a menudo es usado para probar la independencia entre dos variables aleatorias. Las hipótesis a probar toman la siguiente forma:

A. Prueba de dos colas

$H_0$ : Las poblaciones  $X$  e  $Y$  son mutuamente independientes. ( $H_0 : R_s = 0$ )

$H_1$ : (a) Hay una tendencia para los valores grandes de  $X$  para ser arreglado en pares con valores grandes de  $Y$  y (b) Hay una tendencia para los valores pequeños de  $X$  para ser arreglado en pares con valores grandes de  $Y$ . ( $H_1 : R_s \neq 0$ )

B. Prueba de una cola para correlación positiva

$H_0$ : Las poblaciones  $X$  e  $Y$  son mutuamente independientes. ( $H_0 : R_s = 0$ )

$H_1$ : Hay una tendencia para valores grandes de  $X$  y  $Y$  para ser arreglado en pares conjuntamente. ( $H_1 : R_s > 0$ )

C. Prueba de una cola para correlación negativa

---

<sup>17</sup> Canavos G.C. (1989). Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos. Editorial Mc Graw Hill.

$H_0$ : Las poblaciones  $X$  e  $Y$  son mutuamente independientes. ( $H_0 : R_s = 0$ )

$H_1$ : Hay una tendencia para valores pequeños de  $X$  para ser arreglado en pares con valores grandes de  $Y$ , y viceversa. ( $H_1 : R_s < 0$ )

**Estadístico de prueba**

Para una muestra de  $n$  pares  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  medidos al menos con la escala ordinal. El coeficiente de correlación de Spearman puede escribirse en la forma siguiente:

$$R_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

En donde se llama correlación o coeficiente de rango de Spearman. En esta fórmula,  $d_i$  es la diferencia entre los rangos de las observaciones apareadas  $(X_i, Y_i)$ , es decir  $d_i = R(X_i) - R(Y_i)$ ,  $R(X_i) = \text{rango}(x_i)$ ,  $R(Y_i) = \text{rango}(y_i)$  y  $n$  es el número de pares en la muestra. La fórmula anterior para  $R_s$  se obtiene de la fórmula de correlación de Pearson cuando no hay empate en los rangos.

Si hay empates, se calculará del modo siguiente:

$$R_s = \frac{n(n^2 - 1) - 6 \sum D_i^2 - 6(u' + v')}{\sqrt{[n(n^2 - 1) - 12u'] * [n(n^2 - 1) - 12v']}}$$

donde

$$u' = \frac{\sum u^3 - \sum u}{12};$$

$u$  es el número de observaciones empatadas entre los valores de  $X$  (Por ejemplo, si la observación  $X_5$  se repite 3 y la observación  $X_{15}$  se repite 5 veces, entonces  $u = 3, 5$ ). La suma es extendida sobre todo conjunto  $u$  de rangos empatados en la muestra  $X$ .

Del mismo modo

$$v' = \frac{\sum v^3 - \sum v}{12};$$

$v$  es el número de observaciones empatadas entre los valores de  $Y$ . La suma es extendida sobre todo conjunto de  $v$  rangos empatados en la muestra de  $Y$ .

$D_i$  es la diferencia entre los rangos de los pares relacionados.

Bajo la hipótesis nula de que las muestras  $X$  y  $Y$  son independientes, los rangos  $R_i$  correspondientes a la muestra  $X$  y  $S_i$  correspondientes a la muestra  $Y$  son independientes para todo  $i, j$ . Las medias y varianzas de  $R$  son fáciles de calcular como sigue:

$$E\left(\sum_{i=1}^n R_i S_i\right) = nE(R_i)E(S_i) = \frac{n(n+1)^2}{4}$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n R_i S_i\right) = n \operatorname{var}(R_i) \operatorname{var}(S_i) + n(n-1) \operatorname{cov}(R_i, R_j)(S_i, S_j)$$

$$= \frac{n(n^2+1)^2 + n(n-1)(n+1)^2}{144}$$

$$= \frac{n^2(n-1)(n+1)^2}{144}$$

El estadístico  $R_s$  es de distribución libre (el estadístico de distribución de Spearman no depende de la función de distribución de la población) y se aproxima a una normal con media cero y varianza  $\frac{1}{n-1}$  cuando el número de pares relacionados es, según algunos autores mayor que 30 y según otros 10 o más<sup>18</sup> y el valor estandarizado es  $Z = R_s \sqrt{n-1}$ .

### Regla de decisión

Según las hipótesis de prueba mencionadas anteriormente:

- A. Se rechaza  $H_0$  si el coeficiente  $R_s$  excede el cuantil  $1 - \alpha/2$  o si es más pequeño que el cuantil  $\alpha/2$ .
- B. Se rechaza  $H_0$  si el coeficiente  $R_s$  excede el cuantil  $1 - \alpha$ .
- C. Se rechaza  $H_0$  si el coeficiente  $R_s$  es más pequeño que el cuantil  $1 - \alpha$ .

### Ejemplo 2.7

Se realiza un estudio para determinar la asociación entre la concentración de nicotina en la sangre de un individuo y el contenido de nicotina de un cigarrillo, los valores se presentan en la siguiente tabla:

---

<sup>18</sup> Estadística no paramétrica a modo de introducción. Emma Fernández Loureiro de Pérez. Ediciones cooperativas. Pág. 110

Concentración de nicotina en sangre (nmol/litro)	Contenido de nicotina en cigarrillo (mg)
189.7	1.51
197.3	0.96
204.2	1.21
199.2	1.66
199.1	1.11
192.8	0.84
207.4	1.14
183.0	1.28
234.1	1.53
196.5	0.76

Los rangos asignados son los siguientes:

Concentración de nicotina en sangre (nmol/litro) $R(X_i)$	Contenido de nicotina en cigarrillo (mg) $R(Y_i)$	$d_i^2$
2	8	36
5	3	4
8	6	4
7	10	9
6	4	4
3	2	1
9	5	16
1	7	36
10	9	1
4	1	9

Solución:

El planteamiento de la hipótesis quedaría de la siguiente manera:

$H_0$ : La concentración de nicotina en la sangre depende de la concentración de nicotina en los cigarrillos. ( $H_0 : R_s = 0$ )

$H_1$ : Hay una correlación positiva en la concentración de nicotina en la sangre y la concentración de nicotina en los cigarrillos ( $H_1 : R_s > 0$ )

$$R_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6(120)}{10(99)} = 1 - \frac{720}{990} = 0.27$$

Dado que el estadístico  $R_s$  de Spearman es próximo a cero se concluye que no hay correlación lineal o que se acepta la hipótesis nula que la concentración de nicotina en la sangre depende de la concentración de nicotina en los cigarrillos. Por otra parte el  $P = 0.247$  según tabla I.

### 2.3.3 Coeficiente $\tau$ de Kendall.

El estadístico  $\tau$  de Kendall es otro coeficiente de correlación de rangos. Para utilizarlo en la medición de la asociación entre dos variables ordenadas.

Es aplicable en los mismos casos que el coeficiente de correlación de Spearman pero mide la asociación entre las variables en un sentido diferente y por tanto, en algunos casos, su valor es distinto al de Spearman.

#### *Hipótesis de prueba*

##### A. Prueba de dos colas

$H_0$ : Las poblaciones  $X$  e  $Y$  son mutuamente independientes. ( $H_0 : \tau = 0$ )

$H_1$ : (a) Hay una tendencia para los valores grandes de  $X$  para ser arreglado en pares con valores grandes de  $Y$  o (b) Hay una tendencia para los valores pequeños de  $X$  para ser arreglado en pares con valores grandes de  $Y$ . ( $H_1 : \tau \neq 0$ )

##### B. Prueba de una cola para correlación positiva

$H_0$ : Las poblaciones  $X$  e  $Y$  son mutuamente independientes. ( $H_0 : \tau = 0$ )

$H_1$ : Hay una tendencia para valores grandes de  $X$  y  $Y$  para ser arreglado en pares conjuntamente. ( $H_1 : \tau > 0$ )

##### C. Prueba de una cola para correlación negativa

$H_0$ : Las poblaciones  $X$  e  $Y$  son mutuamente independientes. ( $H_0 : \tau = 0$ )

$H_1$ : Hay una tendencia para valores pequeños de  $X$  para ser arreglado en pares con valores grandes de  $Y$ , y viceversa. ( $H_1 : \tau < 0$ )

#### *Estadístico de prueba*

Para cada conjunto de pares  $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$  de las observaciones de la muestra, se define el siguiente indicador:

## Capítulo II

$$A_{ij} = \text{sgn}(X_j - X_i) \text{sgn}(Y_j - Y_i)$$

Donde

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u < 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ 1 & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

Entonces los valores asumidos para  $A_{ij}$  son

$a_{ij}$	Variable indicador para la clasificación de $(X_i, Y_i)$ y $(X_j, Y_j)$
1	Si los pares son concordantes
-1	Si los pares son discordantes
0	Si los pares no son concordantes ni discordantes por un empate en cualquier componente.

Es obvio ver que  $a_{ij} = a_{ji}$  y  $a_{ii} = 0$ , por tanto, el posible total de parejas de pares a considerar son  $\binom{n}{2}$ , es decir,  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = m$  números de parejas de pares a considerar.

Sea la  $\tau$  de Kendall una medida de asociación entre variables aleatorias de alguna población bivariada, definida como:

$$\tau = \frac{2(N_c - N_d)}{n(n-1)}$$

Donde para dos pares independientes de observaciones  $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$  de dos poblaciones,

$N_c$  = Número de pares concordantes.

$N_d$  = Número de pares discordantes.

Esta medida de asociación de observaciones pares es llamada coeficiente tau de Kendall's.

Por tanto, se trata de construir un intervalo de confianza para  $\tau$  al nivel deseado  $100(1-\alpha)\%$ , utilizando sus tablas, y rechazar la hipótesis de ausencia de asociación si el valor numérico de  $\tau$  cae fuera de dicho intervalo.

Si los rangos de Y resultasen quedar ordenados cuando hemos seguido el orden natural de las observaciones de X, entonces la suma  $S$  tomaría su máximo valor numérico, que con el número total de comparaciones, y el estadístico  $\tau$  sería igual a 1. Si los rangos de Y quedasen en un orden exactamente inverso al natural, el estadístico  $\tau$  tomaría entonces su mínimo valor posible, que es -1. En general,  $-1 \leq \tau \leq 1$ . La hipótesis nula de ausencia de asociación entre ambas variables hará que en cada comparación de rangos de Y haya la misma probabilidad de que sus

rangos estén o no invertidos, por lo que habrá aproximadamente tantos 1 como -1, y la suma  $S$  será próxima a cero.

Para muestras de tamaño superior a 10, la distribución del estadístico puede aproximarse por:

$$\tau \approx N\left(0, \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}\right)$$

La división de  $\tau$  por su respectiva desviación estándar resulta en una variable aleatoria que es distribuida aproximadamente como una variable aleatoria normal estándar para valores grandes de  $n$ . La aproximación es considerada bastante buena para estandarizar los valores de  $\tau$  para  $n \geq 8$ .

### Regla de decisión

La  $\tau$  de Kendall puede ser usado como un estadístico de prueba para probar la hipótesis nula de independencia entre  $X$  y  $Y$ , con alternativas unilateral y bilateral. Usaremos  $T$  como estadístico de prueba de Kendall, donde  $T$  está definido como

$$T = N_c - N_d$$

Los cuantiles de  $T$  son dados en la tabla G. Si  $T$  excede al cuantil  $1-\alpha$  se rechaza  $H_0$  a favor de la hipótesis alternativa unilateral de correlación positiva, con nivel de  $\alpha$ . Valores de  $T$  menores que el cuantil  $\alpha$  conducen a la aceptación de la hipótesis alternativa de correlación negativa.

### Ejemplo 2.8

Doce conjuntos de gemelos idénticos recibieron pruebas psicológicas para determinar si el primer nacimiento de los gemelos tiende a ser más agresivo que el otro. Los resultados fueron los siguientes, donde la puntuación más alta indica más agresividad

Conjunto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Primer nacido	86	71	77	68	91	72	77	91	70	71	88	87
Segundo nacido	88	77	76	64	96	72	65	90	65	80	81	72

Los arreglos de datos  $(X_i, Y_i)$  conforme incrementan los valores de  $X$  de la siguiente forma:

$(X_i, Y_i)$	Pares concordantes $(X_i, Y_i)$	Pares discordantes $(X_i, Y_i)$	Par no concordante ni discordante (neutral)
(68,64)	11	0	0
(70,65)	9	0	1
(71,77)	4	4	1
(71,80)	4	4	0
(72,72)	5	1	1
(77,65)	5	0	1
(77,76)	4	1	0
(86,88)	2	2	0
(87,72)	3	0	1
(88,81)	2	0	0
(91,90)	0	0	0
(91,96)	0	0	0

Solución:

La  $\tau$  de Kendall será

$$\tau = \frac{2(N_c - N_d)}{n(n-1)} = \frac{2(49 - 12)}{(12)(11)} = \frac{74}{132} = 0.56$$

Esta es una correlación de rango positiva entre lo pares.

Siguiendo el ejemplo probaremos una hipótesis de alternativa bilateral planteada de la siguiente manera:

$$H_0 : \tau = 0$$

$$H_1 : \tau \neq 0$$

Primero calcularemos el estadístico  $T$ , el cual queda de la siguiente manera

$$T = N_c - N_d = 49 - 12 = 37$$

En la tabla G los cuantiles para la prueba bilateral de tamaño  $\alpha = 0.05$  es encontrado para  $n = 12$ , son

$$w_{1-\alpha/2} = w_{0.975} = 28 \text{ y } w_{\alpha/2} = w_{0.025} = -28$$

Dado que  $T$  cae en la región de rechazo concluiremos que se rechaza la hipótesis nula de que  $X$  y  $Y$  son mutuamente independientes y se acepta que hay tendencia en los datos, en nuestro caso que hay correlación positiva, es decir, que el comportamiento de los gemelos depende del orden de los nacimientos.

## 2.4 Pruebas de rachas

De la misma forma que un jugador de apuestas habla de “malas rachas” cuando pierde, podemos hablar de diferentes tipos de rachas. En estadística, cualquier secuencia de observaciones, delimitada por un tipo diferente de observaciones, es llamada una *racha*. Por ejemplo, una moneda es lanzada 20 veces y el resultado H (cara) o T (cruz) se lleva registrada según el orden en que ha ocurrido, como sigue:

T HHHHHH T H T H TT HHH T H T H

La serie comienza con una racha de cruz con longitud 1, seguida por una racha de cara con longitud 6, y así sucesivamente. En la serie se puede observar dos tipos de observaciones, en total hay 12 rachas de observaciones de las cuales 6 son del tipo T y 6 son del tipo H.

El número total de rachas es un estadístico que puede ser usado para probar la hipótesis nula:

$H_0$ : El proceso que genera la secuencia es un proceso aleatorio.

La prueba de rachas es presentada como una prueba de aleatoriedad de un proceso que genera la secuencia y como una prueba de dos muestras para diferencias de cualquier tipo entre dos poblaciones. Una racha consiste de una secuencia de valores  $X$  consecutivos de tipo I o valores  $Y$  de tipo II.

Cuando el número total de rachas es usado de esta forma es llamada la prueba de rachas de Wald-Wolfowitz, puede ser utilizada como una alternativa para otras pruebas de dos muestra como la prueba de Mann-Whitney, o la prueba de Smirnov. La prueba de rachas no es muy poderosa en el problema de muestras, pero es fácil de aplicar.

### 2.4.1 Prueba basada en el número total de rachas.

Asumimos una secuencia ordenada de  $n$  elementos de dos tipos,  $n_1$  del primer tipo y  $n_2$  del segundo tipo, donde  $n_1 + n_2 = n$ . Si  $r_1$  es el número de rachas de los elementos de tipo 1 y  $r_2$  es el número de rachas de elementos de tipo 2, el número total de rachas en la secuencia es de  $r = r_1 + r_2$ . Que es usada como una medida de aleatoriedad del proceso que genera la secuencia en la variable  $R$ , para derivar una prueba de aleatoriedad basada en la variable aleatoria  $R$ , el número total de rachas. Podemos construir la distribución de probabilidad de  $R$ , para encontrar las probabilidades de significancia  $\alpha$ , pero no es necesario en este momento ya

que hay tablas de probabilidad para dicho estadístico, sin embargo lo haremos posteriormente en el orden en que ocurre.

### Prueba de rachas wald-wolfowitz

- A. (prueba de aleatoriedad) los datos consisten de una secuencia de observaciones. Las observaciones son de dos tipos, o pueden ser reducidos a datos de dos tipos, denotados por  $a$  y  $b$  en esta representación, donde  $n_1$  denota el número de observaciones del tipo  $a$  y  $n_2$  el número de observaciones del tipo  $b$  en la secuencia observada.
- B. (prueba de dos muestras) los datos consisten de dos muestras aleatorias, mutuamente independiente una de otra. Una muestra  $X_1, \dots, X_{n_1}$  es de tamaño  $n_1$  y la otra  $Y_1, \dots, Y_{n_2}$  es de tamaño  $n_2$ . Un arreglo posible de muestras ordenadas combinadas, es como sigue:

$$X < X < Y < X < \dots < Y < X$$

que representa un arreglo de  $n_1 + n_2$  elementos.

Se necesita recordar de la identidad de las observaciones, es decir, de qué tipo es la observación, si es del tipo  $X$  o del tipo  $Y$  como se hizo anteriormente, aunque el valor numérico actual es sin importancia después del ordenamiento. Si varias observaciones son iguales, esto causa una ambigüedad en el número total de rachas, es recomendado hacer dos arreglos combinados, como sigue, el primer arreglo considerado será el que tenga el menor número rachas, el segundo arreglo será el que tenga el mayor número de rachas, y sea el estadístico de prueba igual al promedio de estos dos números de rachas.

Para pruebas de aleatoriedad la única suposición es que las observaciones sean registrables ya sea en un tipo ( $a$ ) o tipo ( $b$ ). Para las pruebas de dos muestras tenemos las siguientes suposiciones.

1. Las pruebas de dos muestras son aleatorias, cada una mutuamente independiente entre si.
2. Las variables aleatorias son continuas.

### *Hipótesis de prueba*

#### A. Prueba de aleatoriedad.

$H_0$ : El proceso que genera la secuencia es un proceso aleatorio.

$H_1$ : Las variables aleatorias en la secuencia son dependientes una de otras, o son distribuidas en forma diferente una de la otra.

B. Prueba de dos muestras.

$H_0$ : Los datos de la población de la variable  $X$  y los datos de la población de la variable  $Y$  tienen idénticas función de distribución.

$H_1$ : La función de distribución de la población de variable  $X$  es diferente a la función de distribución de la población de variable  $Y$ .

*Estadístico de prueba*

- A. (Prueba de aleatoriedad) El estadístico de prueba  $R$  es igual al número total de rachas de los elementos en la secuencia de observaciones.
- B. (Prueba para dos muestras) El estadístico de prueba  $R$  es igual al número total de rachas de las observaciones, en la muestra combinada ordenada.

Construcción de la distribución de  $R$

Bajo la hipótesis nula que las muestras vinieron de poblaciones idénticas, cada arreglo ordenado es igualmente probable, y tiene probabilidad  $\frac{1}{\binom{n_2 + n_1}{n_1}}$ , porque estas son  $\binom{n_2 + n_1}{n_1}$  arreglos

ordenados de la muestra combinada. La distribución de probabilidad del estadístico de prueba es encontrada al contar el número de arreglos que resulta en un específico número  $r$ , es decir,

dividimos el número por  $\binom{n_2 + n_1}{n_1}$ . Por ejemplo, si tenemos 4  $X'$  y 5  $Y'$ , y la racha de  $X$

comenzando con  $X^{(1)}$ ,  $X^{(3)}$  y  $X^{(4)}$ , y las rachas en  $Y$  comienzan con  $Y^{(1)}$ ,  $Y^{(2)}$ ,  $Y^{(3)}$ ,  $Y^{(4)}$  y  $Y^{(5)}$ , Luego sólo los arreglos ordenados posibles son

$$\underline{X^{(1)} < X^{(2)} < Y^{(1)} < X^{(3)} < Y^{(2)} < X^{(4)} < Y^{(3)} < Y^{(4)} < Y^{(5)}}$$

y

$$\underline{Y^{(1)} < X^{(1)} < X^{(2)} < Y^{(2)} < X^{(3)} < Y^{(3)} < Y^{(4)} < Y^{(5)} < X^{(4)}}$$

Cada uno contiene seis rachas. Este hecho significativo nos posibilita contar fácilmente el número de arreglos produciendo exactamente  $r$  rachas, de la siguiente manera.

Si  $r$  es un número par, entonces hay  $\frac{r}{2}$  rachas de  $X$  y  $\frac{r}{2}$  rachas de  $Y$ . La primera racha  $X$

comienza con  $X^{(1)}$ , la más pequeña de  $X$ , mientras las faltantes  $\frac{r}{2} - 1$  rachas de  $X$  pueden

comenzar con algún  $\frac{r}{2}-1$  de la faltante  $(n_1-1) X$ . Hay  $\binom{n_1-1}{\frac{r}{2}-1}$  formas de seleccionar estos

$\binom{\frac{r}{2}-1}{\frac{r}{2}-1} X$  de la  $(n_1-1) X$ . La misma afirmación puede estar hecha de  $Y$ ; esto es, la primera

racha  $Y$  comienza con  $Y^{(1)}$ , pero la racha faltante  $\binom{\frac{r}{2}-1}{\frac{r}{2}-1} Y$  puede comenzar con algún

$\frac{r}{2}-1$  de la faltante  $(n_2-1) Y$ . Estos  $Y$  pueden ser seleccionados en  $\binom{n_2-1}{\frac{r}{2}-1}$  formas. Así,

cuando  $r$  es par, tenemos

1)  $\binom{n_2-1}{\frac{r}{2}-1}$  = números de formas específicas de rachas que comienzan con  $X$ .

2)  $\binom{n_1-1}{\frac{r}{2}-1}$  = números de formas específicas de rachas que comienzan con  $Y$ .

3)  $\binom{n_1-1}{\frac{r}{2}-1} \binom{n_2-1}{\frac{r}{2}-1}$  = números de formas específicas de rachas que comienza con  $X$  y con  $Y$ .

Cada arreglo puede comenzar con una  $X$  o una  $Y$  cuando  $r$  es par, el número citado anteriormente de formas de especificar que  $X'$  y con  $Y'$  comience necesidades de rachas a ser duplicado para obtener el número de arreglos de la muestra ordenada que resultan en  $r$  rachas.

4)  $2 \binom{n_1-1}{\frac{r}{2}-1} \binom{n_2-1}{\frac{r}{2}-1}$  = número de arreglos de  $X$  y  $Y$  de  $r$  rachas, cuando  $r$  es par.

Dividiendo por el número total de arreglos obtenemos la probabilidad deseada.

5)  $P(T = r / H_0 \text{ es verdadero}) = \frac{2 \binom{n_1-1}{\frac{r}{2}-1} \binom{n_2-1}{\frac{r}{2}-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$ , cuando  $r$  es par.

Esto da la probabilidad de  $T$  igualando  $r$  cuando  $r$  es par.

Por ejemplo si tenemos las condiciones en cada muestra  $X_1 < X_2$  y  $Y_1 < Y_2$ , dado que  $n_1 = 2$  y  $n_2 = 2$ , y de los arreglos anteriores podríamos probar que la  $P(T = r = 4)$  usando la fórmula escrita anteriormente tenemos que:

$$P(T = r = 4 / H_0 \text{ es verdadero}) = \frac{2 \binom{2-1}{\frac{4-1}{2}} \binom{2-1}{\frac{4-1}{2}}}{\binom{2+2}{2}} = \frac{2 \binom{1}{1} \binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{6}$$

Para comprobar lo anterior podemos generar los siguientes arreglos:

$$\begin{aligned} X_1 X_2 Y_1 Y_2 &\rightarrow r = 2 \\ X_1 Y_1 X_2 Y_2 &\rightarrow r = 4 \\ X_1 Y_1 Y_2 X_2 &\rightarrow r = 3 \\ Y_1 Y_2 X_1 X_2 &\rightarrow r = 2 \\ Y_1 X_1 X_2 Y_2 &\rightarrow r = 3 \\ Y_1 X_1 Y_2 X_2 &\rightarrow r = 4 \end{aligned}$$

Y efectivamente hay 2 arreglos de 6 donde  $r = 4$ .

Si  $r$  es impar, hay una racha más de  $X$ ,  $\frac{(r+1)}{2}$  rachas, que son rachas de  $Y$ ,  $\frac{(r-1)}{2}$ , en

este caso la secuencia comienza y termina con una  $X$ , o lo contrario si hay una racha más de  $Y$  que de  $X$  la secuencia comienza y termina con una  $Y$ . El mismo razonamiento usado anteriormente cuando  $r$  es par puede ser usado cuando  $r$  es impar y obtenemos lo siguiente

$$6) \binom{\frac{n_1-1}{2}}{\frac{(r-1)}{2}} \binom{\frac{n_2-1}{2}}{\frac{(r-3)}{2}} = \text{número de arreglos dados } \frac{(r+1)}{2} X \text{ rachas y } \frac{(r-1)}{2} Y \text{ rachas.}$$

$$7) \binom{\frac{n_1-1}{2}}{\frac{(r-3)}{2}} \binom{\frac{n_2-1}{2}}{\frac{(r-1)}{2}} = \text{número de arreglos dados } \frac{(r-1)}{2} \text{ rachas de } X' \text{ y } \frac{(r+1)}{2} \text{ rachas de}$$

$Y'$ .

$$8) \binom{\frac{n_1-1}{2}}{\frac{(r-1)}{2}} \binom{\frac{n_2-1}{2}}{\frac{(r-3)}{2}} + \binom{\frac{n_1-1}{2}}{\frac{(r-3)}{2}} \binom{\frac{n_2-1}{2}}{\frac{(r-1)}{2}} = \text{el número total de arreglos que produce } r \text{ rachas,}$$

cuando  $r$  es impar.

$$9) P(T = r / H_0 \text{ es verdadero}) = \frac{\binom{\frac{n_1-1}{2}}{\frac{(r-1)}{2}} \binom{\frac{n_2-1}{2}}{\frac{(r-3)}{2}} + \binom{\frac{n_1-1}{2}}{\frac{(r-3)}{2}} \binom{\frac{n_2-1}{2}}{\frac{(r-1)}{2}}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

cuando  $r$  es impar.

La última ecuación da la probabilidad de  $T$  igualando  $r$  rachas cuando  $r$  es impar. Esta función de probabilidad de  $T$  es especificada por 5) cuando  $r$  es par y 9) cuando  $r$  es impar.

Hay una diferencia leve en teoría entre la prueba de dos muestras y la prueba para la aleatoriedad. En la prueba de dos muestras los tamaños de muestra  $n_2$  y  $n_1$  son conocidos en el proceso, y las probabilidades son encontradas considerando cada arreglo ordenado para ser

igualmente probables para  $n_2$  y  $n_1$ . En la prueba para aleatoriedad el número de objetos de tipo  $a$  y objetos de tipo  $b$  no es conocido hasta que la secuencia entera de observaciones sea conocida,  $n_2$  y  $n_1$  está en parte de la incertidumbre de los datos. Es todavía verdadero que cada arreglo de tipo  $a$  y cada arreglo de tipo  $b$  es igualmente probable cuando son dados  $n_2$  y  $n_1$ , así la función de probabilidad derivada anteriormente todavía es cierto para la prueba de aleatoriedad. La prueba descrita es legítima también, porque la región crítica depende de un  $n_2$  y  $n_1$ . Después la secuencia es observada,  $n_2$  y  $n_1$  son notadas, y entonces la tabla H es introducida con esos valores de  $n_2$  y  $n_1$  para determinar la región crítica. Una región crítica de tamaño  $\alpha$  es usada para los tamaños  $n_2$  y  $n_1$  obtenidos. Por lo tanto la prueba de Wald-Wolfowitz puede ser usada como prueba para aleatoriedad en una secuencia.

### *Regla de decisión*

Se hace uso de tabla H para obtener los cuantiles  $w_p$  del estadístico  $R$ , bajo la suposición que  $H_0$  es verdadera. En la prueba para aleatoriedad use la región crítica de dos colas, y rechace  $H_0$  con un nivel de  $\alpha$  si  $R > w_{1-\alpha/2}$  o si  $R < w_{\alpha/2}$ . En la prueba de dos muestras sólo es usada la región bajo la cola inferior, se rechaza  $H_0$  con un nivel  $\alpha$  si  $R$  es menor que  $w_\alpha$ . La tabla H provee algunos cuantiles  $w_p$  para seleccionar valores de  $p$  (.005, .01, .025, .05, .10, .90, .95, .975, .99, .995) y para muestras seleccionadas de tamaño  $n_2$  y  $n_1$  (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20). Para otros valores de  $n_2$  y  $n_1$  menores que 20, use los más cercanos a ellos dados en la tabla H. Si  $n_2$  o  $n_1$  excede 20 use la aproximación de muestra grande dada al final de la tabla H.

### *2.4.2 Una prueba basada sobre los rangos*

Otra forma de prueba para aleatoriedad es comparando la magnitud de cada elemento con el elemento inmediatamente precedente en la secuencia. Si las magnitudes de estos elementos son reemplazadas por sus rangos respectivos en la secuencia antes de calcular los cuadrados de suma de desviaciones sucesivas, podemos obtener una prueba no paramétrica.

Específicamente, dada la secuencia de tiempo de observaciones ordenadas en el tiempo  $S_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ . El estadístico de prueba

$$NM = \sum_{i=1}^{n-1} [\text{rank}(X_i) - \text{rank}(X_{i+1})]^2 \quad (2.8)$$

Fue propuesta por Bartels (1982). Una prueba basada en una función estadística es la versión de rango de la prueba de la razón para la aleatoriedad desarrollada por von Neumann usando teoría normal y es una transformación lineal del coeficiente de correlación serial de rango introducido por Wald y Wolfowitz (1943).

El estadístico de prueba  $NM$  está entre  $(n-1)$  y  $\frac{(n-1)(n^2+n-3)}{3}$  si  $n$  es par y entre  $(n-1)$  y  $\frac{(n-1)(n^2+n-3)}{3} - 1$  si  $n$  es impar. La distribución nula exacta de  $NM$  puede ser encontrada por enumeración y está dada en Bartels (1982) para  $4 \leq n \leq 10$ . Para muestras de tamaño grande, el estadístico de prueba

$$RVN = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} [\text{rank}(X_i) - \text{rank}(X_{i+1})]^2}{\sum_{i=1}^n \left[ \text{rank}(X_i) - \frac{n(n+1)}{2} \right]^2} \quad (2.9)$$

es asintóticamente como la distribución normal con media 2 y varianza  $\frac{4(n-2)(5n^2-2n-9)}{5n(n+1)(n-1)^2}$ , la

cual es aproximadamente igual a  $\frac{20}{5n+7}$ . Si no hay empates, el denominador de  $RVN$  es igual a

la constante  $\frac{n(n^2-1)}{12}$ .

Ya que una tendencia en cualquier dirección estará reflejada por un valor pequeño de  $NM$  y por consiguiente  $RVN$ , la apropiada región de rechazo para probar la aleatoriedad contra una hipótesis alternativa de tendencia son los valores pequeños de  $NM$  o  $RVN$ . La tabla J da las colas de probabilidad exactas para valores seleccionados de  $NM$  para  $n \leq 10$  y aproximadamente valores críticos de la cola izquierda (basada en la distribución beta) será de  $RVN$  para muestras de tamaño grande. El correspondiente valor crítico de la cola derecha es encontrado usando el hecho de que la aproximación Beta de  $RVN$  es simétrica aproximadamente alrededor de 2.0.

### Ejemplo 2.9

Ilustraremos la prueba de rangos de von Neumann utilizando una muestra de tamaño  $n = 13$  donde la hipótesis alternativa es que los datos tienen tendencia positiva. Primero asignando rangos al número de turistas del menor al más grande y obtenemos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 11

Solución:

El valor de  $NM$ , el numerador del estadístico  $RVN$  de la ecuación (2.8) es

$$NM = (1-2)^2 + (2-3)^2 + \dots + (13-11)^2 = 18$$

Y el denominador es  $\frac{13(13^2-1)}{12} = 182$ . De la ecuación (2.9)  $RVN = \frac{18}{182} = 0.0989$ , y la tabla

J muestra que los valores críticos de la cola izquierda basada en la aproximación beta debe rechazar la hipótesis nula de aleatoriedad en el nivel de 0.005 si  $RVN \leq 0.74$ . Puesto que rechazamos la hipótesis nula y concluimos que es una tendencia positiva significativa. También usamos estos datos para ilustrar que la prueba basada en la aproximación normal para la distribución de  $RVN$ . La media es 2 y la varianza para  $n = 13$  es 0.2778.

El estadístico de la distribución normal estándar es  $\frac{0.0989-2}{\sqrt{0.2778}} = -3.61$ . En un nivel de 0.005,

por ejemplo, la región de rechazo apropiada de la tabla A es  $Z \leq -2.58$ , así que concluimos que hay tendencia positiva significativa.

### **2.5 Pruebas de localización.**

En el análisis de las pruebas de localización se supone las  $k$  muestras independientes y la función de distribución  $F_X$  continua, en esta sección trataremos las siguientes pruebas de localización:

- Prueba de signos
- Prueba de Wilcoxon del rango con signo
- Prueba de Kruskal-Wallis unidireccional
- Prueba de Cuantiles.

#### **2.5.1 Prueba de signos.**

Una muestra aleatoria de  $n$  observaciones independientes  $X_1, X_2, \dots, X_n$  extraídas de una población con distribución  $F_X$  con mediana  $M$  desconocida, donde  $F_X$  es continua, al menos en la proximidad de  $M$  y  $P(X = M) = 0$ . La hipótesis nula de esta prueba concierne al valor de la mediana poblacional  $H_0 : M = M_0$  con la correspondiente hipótesis alternativa uni y bilateral en los valores de  $M$ .

Para cualquier distribución que satisfice  $P(X = M) = 0$ , por definición de  $M$  tenemos  $P(X > M) = P(X < M) = 0.50$ . Dado que la hipótesis declara que  $M_0$  es el valor de  $X$  que divide el área bajo la distribución de frecuencias en dos partes iguales, una equivalencia simbólica en representación de  $H_0$  es

$$H_0 : \theta = P(X > M_0) = P(X < M_0) = 0.5$$

Si los datos de la muestra son consistentes con el valor mediano de la hipótesis, la mitad de las observaciones de la muestra estarán por encima del número  $M_0$  y la otra mitad por debajo. El número de observaciones arriba de  $M_0$ , será denotado por el estadístico  $K$ . Cuando las observaciones son divididas en dos partes, esto constituye un conjunto de  $n$  variables aleatorias independientes de la población de Bernoulli con parámetro  $\theta = P(X > M_0)$ , independientemente de la población con función de distribución  $F_X$ . La distribución de muestreo de la variable aleatoria  $K$  es la distribución de probabilidad binomial con parámetros  $n$  y  $\theta$ , para  $\theta = 0.5$  la hipótesis nula es verdadera, dado que  $K$  es el número de signos + entre las  $n$  diferencias  $X_i - M_0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### Hipótesis de prueba

Ya que la distribución binomial con  $\theta = 0.5$  es simétrica para cualquier  $n$ . La apropiada región de rechazo en términos de  $K$ , es el número de signos mas entre  $X_1 - M_0, X_2 - M_0, \dots, X_N - M_0$ , como sigue:

Hipótesis de prueba	Región de rechazo
$H_0 : M \leq M_0$ $H_1 : M > M_0$	$K \geq k_\alpha$ (a)
$H_0 : M \geq M_0$ $H_1 : M < M_0$	$K \leq k'_\alpha$ (b)
$H_0 : M = M_0$ $H_1 : M \neq M_0$	$K \leq k'_{\alpha/2}$ ó $K \geq k_{\alpha/2}$

- (a)  $k_\alpha$  representa el punto crítico de la distribución binomial con  $p=0.5$  que deja una probabilidad por arriba de  $\alpha$  (a la derecha)
- (b)  $k'_\alpha$  representa el punto crítico de la distribución binomial con  $p=0.5$  que deja una probabilidad por abajo de  $\alpha$  (a la izquierda:  $k'_\alpha = n - k_\alpha$ )

La tabla K con  $\theta = 0.5$  y  $n$  puede ser usada al determinar los valores críticos. La tabla L, sin embargo, es más simple para usar porque da las probabilidades de la cola izquierda y las de la cola derecha, para  $n \leq 20$  en casos especiales donde  $\theta = 0.5$  aprovechando la simetría de la distribución.

Para muestras grandes la apropiada región de rechazo esta basada en la aproximación normal a la distribución binomial con corrección de continuidad, como se muestran a continuación:

Hipótesis de prueba	Región de rechazo
$H_0 : M \leq M_0$ $H_1 : M > M_0$	$K \geq 0.5n + 0.5 + 0.5z_{1-\alpha}\sqrt{n}$
$H_0 : M \geq M_0$ $H_1 : M < M_0$	$K \leq 0.5n - 0.5 - 0.5z_{1-\alpha}\sqrt{n}$
$H_0 : M = M_0$ $H_1 : M \neq M_0$	Ambos citados anteriormente con $z_{1-\alpha/2}$

Donde  $Z_{1-\alpha}$  es el cuantil  $1 - \alpha$  de la normal estándar.

Si algunos ceros se presentan, los ignoraremos y reduciremos  $n$  consecuentemente.

Para una alternativa unilateral, la dirección apropiada es determinada por la hipótesis alternativa. Por ejemplo, con la hipótesis alternativa  $H_1 : M > M_0$ , el  $P$  valor es  $P = (K \geq k | M = M_0)$  donde  $k$  es el número observado de signos mas. Similarmente, el  $P$  valor es  $P = (K \leq k | M = M_0)$  para  $H_1 : M < M_0$ . Para una hipótesis alternativa bilateral si la distribución nula es simétrica, el procedimiento común es definir el  $P$  valor, como el doble de los  $P$  valores unilaterales. Por ejemplo, supóngase que de una muestra de tamaño  $n = 12$  observamos  $k = 4$  signos mas, teniendo en cuenta que ninguna de las diferencias de la muestra  $X_i - M_0$  es cero, en la tabla L se muestra para la cola izquierda que el  $P$  valor es 0.1938; dado que en la cola derecha respecto al valor del estadístico que es 4 la probabilidad  $P$  excede a 0.5, entonces, el valor más pequeño de una cola es  $P = 0.1938$ , este valor sería duplicado para dar 0.3876, que corresponde al  $P$  - valor de la hipótesis bilateral.

La correspondiente estimación del intervalo de confianza es fácil para encontrar en la tabla L. La elección de niveles de confianza exactos está limitada por  $1 - 2P$  donde  $P$  es una probabilidad de cola en la tabla L para un  $n$  apropiado. El punto extremo de la izquierda del intervalo de confianza es el  $(k'_{\alpha/2} + 1)$ -ésimo estadístico de orden en la muestra, donde  $k'_{\alpha/2}$  es el valor crítico de la cola izquierda del estadístico  $K$  de la prueba de signo de la tabla L dados  $P$  y  $n$ .

Así, en la práctica, una vez el nivel de significancia es seleccionado como  $1 - 2P$ , determinamos el rango de valores críticos para la cola izquierda de  $P$  entre los elementos de la tabla L para éste  $n$  y lo denota por  $u$ . Los puntos fin del intervalo de confianza son los  $u$ -ésimos pequeños y los  $u$ -ésimos grandes entre los  $n$  estadísticos de orden de la muestra, o

$$X_{(u)} < M < X_{(n-u+1)}$$

Para  $n > 20$ , encontraremos  $u$  de  $u = 0.5n - 0.5 - 0.5z_{\alpha/2}\sqrt{n}$ .

Y si el resultado no fuera un número entero se toma el entero inferior al valor dado. Si ocurren ceros en los datos, se cuenta el número de veces que aparecen para determinar los puntos y los intervalos de confianza.

### *Estadístico de prueba y regla de decisión*

La apropiada región de rechazo depende de la hipótesis alternativa. Una posible hipótesis alternativa unilateral de interés es que la mediana verdadera exceda el valor de la hipótesis, que sería equivalentes a decir que la probabilidad de un signo mas exceda la probabilidad de un signo menos. Simbólicamente, escribimos

$$H_1 : M > M_0 \quad \text{o} \quad \theta = P(X > M_0) > P(X < M_0)$$

La muestra reflejará esta condición si existe un exceso de diferencias positivas. Por lo tanto, la región de rechazo para una prueba con nivel de significancia  $\alpha$  en la cola superior es

$$K \in R \quad \text{para} \quad K \geq k_{1-\alpha}$$

donde  $k_{1-\alpha}$  está seleccionado para ser el menor entero que satisface

$$\sum_{k=k_{1-\alpha}}^n \binom{n}{k} 0.5^n \leq \alpha$$

El nivel de significancia deseado  $\alpha$ , usualmente no puede ser logrado exactamente, por ser  $K$  un estadístico de prueba discreto.

Cualquier tabla de la distribución binomial, la tabla K puede ser usada con  $\theta = 0.5$  para encontrar el valor de  $k_{\alpha}$  dado  $n$  y  $\alpha$ , pero la tabla L es más fácil de usar. Similarmente, para una prueba unilateral con la hipótesis alternativa

$$H_1 : M < M_0 \quad \text{o} \quad \theta = P(X > M_0) < P(X < M_0)$$

La región de rechazo para un nivel  $\alpha$  de la prueba es

$$K \in R \quad \text{para} \quad K \leq k'_{\alpha}$$

Donde  $k'_{\alpha}$  es el entero más grande que satisface

$$\sum_{k=0}^{k'_\alpha} \binom{n}{k} 0.5^n \leq \alpha$$

Si la prueba es bilateral,

$$H_1 : M \neq M_0 \quad \text{o} \quad \theta = P(X > M_0) \neq P(X < M_0)$$

La región de rechazo mostrada consiste en valores de  $k$  demasiado grandes o demasiado pequeños. Dado que la distribución binomial es simétrica con  $\theta = 0.5$ , la intensidad máxima es lograda escogiendo las dos colas simétricamente. Así rechazamos cuando  $K \geq k_{\alpha/2}$  ó  $K \leq k'_{\alpha/2}$ , donde  $k_{\alpha/2}$  y  $k'_{\alpha/2}$  son respectivamente, los enteros menores y más grandes satisfaciendo

$$\sum_{k=k_{\frac{\alpha}{2}}}^n \binom{n}{k} 0.5^n \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{k'_{\frac{\alpha}{2}}} \binom{n}{k} 0.5^n \leq \frac{\alpha}{2} \quad (2.10)$$

Obviamente, tenemos la relación  $k'_{\alpha/2} = n - k_{\alpha/2}$ , ya que, por simetría se tiene:

$$\begin{aligned} k'_{\alpha/2} &= \text{Media} - \text{distancia de la media a } k_{\alpha/2} \\ &= \frac{n}{2} - \left( k_{\alpha/2} - \frac{n}{2} \right) \\ &= n - k_{\alpha/2} \end{aligned}$$

La prueba estadística de signo con estas regiones de rechazo es consistente en contra de su respectiva hipótesis alternativa uni y bilateral. Aplicando el criterio de consistencia<sup>19</sup>, dado que  $E\left(\frac{K}{n}\right) = \theta$  y  $\text{var}\left(\frac{K}{n}\right) = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $K$  provee una prueba estadística *consistente*.

Sabemos por el teorema del límite central que la distribución binomial se aproxima a la distribución normal cuando  $n \rightarrow \infty$ . La aproximación normal a la binomial es buena especialmente con  $\theta = 0.5$ . Por lo tanto, para los valores discretos y grandes de  $n$  (al menos 12), es satisfactorio usar la aproximación normal a la binomial para determinar regiones de rechazo. Dado que ésta es una aproximación continua a una distribución discreta, una corrección de continuidad de 0.5 puede ser incorporada en el cálculo. Por ejemplo, para la hipótesis alternativa  $H_1 : M > M_0$ , si  $n$  es grande  $H_0$  es rechazado por  $K \geq k_\alpha$ , donde  $k_\alpha$  satisface que

$$k_\alpha = 0.5n + 0.5 + 0.5\sqrt{n}z_\alpha \quad (2.11)$$

---

<sup>19</sup> Dickinson Gibbons, Jean and Chakraborti, Subhabrata (1992). Nonparametric Statistical Inference. Third Edition. Editorial Marcel Dekker, Inc. Pág. 19

Una diferencia de cero se origina cuando  $X_i = M_0$  para al menos un  $i$ . Teóricamente, las diferencias de cero no causan ningún problema porque la población se asume continua aproximadamente alrededor de la mediana.

En realidad, las diferencias que den cero pueden ocurrir, ya sea porque la suposición de continuidad es un error o porque las medidas son imprecisas. Muchos ceros pueden ser evitados llevando las medidas a un número mayor de cifras significativas. Sin embargo, el tratamiento más común de ceros es simplemente ignorarlos y reducir  $n$  consecuentemente. Las inferencias están luego condicionadas al número observado de diferencias de que no tengan cero. Una aproximación alternativa es tratar la mitad de los ceros como positivos y la otra mitad como negativos. Otra forma de manipular los ceros es asignar para todos los ceros el signo para que conduzca al menos al rechazo de  $H_0$ .

### Ejemplo 2.10

Algunos investigadores afirman que la receptividad para la hipnosis puede ser adquirida o perfeccionada a través de entrenamiento. Para investigar esta afirmación seis temas fueron evaluados en una escala de 1 al 20 según su susceptibilidad inicial para la hipnosis y luego se dieron cuatro semanas de entrenamiento. Cada sujeto fue evaluado otra vez después del período de capacitación. En los promedios presentados en la siguiente tabla, los números más altos representan susceptibilidad mayor para la hipnosis. ¿Estos datos dan soporte a la afirmación?

Sujeto	Antes	Después
1	10	18
2	16	19
3	7	11
4	4	3
5	7	5
6	2	3

Solución: La hipótesis nula  $H_0 : M_D = 0$  y la hipótesis alternativa apropiada  $H_1 : M_D > 0$  donde  $M_D$  es la mediana de las diferencias, “después de entrenarse” - “antes de entrenarse”. El número de diferencias positivas (de signo mas) es  $k = 4$ . El  $P$  valor de la cola derecha para  $n = 6$ ,  $k = 4$  de la tabla L es 0.3438. Los datos no dan soporte a la afirmación de que la hipótesis puede ser adquirida o perfeccionada a través de entrenamiento, ya que el  $P$ -valor es mayor a  $\alpha = 0.05$ .

### La función potencia

En contraste a la mayoría de pruebas no paramétricas, la función de potencia de la prueba de signo es simple de determinar. La variable aleatoria  $K$  sigue la distribución de probabilidad binomial con parámetros  $n$  y  $\theta$  cuando la hipótesis nula es falsa. La potencia es una función de  $\theta$ , de tal manera que una curva general de potencia puede ser representada para  $H_1: \theta > 0.5$  calculada para valores arbitrarios de  $\theta > 0.5$ :

$$\beta = P(\text{aceptar } H_0 / H_0 \text{ es falsa}) = \sum_{k=0}^{k_\alpha-1} \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$

$$p_w = 1 - \beta = \sum_{k=k_\alpha}^n \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k} \quad (2.12)$$

La función de potencia es utilizada para un tipo de situaciones más paramétrico donde la distribución de la población es completamente especificada, el parámetro  $\theta = P(X > M_0)$  puede ser calculado. Este tipo de función de potencia es utilizado para las comparaciones entre la prueba del signo y algunas pruebas paramétrica para localización.

Como ejemplo, calculemos la potencia de la prueba del signo de  $H_0: M = 28$  versus  $H_1: M > 28$  para  $n=16$  con nivel de significancia de 0.05, bajo la suposición que la población es normalmente distribuida con media 29.04 y desviación estándar de 1. La Tabla L ilustra que la región de rechazo es  $K \geq 12$  (se toma esta región dado que según la tabla, hasta donde se cumple el nivel de significancia de 0.05). Bajo la suposición dada, podemos evaluar

$$\theta = P(X > 28) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > -1.04\right) = 1 - \Phi(-1.04) = 0.8508 = 0.85$$

Vemos

$$P_w(0.85) = \sum_{k=12}^{16} \binom{16}{k} (0.85)^k (0.15)^{16-k} = 0.9209$$

Esto estaría directamente comparable con la teoría de la prueba normal de  $H_0: \mu = 28$  versus  $H_1: \mu = 29.04$  con  $\sigma = 1$ , dado que la media y la mediana coincide para las distribuciones normales. La región de rechazo para esta prueba paramétrica con  $\alpha = 0.05$  es  $\bar{X} \geq 28.41$ , y la potencia de la prueba es

$$P_w(29.04) = P(\bar{X} \geq 28.41 | \mu = 29.04) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq -2.52\right) = 1 - \Phi(-2.52) = 0.9941$$

El procedimiento de intervalo de confianza

La técnica de la prueba de signo puede ser aplicada para obtener una estimación de los intervalos de confianza para la mediana desconocida de la población. Los estadísticos de orden para la muestra aleatoria son  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ . Aceptaríamos la hipótesis nula para una prueba bilateral con nivel de significancia  $\alpha$  para todos los valores  $M$  que son exactamente  $K$  números positivos entre las  $n$  diferencias  $X_{(i)} - M$  donde  $i = 1, 2, \dots, n$ , para todo  $K$  que satisfaga la desigualdad

$$k'_{\alpha/2} + 1 \leq K \leq k_{\alpha/2} - 1 \quad (2.13)$$

Donde  $k'_{\alpha/2}$  y  $k_{\alpha/2}$  son enteros seleccionados en concordancia con la ecuación (2.10).

Para obtener una estimación de intervalo de confianza de  $M$ , necesitamos trasladar la desigualdad de la ecuación (2.13) para una expresión equivalente implicando estadística de orden y  $M$ . Aplicando intervalos de confianza para cuantiles  $p = 0.5$ , tenemos

$$P(X_{(r)} \leq M \leq X_{(s)}) = P(r \leq K \leq s-1)$$

Por consiguiente nuestro intervalo de confianza estimado para  $M$  con  $(1-\alpha)100\%$ , es

$$X_{k'_{\alpha/2}+1} < M < X_{k_{\alpha/2}} \quad (2.14)$$

En un arreglo de observaciones, el intervalo de confianza tiene como puntos extremos los elementos que ocupan la posición  $(k'_{\alpha/2} + 1)$ -ésimo y  $k_{\alpha/2}$  en las observaciones ordenadas.

Para muestras grandes donde  $n$  excede el rango de las tablas binomiales disponibles, la aproximación normal a la binomial puede ser usada para un coeficiente de  $1-\alpha$  la afirmación de probabilidad en  $K$ , puede convertirse para un porcentaje de  $(1-\alpha)100\%$  estimado de intervalo de confianza de  $M$  mencionado anteriormente. De la ecuación (2.13) tenemos que:

$$P(k'_{\alpha/2} + 1 < K < k_{\alpha/2} - 1) = 1 - \alpha \text{ si y sólo si } P(X_{k'_{\alpha/2}+1} < M < X_{k_{\alpha/2}}) = 1 - \alpha$$

Usando la aproximación normal con corrección de continuidad dada en la ecuación (2.11), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{k_{\alpha/2} - 0.5 - 0.5n}{0.5\sqrt{n}} &= z_{1-\alpha/2} \\ k_{\alpha/2} &= 0.5n + 0.5 + 0.5z_{1-\alpha/2}\sqrt{n} = s \\ \frac{k'_{\alpha/2} + 0.5 - 0.5n}{0.5\sqrt{n}} &= -z_{1-\alpha/2} \\ k'_{\alpha/2} + 1 &= 0.5n + 0.5 - 0.5z_{1-\alpha/2}\sqrt{n} = r \end{aligned}$$

Los ceros no presentan un problema en la conclusión de la estimación del intervalo de confianza de la mediana y siendo este procedimiento basado en la prueba de signo. Como un resultado,

las muestras de tamaño  $n$  no están reducidas para ceros y los ceros son contados muchas veces como empates ocurridos al determinar los puntos del extremo de los intervalos de confianza. La potencia de la prueba será mayor si la prueba es efectuada usando la aproximación de un intervalo de confianza.

### Procedimientos para muestras apareadas

Los datos proceden de observaciones de una muestra aleatoria bivariada (dos variables)  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ , donde son  $n$  pares de observaciones.

Dentro de cada par  $(X_i, Y_i)$  se hace una comparación, y los pares son clasificados como “+” si  $X_i < Y_i$ , como “-” si  $X_i > Y_i$ , o como “0” si hay empates, es decir, si  $X_i = Y_i$ . Así la escala necesaria es al menos ordinal.

Para la prueba de signo de muestras apareadas asumimos que:

1. La variable aleatoria bivariada  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , son mutuamente independientes.
2. La escala de medida es al menos ordinal en cada par. Es decir, cada par  $(X_i, Y_i)$  puede ser determinado por un “mas”, “menos” o “empate”.
3. los pares  $(X_i, Y_i)$  son internamente consistentes. En que si  $P(+)>P(-)$  para un par  $(X_i, Y_i)$ , luego  $P(+)>P(-)$  para todos los pares. Lo mismo es cierto para  $P(+)<P(-)$  y  $P(+)=P(-)$ .

### Hipótesis de prueba

A. Prueba para dos colas.

$$H_0 : P(X_i < Y_i) = P(X_i > Y_i) \text{ para todo } i .$$

$$H_1 : P(X_i < Y_i) < P(X_i > Y_i) \text{ para todo } i, \text{ o } P(X_i < Y_i) > P(X_i > Y_i) \text{ para todo } i .$$

B. Prueba para cola izquierda.

$$H_0 : P(X_i < Y_i) \leq P(X_i > Y_i) \text{ para todo } i .$$

$$H_1 : P(X_i < Y_i) > P(X_i > Y_i) \text{ para todo } i$$

C. Prueba para cola derecha.

$$H_0 : P(X_i < Y_i) \geq P(X_i > Y_i) \text{ para todo } i .$$

$$H_1 : P(X_i < Y_i) < P(X_i > Y_i) \text{ para todo } i .$$

Notaremos que la prueba de signo es insesgada y consistente cuando probamos la hipótesis. La prueba de signo puede ser usada para probar las siguientes contrapartes de las hipótesis mencionadas anteriormente, en este caso ninguna es insesgada ni consistente a menos que se hagan suposiciones adicionales a la distribución de  $(X_i, Y_i)$ .

A. Prueba para dos colas. La hipótesis es interpretada como “ $X_i$  y  $Y_i$  tiene el mismo parámetro de localización” y por consiguiente

$$H_0 : E(X_i) = E(Y_i) \text{ para todo } i$$

$$H_1 : E(X_i) \neq E(Y_i) \text{ para todo } i$$

Para ver si  $X_i$  y  $Y_i$  tienen diferentes medias. Similarmente, se puede hacer la prueba de las medianas.

$$H_0 : \text{La mediana de } X_i \text{ es igual a la mediana de } Y_i \text{ para todo } i.$$

$$H_1 : X_i \text{ y } Y_i \text{ tienen diferentes medianas para todo } i.$$

B. Prueba de cola izquierda. La hipótesis nula puede ser considerada para indicar que los valores de  $X_i$  tienden a ser mayor que los valores de  $Y_i$ , porque  $H_0$  afirma que  $X_i$  puede exceder a  $Y_i$ . Por lo tanto la prueba de signo para una cola es la siguiente:

$$H_0 : E(X_i) \geq E(Y_i) \text{ para todo } i$$

$$H_1 : E(X_i) < E(Y_i) \text{ para todo } i$$

C. Prueba de cola derecha. La hipótesis nula en C anteriormente puede ser considerada para indicar que  $X_i$  tiene una tendencia para asumir valores pequeños que  $Y_i$ , y por lo tanto la prueba unilateral puede ser usada para probar:

$$H_0 : E(X_i) \leq E(Y_i) \text{ para todo } i$$

$$H_1 : E(X_i) > E(Y_i) \text{ para todo } i$$

Y similarmente un conjunto de hipótesis puede ser para los casos B y C en términos de la mediana.

Estadístico de prueba.

El estadístico  $K$  es igual al número de pares  $(X_i, Y_i)$  tal que  $X_i$  es menor que  $Y_i$ .

$$K = \text{número total de } +.$$

### Regla de decisión

Primero haremos caso omiso de los empates, y sea  $n$  igual al número de pares que no son empates:

$$n = \text{total de + y -}.$$

Sea  $\alpha$  el nivel de significancia aproximado.

Use la regla de decisión A, B o C dependiendo de la hipótesis a ser probada según la clasificación de categorías mencionadas anteriormente.

- A. Prueba para dos colas. Para  $n \leq 20$ , use tabla B con los valores apropiados de  $n$ , y con  $p = 1/2$ . Seleccione un valor próximo a  $\alpha/2$  y será llamado  $\alpha_1$ . El valor de  $Y$  correspondiente para  $\alpha_1$  es llamado  $k$ . La región crítica de tamaño  $2\alpha_1$  correspondiente a valores de  $K$  menores o iguales que  $k$ , o mayores o iguales que  $n - k$ . Rechazamos  $H_0$  si  $K \leq k$  o si  $K \geq n - k$ , con un nivel de significancia de  $2\alpha_1$ . En otro caso se acepta  $H_0$

$$k = \frac{1}{2}(n + w_{\alpha/2}\sqrt{n})$$

donde  $w_{\alpha/2}$  es el cuantil obtenido de la tabla A. Si  $\alpha = 0.05$ , entonces  $w_{\alpha/2} = -1.96$  según la ecuación anterior. Una forma más sencilla de ser recordada es la siguiente:

$$k = \frac{n}{2} - \sqrt{n}$$

- B. Prueba de cola izquierda. Valores grandes de  $K$  indica que un signo positivo es más probable que uno negativo, como es indicado por  $H_1$ . Por consiguiente la región crítica correspondiente para valores de  $K$  mayores o iguales que  $n - k$ , donde  $k$  se encuentra al ingresar en la tabla B con  $p = 1/2$  y  $n$ , y localizamos en la tabla el valor de  $k$  correspondiente a  $\alpha_1$  igual a  $\alpha$  o aproximado a  $\alpha$ , es decir  $\alpha_1$ . Para  $n$  mayor que 20,  $k$  puede ser encontrado con la aproximación:

$$k = \frac{1}{2}(n + w_{\alpha}\sqrt{n})$$

Donde  $w_{\alpha}$  es el cuantil obtenido por tabla A.  $H_0$  es rechazada con un nivel de significancia  $\alpha_1$  (o  $\alpha$ ) si  $K$  es mayor o igual que  $n - k$ .

C. Prueba de cola derecha. Para valores pequeños de  $K$  indica que un signo menos es más probable que un signo mas, de acuerdo con  $H_1$ . Por consiguiente  $k$  es encontrado exactamente en B. la región crítica de tamaño  $\alpha_1 \square \alpha$  correspondiente a los valores de  $K$  menores o iguales que el cuantil  $\alpha_1$ -ésimo  $k$ . Rechazamos  $H_0$  si  $K \leq k$ , con un nivel de significancia de  $\alpha_1$  (o  $\alpha$  en el caso de  $n > 20$ ). En otro caso aceptamos  $H_0$ .

### 2.5.2 Prueba de rango con signo de Wilcoxon

Dado que la prueba de signo de una muestra singular utiliza solo los signos de las diferencias entre cada observación y el valor de la mediana  $M_0$  bajo  $H_0$ , las magnitudes (medidas) de estas observaciones relativas a  $M_0$  son ignoradas. Asumiendo que esta información esta disponible, una prueba estadística que tenga en cuenta las magnitudes relativas individuales se espera de mejor desempeño. Si estamos dispuestos a hacer la suposición que la población de origen es simétrica, la prueba estadística de rango con signo de Wilcoxon provee una prueba alternativa de localización que es afectado por las magnitudes y signos de estas diferencias.

Dada una muestra aleatoria con  $n$  observaciones  $X_1, X_2, \dots, X_n$  con función continua  $F_X$  y mediana  $M$ , asumimos que la población con función de distribución  $F_X$  es simétrica en torno de  $M$ . Bajo la hipótesis nula

$$H_0 : M = M_0$$

Las diferencias  $D_i = X_i - M_0$  son distribuidas simétricamente en torno de cero, así que las diferencias positivas y negativas de igual magnitud absoluta tienen la misma probabilidad de ocurrencia, es decir para cualquier  $c > 0$ ,

$$F_D(-c) = P(D_i \leq -c) = P(D_i \geq c) = 1 - P(D_i \leq c) = 1 - F_D(c)$$

Como asumimos una distribución continua, no hay necesidad teóricamente de preocuparse de ceros o diferencias absolutas empatadas  $|D_i|$ . Suponemos que ordenamos las diferencias absolutas  $|D_1|, |D_2|, \dots, |D_n|$  de menor a mayor y asignamos los rangos  $1, 2, \dots, n$ , manteniendo el signo original de las diferencias  $D_i$ . Si  $M_0$  es la mediana verdadera de la población simétrica, lo esperado de la suma de los rangos de las diferencias positivas  $T^+$  es igual a lo esperado de la suma de los rangos de las diferencias negativas  $T^-$ . Puesto que la suma de todos los rangos es una constante  $T^+ + T^- = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ , la prueba estadística basada únicamente en  $T^+$ ,

$T^-$  ó  $T^+ + T^-$  son linealmente relacionadas y los criterios por consiguiente equivalentes. En contraste a la prueba ordinaria de signo de una sola muestra, el valor de  $T^+$ , es influenciado no sólo por el número de diferencias positivas sino que también por sus magnitudes relativas. Cuando la simetría asumida es justificable,  $T^+$  puede proveer más pruebas eficientes de localización para algunas distribuciones.

**Hipótesis de prueba**

La apropiada región de rechazo para  $T^+$ , llamada la suma de rangos positivos, son las siguientes:

Hipótesis de prueba	Región de rechazo
$H_0 : M = M_0$ $H_1 : M > M_0$	$T^+ \geq t_\alpha$ (a)
$H_0 : M \geq M_0$ $H_1 : M < M_0$	$T^+ \leq t'_\alpha$ (b)
$H_0 : M = M_0$ $H_1 : M \neq M_0$	$T^+ \leq t'_{\frac{\alpha}{2}}$ ó $T^+ \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$

- (c)  $t_\alpha$  representa el punto crítico de la distribución binomial con  $p=0.5$  que deja una probabilidad por arriba de  $\alpha$  (a la derecha)
- (d)  $t'_\alpha$  representa el punto crítico de la distribución binomial con  $p=0.5$  que deja una probabilidad por abajo de  $\alpha$  (a la izquierda:  $t'_\alpha = n - t_\alpha$ )

Así la tabla puede ser usada para encontrar los valores críticos exactos para un  $\alpha$  dado para encontrar el  $P$  valor exacto. Para  $n > 15$ , la región de rechazo apropiada basada en una aproximación normal con corrección de continuidad son las siguientes:

Hipótesis de prueba	Región de rechazo
$H_0 : M \leq M_0$ $H_1 : M > M_0$	$T^+ \geq \frac{n(n+1)}{4} + 0.5 + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$
$H_0 : M \geq M_0$ $H_1 : M < M_0$	$T^+ \leq \frac{n(n+1)}{4} - 0.5 - z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$
$H_0 : M = M_0$ $H_1 : M \neq M_0$	Ambos citados anteriormente con $z_{\alpha/2}$

donde  $z_{1-\alpha}$  es el cuantil  $1-\alpha$  de la normal estándar.

**Definición 2.3**

Los promedios de Walsh son las magnitudes relativas de los  $\frac{N(N+1)}{2}$  promedios de pares  $\frac{X_i - X_k}{2}$  para todo  $i \leq k$ .

El correspondiente intervalo de confianza estimado de la mediana tiene puntos extremos que son los  $(t_{\alpha/2} + 1)$ -ésimo pequeños y grandes de los promedio de Walsh, donde  $t_{\alpha/2}$  es el valor crítico de la cola izquierda en la tabla M para los  $n$  datos. Los niveles exactos de confianza están limitados por  $1 - 2P$  donde  $P$  es una probabilidad de cola en la tabla M. Por lo tanto  $t_{\alpha/2}$  es el valor crítico de la cola izquierda del  $P$  elegido.

Así, en la práctica, el intervalo de confianza y puntos son los  $u$ -ésimos pequeños y los  $u$ -ésimos grandes de  $n(n+1)$  promedios de Walsh.

$$W_{ik} = \frac{X_i + X_k}{2} \text{ para todo } 1 \leq i; k \leq n$$

Y se redondea hacia el entero pequeño si el resultado no es un entero. Si ocurren ceros o empates en los promedios, todos deberían ser contados en determinados puntos del extremo.

En la prueba de rango con signo de Wilcoxon se usan procedimientos aplicados anteriormente en la prueba de signo,  $M_D$  es interpretado como la mediana de la diferencia  $D = X - Y$ .

Como en el caso de la prueba de signo, la estimación del intervalo de confianza de la mediana o mediana de diferencias puede ser basada sobre todas las  $n$  observaciones medianas de diferencias si hay ceros y empates. Así una prueba de hipótesis concerniente a valores para la mediana o la diferencia mediana cuando los datos contienen ceros y empates serán más poderosos si la decisión es basada en la estimación del intervalo de confianza.

### *Estadístico de prueba*

Esta prueba estadística es basada en la definición del conjunto de  $n$  rangos enteros  $\{1, 2, \dots, n\}$  y  $n$  cantidad de signos mas y menos. El rango  $i$  es asociado con un signo mas o menos de acuerdo con los signos de  $D_j : X_j - M_0$ , donde  $D_j$  ocupa la  $i$ -ésima posición en el arreglo ordenado de diferencias absolutas  $|D_j|$ . Si  $r(\cdot)$  denota el rango de una variable aleatoria, el estadístico de rango con signo de Wilcoxon puede ser escrito simbólicamente como

$$T^+ = \sum_{i=1}^n Z_i r(|D_i|) \quad T^- = \sum_{i=1}^n (1 - Z_i) r(|D_i|) \quad (2.15)$$

Donde

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } D_i > 0 \\ 0 & \text{si } D_i < 0 \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$T^+ - T^- = 2 \sum_{i=1}^n Z_i r(|D_i|) - \frac{n(n+1)}{2}$$

Bajo la hipótesis nula, los  $Z_i$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con  $P(Z_i = 1) = P(Z_i = 0) = \frac{1}{2}$  tal que  $E(Z_i) = \frac{1}{2}$  y  $\text{var}(Z_i) = \frac{1}{4}$ .

Dado que  $T^+$  en la ecuación (2.15) es una combinación lineal de estas variables, la media y la varianza bajo  $H_0$  son fáciles de determinar, tenemos

$$E(T^+ / H_0) = \sum_{i=1}^n \frac{r|D_i|}{2} = \frac{n(n+1)}{4} \quad (2.16)$$

También puesto que  $Z_i$  es independiente de  $r(|D_i|)$  bajo  $H_0$

$$\text{var}(T^+ / H_0) = \sum_{i=1}^n \frac{[r|D_i|]^2}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \quad (2.17)$$

Para determinar la región de rechazo de prueba debe obtenerse, la distribución de probabilidad de  $T^+$  bajo la hipótesis nula.

$$H_0 : \theta = P(X > M_0) = 0.5$$

Observe que los valores extremos de  $T^+$  son cero y  $\frac{n(n+1)}{2}$ , ocurren cuando todas las diferencias son del mismo signo, negativo o positivo, respectivamente. La variable aleatoria  $T^+$  está completamente determinada por la variable indicador  $Z_i$  en la ecuación (2.15). El espacio muestral puede ser considerado para el conjunto de todas las posibles  $n$ -adas  $(z_1, z_2, \dots, z_N)$  con componentes ya sea uno o cero, de los cuales hay  $2^n$   $n$ -adas en el espacio muestral. Cada uno de estos arreglos distinguibles es igualmente probable bajo  $H_0$ . Por lo tanto, la distribución de probabilidad de  $T^+$  bajo la hipótesis nula está dado por

$$P(T^+ = t) = \frac{u(t)}{2^n}$$

Donde  $u(t)$  es el número de caminos para asignar signos más y signos menos a los primeros  $n$  enteros tal que la suma de los primeros enteros positivos iguales a  $t$ . El conjugado de  $T^+$  es:

$$\sum_{i=1}^n i(1 - Z_i) = \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^n iZ_i$$

Esto se debe a que cada asignación ocurre con igual probabilidad, lo que implica que la distribución nula de  $T^+$  es simétrica alrededor de su media  $\frac{n(n+1)}{4}$ , según la ecuación (2.16).

Por la propiedad de simetría, sólo se necesita determinar la mitad de la distribución de  $T^+$  dado  $H_0$  (calcular la probabilidad de  $T^+$  a partir de la mediana hacia arriba o de la mediana hacia abajo). Un método sistemático de generar la distribución completa de  $T^+$  para  $n=4$  se muestra en la tabla 2.6, sabemos que el valor mínimo que puede tomar  $T^+$  es 0 y el valor máximo es 10, como ya se menciono anteriormente son los valores extremos, el procedimiento para encontrar el valor de  $T^+$  es el siguiente:

Paso 1: Calcular las diferencias  $D_i$ .

Paso 2: Aplicar valor absoluto a todas las diferencias.

Paso 3: Asignar los rangos de 1 hasta 4, en orden ascendente.

Paso 4: Para calcular  $T^+$  se suman los rangos que provienen de diferencias positivas.

Tabla 2.6 Rangos asociados a diferencias positivas

Valor de $T^+$	Rangos asociados con diferencias positivas	El número de muestra $u(t)$
10	1, 2, 3, 4	1
9	2, 3, 4	1
8	1, 3, 4	1
7	1, 2, 4; 3, 4	2
6	1, 2, 3; 2, 4	2
5	1, 4; 2, 3	2

$$f_{T^+}(t) = \begin{cases} \frac{1}{16} & t = 0, 1, 2, 8, 9, 10 \\ \frac{2}{16} & t = 3, 4, 5, 6, 7 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Las probabilidades para  $t = 0, 1, 2, 3$  y  $4$  se deducen del hecho que  $f_{T^+}(t)$  es simétrica alrededor de  $T = 5$ .

Las tablas pueden ser construidas en este camino para todo  $n$ . De forma similar al proceso realizado para  $n=4$ , se pueden construir las tablas de probabilidad para  $T^-$  y  $T^+$ , para cualquier  $n$ .

Un conjunto de valores críticos es suficiente para una prueba bilateral, por la relación de

$T^+ + T^- = \frac{n(n+1)}{2}$  y la simetría de  $T^+$ . Valores grandes de  $T^+$  corresponden a valores

pequeños de  $T^-$ ,  $T^+$  y  $T^-$  son idénticamente distribuidos ya que

$$\begin{aligned} P(T^+ \geq c) &= P\left[T^+ - \frac{n(n+1)}{4} \geq c - \frac{n(n+1)}{4}\right] \\ &= P\left[T^+ - \frac{n(n+1)}{4} \leq \frac{n(n+1)}{4} - c\right] \\ &= P\left[T^+ - \frac{n(n+1)}{2} \leq -c\right] \\ &= P(-T^- \leq -c) \\ &= P(T^- \geq c) \end{aligned}$$

### Regla de decisión

Dado que es más conveniente trabajar con sumas pequeñas, las tablas de los valores críticos de lado izquierdo son generalmente establecidas para la variable aleatoria  $T$ , que puede denotar

cualquier  $T^+$  ó  $T^-$  según cual sea el valor más pequeño. Si  $t_\alpha$  es el número tal que

$P(T \leq t_\alpha) = \alpha$ , las regiones de rechazo apropiadas para una prueba de tamaño  $\alpha$  de

$H_0 : M = M_0$  son las siguientes:

$T^- \leq t_\alpha$  para  $H_1 : M > M_0$ , más del 50% de diferencias positivas y  $T^-$  es el más pequeño.

$T^+ \leq t_\alpha$  para  $H_1 : M < M_0$ , más del 50% de diferencias negativas y  $T^+$  es el más

pequeño.

$T^+ \leq t_{\alpha/2}$  ó  $T^- \leq t_{\alpha/2}$  para  $H_1 : M \neq M_0$ , una de las anteriores con  $\alpha/2$  en lugar de

$\alpha$ .

Ahora supongamos que  $n = 8$  y que los valores críticos son encontrados para una o dos colas

con  $\alpha = 0.05$ . Ya que  $2^8 = 256$  y  $256(0.05) = 12.80$ , necesitamos al menos 13 casos de

asignaciones de signos, dado que son demasiadas. Enumeraremos los valores mas pequeños

de  $T^+$  en la tabla 2.7, si para  $n-1$  rangos tenemos que  $P(T \leq 6) = 14/256 \approx 0.055$ , es

decir que  $t_{0.05} = 6$  es la probabilidad de la cola izquierda (ver tabla M), trabajaremos la tabla

hasta  $T^+ = 6$ . En tabla 2.7 se sigue mismo procedimiento que en tabla 2.6.

Tabla 2.7 Rangos asociados a diferencias positivas

Valor de $T^+$	Rangos asociados con diferencias positivas	El número de muestra $u(t)$
0		1
1	1	1
2	2	1
3	3; 1, 2	2
4	4; 1, 2	2
5	5; 1, 4; 2, 3	3
6	6; 1, 5; 2, 4; 1, 2, 3	4

La tabla M da las probabilidades de la cola derecha y la cola izquierda de  $T^+$  (ó  $T^-$ ) para  $n \leq 15$ . De una generalización del teorema de límite central, la distribución asintótica de  $T^+$  es la normal. Por consiguiente, usando los momentos dados en la ecuación (2.15), la distribución de

$$Z = \frac{4T^+ - n(n+1)}{\sqrt{2n(n+1)\frac{2n+1}{3}}} \quad (2.18)$$

Se aproxima a la normal estándar cuando  $n \rightarrow \infty$ . La prueba para  $H_1 : M > M_0$  puede ser realizada para  $n$  grande por cálculos de la ecuación (2.18) y rechazando  $H_0$  para  $Z \geq z_{1-\alpha}$ . La aproximación es generalmente adecuada para  $n$  de 16 en adelante. Una corrección de continuidad de 0.5 puede ser usada.

### Función potencia

La distribución de  $T^+$  es aproximadamente normal para muestras grandes a pesar de que la hipótesis nula sea cierta. La distribución de  $D$  bajo la alternativa necesitaría ser especificado para calcular las probabilidades.

La distribución de probabilidad de  $T^+$  no es simétrica cuando la hipótesis nula no es verdadera. Adicionalmente,  $T^+$  y  $T^-$  no son idénticamente distribuidos cuando la hipótesis nula no es verdadera. Todavía podemos encontrar la distribución de probabilidad de  $T^-$  a partir de  $T^+$ , cuando la hipótesis nula es falsa, utilizando la relación

$$P(T^- = k) = P\left[\frac{N(N+1)}{2} - T^+ = k\right] \quad (2.19)$$

### Procedimiento de muestras apareadas

Los datos consisten de  $n'$  observaciones  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n'}, y_{n'})$  en las variables aleatorias bivariadas respectivamente  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_{n'}, Y_{n'})$ , las diferencias absolutas (sin considerar un signo).

$$|D_i| = |Y_i - X_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n'$$

Son calculados para cada uno de los  $n$  pares  $(X_i, Y_i)$ .

Se omiten las consideraciones para todo par con una diferencia de cero (es decir, donde  $X_i$  igual  $Y_i$  o  $D_i = 0$ ).

Rangos de 1 a  $n$  son asignados a estos  $n$  pares apropiados para los tamaños relativos de la diferencia absoluta, son los siguientes:

El rango 1 es dado al par  $(X_i, Y_i)$  que tienen la diferencia absoluta  $|D_i|$  más pequeña; el rango 2 es dado al par con el segundo pequeño de las diferencias absolutas, y así, con el rango  $n$  será asignado al par con el mayor de las diferencias absolutas.

Si varios pares tienen diferencias absolutas que son iguales entre sí, asignamos a cada uno de esos pares el promedio de los rangos (esto es, si los rangos, 3, 4, 5 y 6 son parte de los 4 pares, pero no conocen que rango son asignados a cada par porque las 4 diferencias absolutas son exactamente iguales a cada uno, asignan el promedio rango  $(1/4)(3 + 4 + 5 + 6) = 4.5$  a cada uno de estos 4 pares.

Las suposiciones que se hacen para muestras apareadas son las siguientes:

- 1.- El  $D_i$  es una variable aleatoria.
- 2.- La distribución de  $D_i$  es simétrica.
- 3.- Los  $D_i$  son mutuamente independientes.
- 4.- Los  $D_i$  tienen la misma mediana.
- 5.- La escala de medida de los  $D_i$  es al menos de intervalo.

### Hipótesis de prueba

La mediana de los  $D_i$  es denotada por  $d_{0.50}$ . Entonces la hipótesis puede ser denotada de varias formas, dependiendo si la prueba es de una cola o de dos colas.

A. Prueba de cola derecha.

$$H_0 : d_{0.50} \leq 0$$

$$H_1 : d_{0.50} > 0$$

## Capítulo II

---

La hipótesis alternativa denota: “Los valores de los  $X_i$  tienden a ser más pequeños que los valores de los  $Y_i$ ”.

B. Prueba de cola izquierda.

$$H_0 : d_{0.50} \geq 0$$

$$H_1 : d_{0.50} < 0$$

La hipótesis alternativa denota: “Los valores de los  $X_i$  que tienden a ser mayores que los valores de los  $Y_i$ ”.

C. Prueba de dos colas

$$H_0 : d_{0.50} = 0$$

$$H_1 : d_{0.50} \neq 0$$

Otras suposiciones de hipótesis, que son alternativas a las mencionadas anteriormente son las siguientes:

A.  $H_0 : E(X) \geq E(Y)$

$$H_1 : E(X) < E(Y)$$

B.  $H_0 : E(X) \leq E(Y)$

$$H_1 : E(X) > E(Y)$$

C.  $H_0 : E(X) = E(Y)$

$$H_1 : E(X) \neq E(Y)$$

En caso de A, B y C originalmente dados si  $E(X)$  y  $E(Y)$  existen.

### Estadístico de prueba

El estadístico de prueba  $T$  es igual a la suma de rangos asignados a estos pares  $(X_i, Y_i)$  donde  $Y_i$  excede a  $X_i$ . Es decir,  $R_i$  se define para cada par  $(X_i, Y_i)$  de la siguiente forma:

$R_i = 0$ , si  $X_i > Y_i$  ( $D_i$  es negativo);  $R_i =$  el rango asignado a  $(X_i, Y_i)$ , si  $X_i < Y_i$  ( $D_i$  es positivo)

Donde el estadístico de prueba  $T$  puede ser escrito como

$$T = \sum_{i=1}^n R_i$$

### Regla de decisión

La regla de decisión puede ser expresada de tres formas diferentes, correspondientes a los tres conjuntos de hipótesis, A, B y C. Sea  $w_p$  el  $p$ -ésimo cuantil, obtenido por la tabla N, entonces las reglas de decisión son las siguientes:

A) Prueba de una cola a la derecha: Valores altos de  $T$  indica que  $H_0$  es falsa, se rechaza  $H_0$  con un nivel de significancia  $\alpha$  si  $T$  excede  $w_{1-\alpha}$ . Se acepta  $H_0$  si  $T$  es menor o igual a  $w_{1-\alpha}$ .

B) Prueba de una cola a la izquierda: Valores pequeños de  $T$  indica que  $H_0$  es falsa, se rechaza  $H_0$  con un nivel de significancia  $\alpha$  si  $T$  es menor que  $w_\alpha$ . Se acepta  $H_0$  si  $T$  es mayor o igual a  $w_\alpha$ .

C.) Prueba de dos colas: Se rechaza  $H_0$  con un nivel de significancia  $\alpha$  si  $T$  excede  $w_{1-\alpha/2}$  o si  $T$  es menor que  $w_{\alpha/2}$ . Si  $T$  está entre  $w_{\alpha/2}$  y  $w_{1-\alpha/2}$ , o igual a cualquier cuantil, se acepta  $H_0$ .

**Ejemplo 2.14**

A doce conjuntos de gemelos idénticos se les aplican pruebas psicológicas, se ha determinado que los primogénitos tienden a ser más agresivos que el segundo. Los resultados son los siguientes, donde los resultados superiores marcan ser más agresivos.

Conjunto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Primeros en nacer $X_i$	86	71	77	68	91	72	77	91	70	71	88	87
Segundos en nacer $Y_i$	88	77	76	64	96	72	65	90	65	80	81	72
Diferencias $D_i$	+2	+6	-1	-4	+5	0	-12	-1	-5	+9	-7	-15
Rangos de $ D_i $	3	7	1.5	4	5.5	-	10	1.5	5.5	9	8	11
$R_i$	3	7	0	0	5.5	-	0	0	0	9	0	0

Solución:

Las hipótesis son:

$H_0$  : El primogénito de los gemelos no tiende a ser más agresivos. ( $d_{0.50} \geq 0$ )

$H_1$  : El primogénito de los gemelos tiende a ser más agresivos. ( $d_{0.50} < 0$ )

Este corresponde al conjunto de hipótesis B, asumimos que la prueba marca las medidas correctas de las agresividades de los individuos. El estadístico de prueba es  $T = \sum_{i=1}^{11} R_i = 24.5$

La región crítica (ver regla de decisión B) de tamaño  $\alpha = 0.05$  corresponde a valores de  $T$  menores que 14 (para la tabla N, con  $n = 11$ ). Por tanto  $H_0$  se acepta.

## Capítulo II

Los cuantiles  $w_{0.20}$  y  $w_{0.30}$  son dados en la tabla N son 23 y 27 respectivamente. El valor observado 24.5 está entre 23 y 27, y el valor de  $\hat{\alpha}$  está dado por:

$$\hat{\alpha} \cong 0.20 + (0.30 - 0.20) \frac{24.5 - 23}{27 - 23} = 0.2375$$

### Ejemplo 2.15

Treinta observaciones de una variable aleatoria  $X$  son obtenidas para probar la hipótesis que  $E(X)$  (el promedio de  $X$ ), no es mayor que 30 (conjunto B de hipótesis).

$$H_0 : E(X) \leq 30$$

$$H_1 : E(X) > 30$$

Las observaciones, las diferencias  $m - X_i$ , y los rangos de los pares son los siguientes. (la muestra aleatoria son ordenadas primero, por conveniencia).

$X_i$	$D_i = 30 - X_i$	Rangos de $ D_i $	$X_i$	$D_i = 30 - X_i$	Rangos de $ D_i $
23.8	+6.2	17	35.9	-5.9	15
26.0	+4.0	11	36.1	-6.1	16
26.9	+3.1	8	36.4	-6.4	18
27.4	+2.6	6	36.6		
28.0	+2.0	5	37.2		
30.3	-0.3	1	37.3		
30.7	-0.7	2	37.9		
31.2	-1.2	3	38.2		
31.3	-1.3	4	39.6		
32.8	-2.8	7	40.6		
33.2	+3.2	9	41.1		
33.9	-3.9	10	42.3		
34.3	-4.3	12	42.8		
34.9	-4.9	13	44.0		
35.0	-5.0	14	45.8		

En esto no es necesario calcular las diferencias y rangos.

Solución:

La aproximación del cuantil 0.05 es obtenido en la tabla N:

$$\begin{aligned}
 w_{0.05} &\cong \frac{n(n+1)}{4} + x_{0.05} \sqrt{n(n+1)(2n+1)/24} \\
 &= \frac{30(31)}{4} + (-1.645) \sqrt{30(31)(61)/24} \\
 &= 232.5 - (-1.645)(48.6) \\
 &= 152.6
 \end{aligned}$$

Por tanto la región crítica de aproximación 0.05 corresponde a valores del estadístico de prueba menores que 152.6.

Dado que el valor de  $T = 47$  (ver tabla N, para  $w_{\alpha/2}$  y  $n = 19$ ), se rechaza  $H_0$  y se concluye que la media de  $X$  es mayor que 30.

El nivel crítico aproximado es encontrado al resolver la ecuación

$$47 = 232.5 + x_{\hat{\alpha}}(48.6)$$

Despejando  $x_{\hat{\alpha}} = -3.82$

### Intervalos de confianza para la mediana

Los datos consisten en  $n'$  observaciones  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n'}, y_{n'})$  de la variable aleatoria bivariadas  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_{n'}, Y_{n'})$  respectivamente, las diferencias se calculan.

$$D_i = Y_i - X_i$$

Para cada par y arreglo, en orden de: los pequeños (la mayoría de negativos) a los mayores (la mayoría de positivos), se denota como sigue

$$D^{(1)} \leq D^{(2)} \leq \dots \leq D^{(n-1)} \leq D^{(n)}$$

En la situación usual, los datos consisten de una muestra aleatoria simple  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , arreglados en orden ascendente. Tenemos que encontrar un intervalo de confianza para las medianas (medias) más comunes de los  $D_i$  constituyendo una muestra aleatoria.

**Método A (gráficamente).** Se denota la diferencia  $D_i$  por puntos a lo largo de una escala vertical, dado en la figura 1. La diferencia mayor es denotada por el punto de la parte superior, llamado punto A, y la diferencia menor es denotada por el punto B, al punto intermedio entre A y B, llamamos C. Trazamos una línea horizontal pasando por el punto C. En algún punto de la línea horizontal, no importando donde, se selecciona un punto y le llamamos D. (ver figura 2). Trace la línea para formar el segmento que va de A a D y para B a D, formando un triángulo isósceles. Trace los segmentos de línea hacia abajo para cada punto, paralelo a la línea del segmento BD. Trace ahora los segmentos de línea para cada punto, paralelo a AD. Coloque un

punto en cada intersección de una línea superior con una línea inferior, dada en la figura 2. Una forma de triángulo puede ser usado por conveniencia en el trazado.

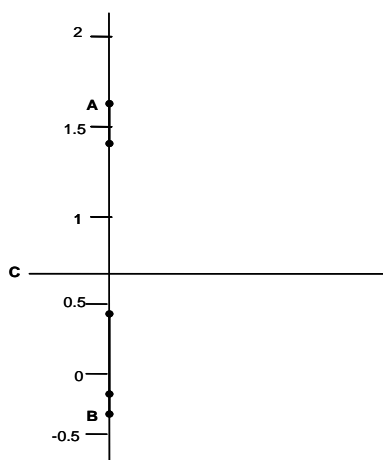


Figura 1

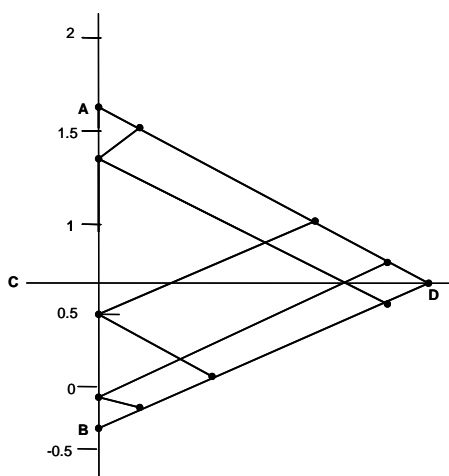


Figura 2

Dado que  $1 - \alpha$  es el coeficiente aproximado de confianza deseado. Para la tabla 7 obtenemos el cuantil  $\alpha/2$  de  $T$ ,  $w_{\alpha/2}$ . Enumerar hacia abajo del punto máximo en la figura para el  $w_{\alpha/2}$ -ésimo punto, incluyendo el punto superior y los otros puntos en la línea vertical. Trazar una línea horizontal a través el punto  $w_{\alpha/2}$ -ésimo. La intercepción de la primera línea con la línea vertical es marcada con U, y representa el límite superior para el intervalo de confianza. Trace ahora la línea horizontal, a través del  $w_{\alpha/2}$ -ésimo punto hasta el final. Esta línea intercepta el eje vertical con el punto llamado L, que representa el límite inferior. (Si  $\alpha/2$  es igual a cero no pueden ser encontrados los intervalos de confianza para valores de  $\alpha$ ) entonces el intervalo para L a U, incluyen los puntos finales L y U, es un intervalo de confianza  $1 - \alpha$  para la mediana conocida de los  $D_i$ . Ver figura 3 para una ilustración, donde  $w_{\alpha/2}$  es igual a 3.

Si dos o más diferencias son iguales, resulta necesario contar cada punto en el gráfico un número correspondiente de veces. Especificando, entonces si son  $t$  diferencias exactamente iguales a algún número  $d$ , cada punto en la línea del segmento extendido para  $d$  es contado  $t$  veces, y los puntos en el eje vertical contando  $t(t + 1)/2$  veces.

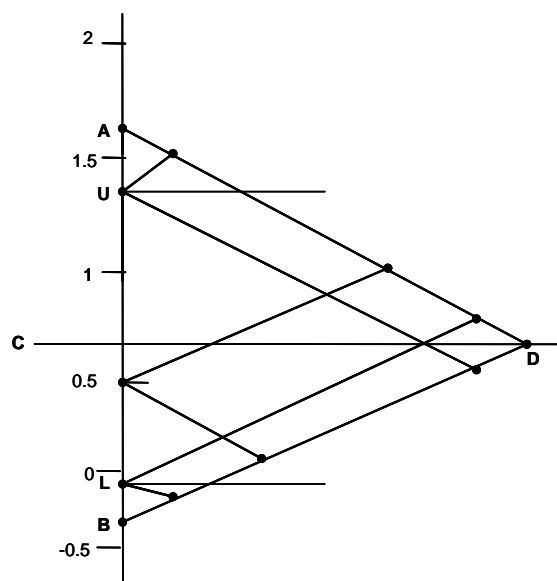


Figura 3

### Método B (algebraico)

Para obtener un intervalo de confianza  $1 - \alpha$ , obtenemos el cuantil  $w_{\alpha/2}$  para la tabla N. (Si  $w_{\alpha/2}$  es igual a cero no puede ser obtenido el intervalo de confianza para el valor de  $\alpha$ ). Entonces consideremos los  $n(n+1)/2$  posibles promedios  $(D_i + D_j)/2$  para todo  $i$  e  $j$ , incluidos  $i = j$ . El  $w_{\alpha/2}$  -ésimo mayor de los promedios contados en forma ascendente, y los  $w_{\alpha/2}$  -ésimo de los promedios contados en forma descendente constituye el límite superior e inferior para los intervalos de confianza del  $(1 - \alpha)100$ . No es necesario calcular todos  $n(n+1)/2$  promedios; solo se necesita calcular los promedios mayores y los menores para obtener un intervalo de confianza.

### El uso del estadístico de Wilcoxon para probar la simetría

El estadístico de rango con signo de Wilcoxon también puede ser considerada para una prueba de simetría, suponiendo que la muestra aleatoria es tomada de una distribución continua. Si la hipótesis nula afirma que la población es simétrica con mediana  $M_0$ , la distribución nula de  $T^+$  y  $T^-$  es exactamente igual a la deducida en el apartado de estadístico de prueba. Si la hipótesis nula es aceptada, puede concluirse que la población es simétrica y tiene mediana  $M_0$ . Por otro lado, si la hipótesis nula es rechazada, no podemos decir cuál porción (o toda) de la afirmación compuesta no es consistente con el resultado de la muestra. Con una alternativa bilateral, por ejemplo, debemos concluir que la población es simétrica con mediana no igual a  $M_0$ , o la población es asimétrica con mediana igual a  $M_0$ , o la población es asimétrica con

mediana no igual  $M_0$ . Una conclusión tan amplia no es generalmente satisfactoria, y es por esto que la mayoría de veces las suposiciones que justifican un procedimiento de prueba son separadas de la afirmación de la hipótesis nula.

### Ejemplo 2.11

El dueño de una compañía grande esta preocupado al conocer el número de horas perdida por persona que se acumula debido a los accidentes de la planta, y ha instituido un programa extensivo de seguridad industrial. Los datos a continuación muestran el número de horas pérdidas por persona en el mes en cada uno de las ocho plantas diferentes antes y después que el programa de seguridad fue establecido. ¿El programa de seguridad ha sido efectivo en reducir el tiempo perdido de accidentes? Asumir que la distribución de diferencias es simétrica

Planta	Antes	Después
1	51.2	45.8
2	46.5	41.3
3	24.1	15.8
4	10.2	11.1
5	65.3	58.5
6	92.1	70.3
7	30.3	31.6
8	49.2	35.4

### Solución:

Por la suposición de simetría, podemos usar la prueba de rango con signo de Wilcoxon en lugar de la prueba del signo sobre estos datos. Tomamos las diferencias  $D = \text{Antes} - \text{después}$  y la prueba  $H_0 : M_D = 0$  versus  $H_1 : M_D > 0$  diremos que el programa es efectivo si estas diferencias son números positivos grandes. Luego ordenamos por rango los valores absolutos y los rangos de diferencias positivas se suman. La tabla que se presenta a continuación muestra este cálculo.

Planta	$D$	$ D $	$r( D )$
1	5.4	5.4	4
2	5.2	5.2	3
3	8.3	8.3	6
4	-0.9	0.9	1
5	6.8	6.8	5
6	21.8	21.8	8
7	-1.3	1.3	2
8	13.8	13.8	7

Tenemos  $T^+ = 33$  y la tabla M para  $N = 8$  da la probabilidad de la cola derecha que es  $P(T^+ \geq 33) = 0.02 = P\text{-valor}$  y dado que es menor que 0.05 se rechaza  $H_0$ , concluimos que el programa de seguridad ha sido efectivo a un nivel de 0.05.

### 2.5.3 Prueba de Kruskal-Wallis para hacer análisis de varianza unifactorial.

La prueba de Kruskal-Wallis es la extensión natural de la prueba de Wilcoxon para localización con dos muestras independientes para la situación de  $k$  muestras mutuamente independientes de poblaciones de función de distribución continuas.

Suponemos para esta prueba que:

1. Cada muestra es tomada aleatoriamente de su respectiva población.
2. Además la independencia dentro de cada muestra, las muestras son mutuamente independientes.
3. Toda variable  $X_{ij}$  son continuas. (se tolera un número moderado de empates).
4. La escala de medida es al menos ordinal.
5. Las funciones de distribución de las  $k$  poblaciones son idénticas, o algunas de las poblaciones tiende a tener valores más grandes que otras poblaciones.

#### Hipótesis de prueba

$H_0$ : Todas las  $k$  funciones de distribución son idénticas.

$H_1$ : Al menos una de las poblaciones tiende a tener observaciones más grandes que otra de las poblaciones.

Ya que la prueba de Kruskal-Wallis esta diseñada para ser sensitiva contra diferencias entre medias en las  $k$  poblaciones, la hipótesis alternativa es como sigue:

$H_1$ : Las  $k$  poblaciones no tienen medias idénticas.

**Estadístico de prueba**

Los datos consisten de  $k$  muestras aleatorias de posibles diferentes tamaños. Denotada la  $i$ -ésima muestra aleatoria de tamaño  $n_i$  por  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$ , entonces los datos pueden ser arreglados en las siguientes columnas:

Muestra 1	Muestra2	...	Muestra $k$
$X_{1,1}$	$X_{2,1}$		$X_{k,1}$
$X_{1,2}$	$X_{2,2}$		$X_{k,2}$
...	...		...
$X_{1,n_1}$	$X_{2,n_2}$		$X_{k,n_k}$

Sea  $N$  el número total de observaciones:

$$N = \sum_{i=1}^k n_i$$

Se asigna el rango 1 a la observación más pequeña de totales de las  $N$  observaciones, rango 2 para la segunda más pequeño, y así hasta la más grande de las  $N$  observaciones, que recibe el rango  $N$ .

Sea  $R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R(X_{ij})$   $i = 1, 2, \dots, k$ , calculando  $R_i$  para cada muestra.

Los rangos pueden ser asignados de varias formas diferentes porque hay observaciones que son iguales entre si, asignando rangos promedios para las observaciones empatadas, como en las pruebas anteriores.

De acuerdo a lo anterior el estadístico de prueba  $H$  es como sigue:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \left[ R_i - \frac{n_i(N+1)}{2} \right]^2 \\
 &= \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Los valores críticos de los  $P$  valores son encontrados en la tabla O para  $k = 3$ , y  $n_i \leq 5$ . Este estadístico es asintóticamente distribuido como una ji-cuadrado con  $k - 1$  grados de libertad; la

aproximación es generalmente satisfactoria excepto con  $k = 3$  y los tamaños de muestra son cinco o menos, por consiguiente usaremos la tabla B cuando no sea posible usar la tabla O.

De acuerdo con la hipótesis nula, los  $n_i$  elementos en la columna  $i$  fueron seleccionados al azar del conjunto  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Ellos actualmente constituyen una muestra aleatoria de tamaño  $n_i$  extraído sin reposición de las poblaciones finitas consistentes de los primeros  $N$  enteros. La media y la varianza de esta población son

$$\mu = \sum_{i=1}^N \frac{i}{N} = \frac{N+1}{2} \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\left[ i - \frac{N+1}{2} \right]^2}{N} = \frac{N^2 - 1}{12}$$

La suma promedio de rangos para la  $i$ -ésima columna,  $\bar{R}_i = \frac{R_i}{n_i}$  es la media de esta muestra aleatoria, y por lo que respecta a cualquier media de la muestra de una población finita

$$E(\bar{R}_i) = \mu \qquad \text{var}(\bar{R}_i) = \frac{\sigma^2(N - n_i)}{n_i(N - 1)}$$

Aquí tenemos

$$E(\bar{R}_i) = \frac{N+1}{2} \qquad \text{var}(\bar{R}_i) = \frac{(N+1)(N - n_i)}{12n_i} \qquad \text{cov}(\bar{R}_i, \bar{R}_j) = -\frac{N+1}{12}$$

Dado que  $\bar{R}_i$  es una media muestral, si  $n_i$  es grande, el teorema de límite central permite aproximar a la distribución de

$$Z_i = \frac{\bar{R}_i - \frac{N+1}{2}}{\sqrt{\frac{(N+1)(N - n_i)}{12n_i}}}$$

por la normal estándar. Consecuentemente  $Z_i^2$  se distribuye aproximadamente como ji-cuadrada con un grado de libertad. Esto tiene aplicación para  $i = 1, 2, \dots, k$ , pero los  $Z_i$  son claramente variables aleatorias no independientes ya que  $\sum_{i=1}^k n_i \bar{R}_i = \frac{N(N+1)}{2}$ , una constante.

Kruskal (1952) muestra que bajo  $H_0$ , si  $n_i$  no es muy pequeño, la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^k \frac{N - n_i}{N} Z_i^2 = \sum_{i=1}^k \frac{12n_i \left[ \bar{R}_i - \frac{N+1}{2} \right]^2}{N(N+1)} = H \qquad (2.21)$$

Se distribuye aproximadamente como ji-cuadrada con  $k - 1$  grados de libertad.

El valor de  $t$  representa el número de empates presentes en la muestra, dicho valor será encontrado usando el método de rangos promedio. La varianza de la población finita, haciendo uso de la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = \frac{N^2 - 1}{12} - \frac{\sum t(t^2 - 1)}{12}$$

Donde la suma es sobre todos los conjuntos de empates de la población, y esta expresión puede ser usada en  $\text{var}(\bar{R}_i)$  para el denominador de  $Z_i$ . En este caso de ecuación (2.21) es adecuado que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \frac{N - n_i}{N} \left[ \frac{\left[ \bar{R}_i - \frac{N(N+1)}{2} \right]^2}{\frac{(N+1)(N-n_i)}{12n_i} - \frac{N-n_i}{n_i(N-1)} \frac{\sum t(t^2-1)}{12}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{12n_i \left[ \bar{R}_i - \frac{N(N+1)}{2} \right]^2}{N(N+1) - \frac{N \sum t(t^2-1)}{N-1}} = \frac{H}{1 - \frac{\sum t(t^2-1)}{N(N^2-1)}} \end{aligned}$$

### Ejemplo 2.15

El cuerpo administrativo del hospital psiquiátrico preocupado con el tipo de tratamiento para un tipo particular de desorden mental. Una bacteria de prueba administrada para todos los pacientes delineados en un grupo de 40 pacientes que fueron similares con respecto al diagnóstico y también con respecto a la personalidad, inteligencia, factores psicológicos y descriptivos. Estas personas estaban divididas al azar en cuatro grupos diferentes de 10 cada uno para el tratamiento. Por seis meses los grupos respectivos reciben (1) electrochoque, (2) psicoterapia, (3) electrochoque más psicoterapia y (4) ningún tipo de tratamiento. Al final de este período la serie de exámenes fue repetida en cada paciente. El único tipo de medida posible para ésta prueba es una ordenación por rango a los 40 pacientes con base en su grado relativo de mejora al final del período de tratamiento; rango 1 indica el nivel más alto de mejora, rango 2 el segundo más alto, rango 3 el tercer más alto y así sucesivamente. En base a los datos de la siguiente tabla, ¿se aparenta estar en cualquier diferencia en la efectividad de los tipos de tratamiento?

Grupos				
	1	2	3	4
	19	14	12	38
	22	21	1	39
	25	2	5	40
	24	6	8	30
	29	10	4	31
	26	16	13	32
	37	17	9	33
	23	11	15	36
	27	18	3	34
	28	7	20	35
Suma $R$	260	122	90	348

Solución:

Los datos son rangos alrededor de 1 a 40 así que solo necesitamos calcular  $H$  con  $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 10$ . El resultado es

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) \frac{12}{40(41)} \left[ \frac{260^2}{10} + \frac{122^2}{10} + \frac{90^2}{10} + \frac{348^2}{10} \right] - 3(41) = 31.89$$

Con tres grados de libertad. El  $P$ -valor de la tabla B es  $P < 0.001$ , de esta manera rechazamos la hipótesis nula que los cuatro parámetros de posición (medias o medianas correspondientes a las cuatro muestras) son los mismos, es decir las  $k = 4$  poblaciones tiene promedio de posición diferentes.

#### 2.5.4 Prueba de cuantiles

La prueba binomial puede ser usada en pruebas de hipótesis de los cuantiles de una variable aleatoria. La escala de medida es al menos ordinal aunque la prueba binomial solamente requiere escala nominal débil para estas medidas.

Suponemos para esta prueba que:

1. Los  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  son una muestra aleatoria (es decir, las variables aleatorias son independientes e idénticamente distribuidas).
2. La escala de medida de los  $X_i$  son a lo mínimo ordinales.

#### Hipótesis de prueba

Las hipótesis pueden tomar una de las siguientes formas:

A. (Prueba de dos colas)

$$H_0 : \text{El } p^* \text{-ésimo cuantil poblacional de } X \text{ es } x^*$$

(Esto es equivalente a  $H_0 : P(X \leq x^*) \geq p^*$  y  $H_0 : P(X < x^*) \leq p^*$ , donde  $0 < p^* < 1$  y  $X$  tiene alguna distribución igual a los de los  $X_i$  en la muestra aleatoria).

$$H_1 : x^* \text{ no es el } p^* \text{-ésimo cuantil poblacional de } X .$$

(Esto es equivalente a  $H_1 : P(X \leq x^*) < p^*$  o  $H_0 : P(X < x^*) > p^*$ )

B. (Prueba de una cola)

$$H_0 : \text{El } p^* \text{-ésimo cuantil poblacional es mayor o igual que } x^*$$

(Esto es equivalente a  $H_0 : P(X < x^*) \leq p^*$ )

$$H_1 : \text{El } p^* \text{-ésimo cuantil poblacional es menor que } x^* .$$

(Esto es lo mismo a  $P(X < x^*) > p^*$ )

C. (Prueba de una cola)

$$H_0 : \text{El } p^* \text{-ésimo cuantil poblacional no son mayores que } x^*$$

(o  $H_0 : P(X \leq x^*) \geq p^*$ )

$$H_1 : \text{El } p^* \text{-ésimo cuantil poblacional es mayor que } x^* .$$

(o  $H_1 : P(X \leq x^*) < p^*$ )

Ahora bien, para el estadístico de prueba, usaremos dos estadísticas experimentales en esta prueba. Sea  $T_2$  igual al número de observaciones menores que  $x^*$  y sea  $T_1$  igual al número de observaciones menores o iguales que  $x^*$ . Luego  $T_1$  igual a  $T_2$  si ninguno de los números en el dato corresponden a  $x^*$ . De otra manera  $T_1$  es mayor que  $T_2$ .

### Regla de decisión

Las diferentes reglas de decisión, correspondientes a las hipótesis A, B o C, son dadas a continuación.

A. (Pruebas de dos colas) La región crítica corresponde a valores de  $T_2$  que son demasiado grande (indicando posiblemente que  $P(X < x^*)$  es mayor que  $p^*$ ) y a valores de  $T_1$  que son también pequeños (indicando que  $P(X \leq x^*)$  es menor que  $p^*$ ). La región crítica es encontrada en la tabla K con muestras de tamaño  $n$  y las hipótesis de probabilidad  $p^*$ , como en las pruebas binomiales para dos colas. Encontrando el número  $t_1$  tal que

$$P(Y \leq t_1) = \alpha_1$$

donde  $Y$  tiene la distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p^*$ , y donde  $\alpha_1$  se acerca a la mitad

del nivel de significancia solicitado  $\alpha$ . Luego encontramos el número  $t_2$  tal que

$$P(Y > t_2) = \alpha_2$$

o, equivalente

$$P(Y \leq t_2) = 1 - \alpha_2$$

donde  $\alpha_2$  se elige con el fin de que la suma  $\alpha_1 + \alpha_2$  este cerca o igual al nivel de significancia.

Rechazamos  $H_0$  si  $T_1$  es menor o igual que  $t_1$ , o si  $T_2$  es mayor que  $t_2$ . De otra manera aceptamos  $H_0$ .

B. (Prueba de una cola) Para valores grandes de  $T_2$  implica que  $H_0$  es falso, se ingresa a la Tabla K las muestras de tamaño  $n$  y las hipótesis  $p^*$  como  $p$ . Encontrando el número  $t_2$  tal que

$$P(Y > t_2) = \alpha \quad \text{que es el mismo para } P(Y \leq t_2) = 1 - \alpha$$

Para algún nivel de significancia aceptable  $\alpha$ . Entonces rechazamos  $H_0$  si  $T_2$  excede a  $t_2$ .

Aceptamos  $H_0$  si  $T_2$  es menor o igual que  $t_2$ .

C. (Prueba de una cola) Para valores pequeños de  $T_1$  se indica que  $H_0$  es falso, así que accedemos a la tabla K con muestras de tamaño  $n$  y la probabilidad especificada  $p^*$ , encontramos  $t_1$  tal que

$$P(Y \leq t_1) = \alpha$$

Para un nivel aceptable  $\alpha$ , donde  $Y$  tiene una distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p^*$ .

Rechazamos  $H_0$  si  $T_1$  es menor o igual que  $t_1$ . Aceptando  $H_0$  si  $T_1$  excede  $t_1$ .

### Ejemplo 2.12

Estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, toman un examen previo en bachillerato, esto se ha realizado por muchos años, y el cuartil superior es pre-establecido en una puntuación de 193. Un bachillerato particular manda quince de sus graduados para una universidad, donde toman el examen y obtienen puntuaciones de

189    233    195    160    212

176	231	185	199	213
202	193	174	166	248

Es asumido que estos quince estudiantes representan una muestra aleatoria de todos los estudiantes de ese bachillerato que luego ingresarán a la universidad. Una forma de comparar estudiantes universitarios de ese bachillerato con otros estudiantes de universidad es para probar la hipótesis que las puntuaciones citadas anteriormente vienen de una población cuyo cuartil superior es 193.

**Solución:**

Las hipótesis de prueba son:

$H_0$  : El cuartil superior es 193.

$H_1$  : El cuartil superior no es 193.

Donde nos referimos al cuartil superior de las pruebas de las puntuaciones experimentales de todos los estudiantes de universidad de ese bachillerato, es decir, pasado, presente, o el futuro.

Es aplicada la prueba de cuantiles para dos colas. Una región crítica de tamaño aproximado 0.05 es obtenido accediendo a la tabla K con  $n = 15$  y  $p = 0.75$ . Por ende es visto que, para la variable aleatoria binomial  $Y$ .

$$P(Y \leq 7) = 0.0173 \quad \text{y} \quad P(Y \leq 14) = 0.9866 = 1 - 0.0134$$

La región crítica de tamaño  $\alpha = 0.0173 + 0.0134 = 0.0307$

Corresponde a valores de  $T_1$  menores o iguales que  $t_1 = 7$ , y valores de  $T_2$  mayores que  $t_2 = 14$ .

En este ejemplo  $T_1$  es igual a siete, el número de observaciones menores o iguales que 193, y  $T_2$  iguales a seis, dado que una observación es exactamente igual a 193.

Por consiguiente  $T_1$  es también pequeño, y  $H_0$  es rechazada. El cuartil superior para estudiantes de bachillerato en particular no parece que sea 193. Porque los valores observados de este estadístico de prueba  $T_1$  estuvo apenas en la región de rechazo, el nivel de significancia es una parte pequeña que podría resultar en rechazo de  $H_0$ . Entonces el nivel crítico en este ejemplo es igual a 0.0307, es el mismo para el nivel de significancia.

La prueba de cuantiles para una cola, con muestras aproximadamente grandes, es ilustrado en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.13**

El periodo intermedio de tiempo entre erupciones del antiguo géiser Fiable es archivado 112 veces para ver si el periodo intermedio es menor o igual que 60 minutos (la hipótesis nula) o ya sea el periodo intermedio es mayor que 60 minutos (la hipótesis alternativa). Si la mediana del intervalo es 60, entonces 60 es  $x_{0.50}$  o la mediana. Si el intervalo de la mediana es menor que 60, entonces 60 es un  $p$  cuantil para algún  $p \geq 0.50$ . Así  $H_0$  es  $P(X \leq 60) \geq 0.50$  y  $H_1$  es  $P(X \leq 60) < 0.50$ , donde  $X$  es el espacio de tiempo entre erupciones. Asumiendo que varios intervalos son independientes e idénticamente distribuidos, la prueba de cuantiles para una cola puede ser usada, con la regla de decisión C. El estadístico de prueba  $T_1$  es igual al número de intervalos que son menores o iguales que 60 minutos, y la región crítica de tamaño 0.05 corresponde a valores de  $T_1$  menores que

$$\begin{aligned} t_1 &= np^* + w_{0.05} \sqrt{np^*(1-p^*)} \\ &= (112)(0.50) - (1.645) \sqrt{(112)(0.50)(0.50)} \\ &= 47.3 \end{aligned}$$

De los 112 intervalos de tiempo, 8 son 60 minutos o menos, para  $T_1$  igual a 8 y  $H_0$  es completamente rechazada a favor de la alternativa “El espacio de tiempo mediano entre erupciones es mayor que 60 minutos”. El nivel crítico es

$$\hat{\alpha} = P(T_1 \leq 8) = P\left(\frac{T_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{8 - np}{\sqrt{npq}}\right) \cong P\left(Z \leq \frac{8 - (112)(0.50)}{\sqrt{(112)(0.50)(0.50)}}\right)$$

Donde  $Z$  es una variable aleatoria estandarizada. Entonces para la tabla A,

$$\hat{\alpha} \cong P\left(Z \leq \frac{-48}{5.3}\right) = P(Z \leq -9.05) \ll 0.0001$$

Que se lee “mucho menor que 0.0001”.

**Intervalos de confianza para un Cuantil.**

Los datos consisten en observaciones de variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , que son independientes e idénticamente distribuidos.. Dado que  $X^{(1)} \leq X^{(2)} \leq \dots \leq X^{(r)} \leq X^{(s)} \leq \dots \leq X^{(n)}$  representan la muestra ordenada, donde  $1 \leq r < s \leq n$ . Deseamos encontrar un intervalo de confianza para los  $p^*$ -ésimos (desconocidos) cuantiles, donde  $p^*$  es algún número específico entre cero y uno.

Suponemos que

1. La muestra  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una muestra aleatoria.
2. La escala de medida de los  $X_i$ 's es por lo menos ordinal.

**Método A (muestras pequeñas).**

Para  $n \leq 20$  la Tabla K puede ser usada para encontrar  $r$  y  $s$ . Utilizamos la Tabla K con las muestras aleatorias de tamaño  $n$  y las probabilidades  $p = p^*$ . Se busca en la columna para  $p = p^*$  hasta que se cumpla una aproximación igual a  $\alpha/2$ , donde  $1 - \alpha$  es el coeficiente de confianza deseado. Llamamos aquellos  $\alpha_1$ , y los correspondientes valores de  $y$  (a la distancia izquierda de  $\alpha_1$ ) es  $r - 1$ . Sumamos 1 hasta  $r$ . Entonces continuamos debajo de la columna para  $p = p^*$  hasta alcanzar una aproximación igual  $1 - (\alpha/2)$ , podremos llamar  $1 - \alpha_2$ . Los valores de  $y$  correspondientes a la entrada  $1 - \alpha_2$  es llamada  $s - 1$ , y 1 es sumado para obtener  $s$ . De esta manera determinamos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $r$  y  $s$ .

El coeficiente de confianza exacto es  $1 - \alpha_1 - \alpha_2$ . El intervalo estimado es el intervalo entre  $X^{(r)}$  y  $X^{(s)}$ , de quienes los valores pueden ser obtenidos para los datos. Entonces

$$P(X^{(r)} \leq x_{p^*} \leq X^{(s)}) \geq 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \quad (2.22)$$

Provee el intervalo de confianza. Si suponemos que la función de distribución desconocida es continua, entonces.

$$P(X^{(r)} \leq x_{p^*} \leq X^{(s)}) = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \quad (2.23)$$

**Método B (aproximación de muestras grandes).**

Para  $n$  mayores que 20 la aproximación basada en el Teorema del Límite Central puede ser usado (véase al final de la tabla K) Calculamos

$$r^* = np^* + w_{\alpha/2} \sqrt{np^*(1-p^*)} \quad (2.24)$$

y

$$s^* = np^* + w_{1-\alpha/2} \sqrt{np^*(1-p^*)} \quad (2.25)$$

donde los cuantiles  $w_p$  son obtenidos por la tabla A y donde  $1 - \alpha$  es el coeficiente de confianza deseado. En general,  $r^*$  y  $s^*$  no son números enteros, pero,  $r$  y  $s$  serán números enteros obtenidos por redondeo,  $r^*$  y  $s^*$  se aproximan a un entero próximo superior. Entonces

el intervalo de confianza aproximado es obtenido por las ecuaciones (2.24) y (2.25). Si la función de distribución desconocida es continua.

Un intervalo de confianza de una sola cola puede ser formado para encontrar solamente  $r$  o  $s$  como se describió anteriormente. Intervalos de confianza de una sola cola son de la forma

$$P(X^{(r)} \leq x_{p^*}) = 1 - \alpha_1$$

y

$$P(x_{p^*} \leq X^{(s)}) = 1 - \alpha_2$$

Si la función de distribución es continua, o

$$P(X^{(r)} \leq x_{p^*}) \geq 1 - \alpha_1$$

y

$$P(x_{p^*} \leq X^{(s)}) \geq 1 - \alpha_2$$

Si no hay continuidad en la  $F_X(x)$ .

### Ejemplo 2.14

Dieciseis tubos de radios son seleccionados aleatoriamente para un lote grande de tubos de radio, y son probados. El número de horas hasta fracasar son registradas para cada uno. Deseamos encontrar un intervalo de confianza para los cuantiles superiores, con un coeficiente de confianza cercano al 90%. En la Tabla K con  $n = 16$  y  $p = 0.75$ ; Se busca en la columna para  $p = 0.75$  y  $y = 8$  la probabilidad próxima a 0.05 es 0.0271, por lo tanto  $r$  es igual a 9. La probabilidad cercana a 0.95 es  $0.9365 = 1 - \alpha_2$ , que corresponde a  $y = 14$ . Por tanto  $s$  es igual a 15.

**Solución:**

El intervalo de confianza es

$$P(X^{(9)} \leq x_{.75} \leq X^{(15)}) = 0.9094$$

Los resultados de esta prueba, ordenadas en forma creciente, son los siguientes:

$X^{(1)} = 46.9$	$X^{(5)} = 56.8$	$X^{(9)} = 63.3$	$X^{(13)} = 67.1$
$X^{(2)} = 47.2$	$X^{(6)} = 59.2$	$X^{(10)} = 63.4$	$X^{(14)} = 67.7$
$X^{(3)} = 49.1$	$X^{(7)} = 59.9$	$X^{(11)} = 63.7$	$X^{(15)} = 73.3$
$X^{(4)} = 56.5$	$X^{(8)} = 63.2$	$X^{(12)} = 64.1$	$X^{(16)} = 78.5$

Porque  $X^{(9)}$  es igual a 63.3 y  $X^{(15)}$  es igual a 73.3, podemos decir "el intervalo para 63.3 horas a 73.3 horas, inclusive, es un 90.94%" intervalo de confianza para el cuantil superior.

Para muestras grandes se facilita los cálculos utilizando las ecuaciones (2.24) y (2.25), obteniendo:

$$\begin{aligned} r^* &= (16)(0.75) + (-1.645)\sqrt{(16)(0.75)(0.25)} \\ &= 12 - 2.86 \\ &= 9.14 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} s^* &= 12 + 2.86 \\ &= 14.86 \end{aligned}$$

entonces  $r$  igual a 10 y  $s$  igual a 15, es el intervalo de confianza del 90% (63.4, 73.3) ligeramente pequeño que los más precisos métodos usados anteriormente.

Consideremos primero el caso simple donde la función de distribución es continua. Si  $x_{p^*}$  es el  $p^*$ -ésimo cuantil, tenemos la relación exacta

$$P(X \geq x_{p^*}) = P(X > x_{p^*}) = 1 - p^* \quad (2.26)$$

donde la función de distribución de  $X$  es el mismo que la muestra aleatoria.

La estadística de orden de rango 1,  $X^{(1)}$ , se quiere asumir un valor grande que alguna constante especifica solamente si los valores pequeños son mayores que la constante. Por tanto  $X^{(1)}$  es mayor que la constante solamente si los  $n$  valores de la muestra son mayores que la constante. Escogemos  $x_{p^*}$  como la constante, podemos concluir.

$$\begin{aligned} P(x_{p^*} < X^{(1)}) &= P(\text{Todo valor muestral excede}) \\ &= P(x_{p^*} < X_1, x_{p^*} < X_2, \dots, < X_p) \\ &= P(x_{p^*} < X_1) \cdot P(x_{p^*} < X_2) \dots P(x_{p^*} < X_p) \\ &= (1 - p^*)^n \end{aligned}$$

Porque los  $X_i$  son independientes, y todos ellos tienen el mismo  $p^*$ -ésimo cuantil  $x_{p^*}$ .

Si  $x_{p^*}$  es menor que  $X^{(2)}$ , entonces exactamente  $n - 1$  observaciones son mayores que  $x_{p^*}$ , en el caso  $X^{(1)} \leq x_{p^*} < X^{(2)}$ , o bien exactamente  $n$  observaciones son mayores que  $x_{p^*}$  en el caso  $x_{p^*} < X^{(1)} < X^{(2)}$ , entonces en esta última situación se tiene:

$$\begin{aligned} P(x_{p^*} < X^{(2)}) &= P(x_{p^*} < X^{(1)}) + P(X^{(1)} \leq x_{p^*} < X^{(2)}) \\ &= P(\text{al menos } n-1 \text{ de los } X_i \text{ excede } x_{p^*}) \quad (2.27) \\ &= P(1 \text{ ó menos de los } X_i \text{ son } \leq x_{p^*}) \end{aligned}$$

Ahora la probabilidad en (2.27) es dado por la función de distribución binomial, porque cada  $X_i$  tiene probabilidad  $p^*$  de ser menores o iguales que  $x_{p^*}$ , y los  $X_i$  son independientes.

Entonces por la ecuación (2.27) tenemos que

$$P(x_{p^*} < X^{(2)}) = \sum_{i=0}^1 \binom{n}{i} (p^*)^i (1-p^*)^{n-i}$$

Con ayuda de la función de distribución binomial, podemos argumentar lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(x_{p^*} < X^{(r)}) &= P(\text{al menos } n-r-1 \text{ de los } X_i \text{ excede } x_{p^*}) \\ &= P(r-1 \text{ ó menos de los } X_i \text{ son } \leq x_{p^*}) \quad (2.28) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} (p^*)^i (1-p^*)^{n-i} \end{aligned}$$

O bien, una forma equivalente de obtener el coeficiente de confianza, esta dado por

$$\begin{aligned} 1-\alpha &\cong P(X^{(r)} \leq x_{p^*} \leq X^{(s)}) \\ &= P(x_{p^*} \leq X^{(s)}) - P(x_{p^*} < X^{(r)}) \end{aligned}$$

Por tanto  $r$  y  $s$  puede ser seleccionada, con el auxilio de ecuación (2.28) y tabla K, tal que

$$1-\alpha_2 = P(x_{p^*} \leq X^{(s)}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \alpha_1 = P(x_{p^*} < X^{(r)}) = \frac{\alpha}{2} \quad (2.29)$$

Entonces el coeficiente de confianza deseado es  $1-\alpha_2-\alpha_1 \cong 1-\alpha$ . Puesto que hemos supuesto que la función de distribución es continua, tenemos que

$$P(x_{p^*} \leq X^{(s)}) = P(x_{p^*} < X^{(s)}) \quad (2.30)$$

También que la tabla K puede ser usada para encontrar  $s$ .

Si la función de distribución de  $X$  y por tanto de los  $X_i$  no es necesariamente continua, entonces la ecuación (2.27) no es necesariamente verdadera.

Ahora tenemos que:

$$P(X > x_{p^*}) \leq 1-p^* \quad (2.31)$$

y

$$P(X \geq x_{p^*}) \geq 1-p^* \quad (2.32)$$

Primero consideramos como la ecuación (2.31) afecta a la ecuación (2.28), y por tanto otro método para encontrar  $r$  es la ecuación (2.29). Según la ecuación (2.31), la probabilidad puede ser mas pequeña, si cada observación  $X$  excede a  $x_{p^*}$ , en casos continuos. Por lo tanto hay al menos una tendencia para cada uno de los estadísticos de orden para exceder a  $x_{p^*}$  según se expuso con anterioridad. Es decir, la probabilidad  $P(x_{p^*} < X^{(r)})$  puede ser más pequeña que en

el caso continuo, como puede verse en la ecuación (2.28) es modificada para ser escrita de la siguiente forma.

$$P(x_{p^*} \leq X^{(r)}) \leq \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} (p^*)^i (1-p^*)^{n-i} \quad (2.33)$$

Si la tabla K es usada para encontrar  $r$ , la expresión se escribe de la siguiente manera:

$$P(x_{p^*} < X^{(r)}) \leq \alpha_1 \quad (2.34)$$

# Capítulo III

## Estimaciones Robustas

### *3.1 Cuando las suposiciones fallan.*

En los capítulos anteriores hemos enfatizado que la distribución-libre no significa libre de suposiciones, puntualizando además que algunos procedimientos necesitan suposiciones más fuertes que otras para validarla. Algunas veces asumiremos que todas las muestras serán de poblaciones cuyas funciones de distribución acumulativas difieren hipotéticamente en sus medidas centrales, por ejemplo en las medias o en medianas. La independencia entre observaciones dentro de una muestra y entre diversas muestras son a menudo de mayor importancia. La suposición más fácil de aplicar fue la prueba de signo a una sola muestra donde la hipótesis nula requirió solamente que las observaciones se distribuyan sin especificación además consiste en someter a prueba a la mediana de las observaciones.

En muchos ejemplos mostramos, o mencionamos en los comentarios, que algunos procedimientos fueron más sensibles al incumplimiento de las suposiciones. Las “equivocaciones” a menudo están formadas por unos pocos valores muestrales siendo inconsistentes con el modelo asociado a las observaciones. Estas observaciones frecuentemente son llamadas datos atípicos (datos engañosos) y pueden surgir de múltiples maneras. Pueden ser:

- Valores que son medidos o registrados incorrectamente.
- Valores medidos en unidades que son atípicas al resto de las observaciones en estudio.
- Medidas hechas con menos exactitud o precisión que en la mayoría de observaciones.

Existen muchas causas de datos atípicos, por ejemplo una medida de 3.6 centímetros puede guardarse como 33.6 centímetros o como 36 cm. Repetir un dígito en el teclado es un error común cuando se está introduciendo los datos, como también omitir un punto decimal. Una medida de temperatura podría ser incorrectamente proporcionada en grados Fahrenheit cuando debió haberse dado en grados Centígrados. Un observador que olvida tomar una medición en un tiempo crítico y teme una reprimenda puede falsificar y dar un dato falso o un valor inventado.

Tal información incorrecta no es siempre fácil de detectar. Para las medidas de temperatura en un clima calido se ha dado en grados Fahrenheit cuando ésta debió haberse dado en grados Centígrados. Éste no es el caso para los climas polares, sin embargo, cuando se leen en una u otra escala puede ser razonable.

No siempre es fácil encontrar la causa de incorrección del registro a excepción de información atípica. Una máquina entre muchas podría producir una calidad muy pobre porque esta

operando a una temperatura fuera de lo normal, un factor que puede no ser observado, o más bien ser relevante, para la persona que esta recogiendo la información. La producción de una vaca lechera en un rebaño puede ser excepcionalmente baja porque sufre de falta de diagnóstico de la enfermedad que afecta la producción.

Una complicación frecuente es cuando los datos son combinados de diversas fuentes, ya que esos datos han sido proporcionados de distintas fuentes de información. Por ejemplo, si el calcio contenido en muestras de leche es medido en varios laboratorios, la mayoría de éstos deben de dar precisas y correctas determinaciones mientras uno o dos deben tener medidas menos precisas (aumentando la dispersión sobre los valores correctos). Otra posibilidad es que un laboratorio pueda devolver valores no precisos, o que sean muy altos (o muy bajos).

La elevada dispersión alrededor de la media puede indicar el uso de una escala inadecuada, por ejemplo en un establecimiento de investigación polar dónde se registran las medidas de temperatura usando la escala Centígrado en todos los lugares aparte de uno donde se usa la escala Fahrenheit, usando la lectura en grados Fahrenheit tendrán un amplio desplazamiento de valores, un factor que podría atraer la atención a las diferentes escalas en uso.

El reconocimiento de estos problemas ha llevado a un mejor desarrollo estadístico especialmente desde los años setenta. Generalmente llamados los métodos robustos éstos pretenden minimizar la influencia de datos atípicos u otras observaciones anómalas cuando éstos llevan una equivocación en las suposiciones básicas mientras que al mismo tiempo siendo tan buenos los métodos óptimos cuando las suposiciones relevantes se mantienen. Por otro lado los métodos robustos pueden ser muy eficientes mientras se requiera un mínimo de suposiciones.

Dentro de los métodos robustos tenemos el Bootstrap, el cual es valioso en situaciones donde la teoría existente es intratable o difícil de aplicar. Posee ambas formas paramétrica y no paramétrica, pero aquí consideraremos solo la segunda. La característica principal de este método es que la distribución del estadístico se determina simulando un número elevado de muestras aleatorias con reemplazamiento construidas directamente a partir de los datos observados (esto se detallará en el tema 3.3).

### 3.2 Datos Atípicos y su influencia

#### 3.2.1 Naturaleza y detección de datos atípicos

En términos generales un dato atípico es una observación tan distinto de las demás ya que causa cierto desconcierto. Aunque una observación nos sorprende es subjetivo y debe depender de lo que sabemos sobre el origen de los datos.

Por ejemplo, dado los datos

0, 5, 9, 8, 3, 0, 125, 9, 17

sin ninguna información adicional, muchas personas dirían que la observación 125 es lo suficientemente distante de las demás y puede causar algún desconcierto. Sin embargo, un entomólogo que conocía este conjunto de números sabe que son mediciones de ácido en cada uno de 9 plantas de las mismas especies de rosas y puede no ser considerado 125 como extraño, pero en muchas situaciones que involucran poblaciones de infestación completa de insectos precisamente uno o dos entre un número grande de plantas es común. Barnett y Lewis<sup>20</sup> (p .16) citan incluso datos más extremos de Fisher, Corbet y Williams (1943) para el número de polillas atrapadas en una trampa de luz, se da lo siguiente,

11 54 5 7 4 15 560 18 120 24 3 51 3 15 84.

Ahora veamos otro caso, dada las observaciones 2.7, 3.3, 3.5, 2.8, 4.1, 4.3 y sin otra información ninguno puede parecer sorprendente, pero si consideramos que éstos son los pesos en kg para un animal en crecimiento guardando los intervalos quincenales, un zoólogo podría tener dudas acerca de la validez de la cuarta observación 2.8. Un animal en crecimiento puede sufrir la pérdida de peso en alguna fase de su crecimiento pero la disminución es improbable que sea tan grande como esto. Si una pérdida de esta magnitud fuese registrada el animal probablemente podría morir las siguientes dos semanas; sería ciertamente improbable regresar al peso consistente con un modelo normal de crecimiento entre las dos semanas siguientes.

Esta observación no se considera como dato atípico en el sentido de ser extremo pero es probable que sea una observación contaminada, la contaminación que es un error de medida, una posibilidad es que el verdadero peso sea 3.8 y fue guardado como 2.8. Esto suele suceder si, con la balanza usada para pesar, la pesa de 1 kg y 2 kg puestos en el platillo de la balanza fuesen similares en el tamaño y diseño (diferiendo principalmente en la densidad), o si los pesos se leyeran de una pantalla digital que podría ser un descuido de lectura.

---

<sup>20</sup> Barnett, V.; T. Lewis. 1978. Outliers in statistical data. John Wiley & Sons. NY., 365 p

Claramente los datos atípicos u observaciones contaminadas son una molestia que deben o debería tenerse en cuenta al hacer las inferencias. Los criterios desarrollados dan la base para excluir el dato atípico del análisis. El objetivo es hacer que los datos restantes sean más consistentes con algún modelo de la inferencia paramétrica. Barnett y Lewis (1994, Sección 6.3) enlista 48 pruebas para los datos atípicos en una sola distribución normal, la mayoría de estos siendo óptimo sólo para las alternativas específicas razonable para la hipótesis nula que todos los datos pertenecen a la misma distribución normal donde ninguno o ambos parámetros sean conocidos. Las dificultades son causadas a menudo por un efecto disfrazado por lo cual la potencia de la prueba de datos atípicos es reducida por la presencia de los otros.

Si un dato atípico puede mostrar que es un error este podría ser corregido si es posible; si no puede corregirse debe ser imputado o rechazado. Cuando no hay una clara indicación que un dato atípico es un error de medida o registrado en una vía apropiada de acción es menos claro. Esto depende de la población de interés y qué preguntas están haciendo acerca de la población.

### Ejemplo 3.1

En un experimento para reducir la presión sanguínea se prueba una droga para conocer si es ineficaz en una persona que toma alcohol y todas las demás personas podrían recibir una prohibición de alcohol mientras se aplica la droga. Si, un grupo de 25 pacientes reciben la droga la disminución en la presión sanguínea sistólica en mm Hg son

-3 0 2 5 6 21 23 23 27 30 32 35 37 39 41 43 47 47 49 52 54  
57 59 60 64

Un médico podría tener sospechas que los primeros cinco datos corresponde a pacientes que ciertamente habían ignorado la prohibición de alcohol. Y firmemente el doctor opinó que la forma de ver las cosas sería cuestión de experiencia; si fuera sabido, por ejemplo, que la droga es ineficaz para 1 persona de 50 que haya bebido o no el alcohol, es razonable decir que uno o dos de los primeros datos podría ser para tal caso, pero improbable lo harían para todos ellos. Si, por otra parte, hubo fuertes argumentos para creer que estaba casi seguro de que una reducción sustancial en la presión sanguínea tuviese lugar si el alcohol no fue consumido, y que fue de interés la media y la mediana de la reducción en la presión sanguínea, en tales casos, tiene sentido omitir los cinco datos menores. Asumir estos cinco datos que habían incumplido la prohibición de alcohol podría ser injusto. Sería una cuestión de juicio clínico ya sea para preguntar esos, o quizá todo, los participantes si habían tomado alcohol y en ese caso cuánto

(una dosis - la relación de respuesta puede significar que un poco de alcohol no tiene el mismo impacto como una inyección más grande). Puede haber dudas claras sobre la verdad de las respuestas dadas para tales preguntas.

Si había indicaciones que entre 5 y 10 por ciento de la población podría no responder positivamente a la droga (quizás por alguna razón genética) los resultados anteriores son consistentes con esa hipótesis. En ese caso si uno estuviera interesado en la población total no podría rechazar ninguna observación al hacer inferencias. Pero si uno estuviera solamente interesado en la población con excepción de los que no respondieron positivamente, las cinco observaciones podrían ser rechazadas.

El propósito de este ejemplo hipotético es mostrar que no hay ninguna respuesta fácil a tratar con los datos atípicos. Es importante en el transcurso indicar claramente cuando los datos atípicos se hacen presentes o se sospechan.

### 3.2.2 Una prueba para los datos atípicos

En muchas pruebas para los datos atípicos carecen de robustez. Algunos son notoriamente malos para detectar más que un dato atípico en la misma cola; otros tienden a perder un par de datos atípicos en las colas opuestas.

Una simple y razonable prueba de robustez para clasificar cada observación  $x^*$  como un dato atípico es si

$$\frac{|x^* - \text{med}(x_i)|}{\text{med}[|x_i - \text{med}(x_i)|]} > 5$$

Aquí  $\text{med}(x_i)$  es la mediana general de las observaciones en la muestra y el denominador es una medida de dispersión llamado la desviación absoluta de la mediana, a menudo es abreviada como MAD. La elección del 5 es un valor crítico originado por el razonamiento que si las otras observaciones de las que es parte los datos atípicos tienen una distribución aproximadamente normal, se considera como un dato atípico cualquier observación separada aproximadamente más de tres desviaciones normales de la media.

#### Ejemplo 3.2

*El problema.* Use la prueba anterior para descubrir cual es dato atípico en el conjunto de datos

8.9   6.2   7.2   5.4   3.7   2.8   22.2   12.7   6.9   3.1   29.8

## Capítulo III

---

*La formulación y asunciones.* Es más fácil determinar la mediana y MAD después de ordenar las observaciones. Probamos primero las observaciones más lejanas de la mediana entonces se detiene si éste no es un dato atípico. Si es un dato atípico probamos el dato más próximo en cualquier procedimiento de la cola hasta que encontremos una observación que no sea un dato atípico.

### *Procedimiento.*

Las observaciones ordenadas son:

2.8 3.1 3.7 5.4 6.2 6.9 7.2 8.9 12.7 22.2 29.8

La mediana de este conjunto de datos es  $\tilde{x} = 6.9$

La desviación absoluta de la observación 2.8 (dato menor) con respecto a la mediana es

$$|2.8 - 6.9| = 4.1.$$

Luego, la desviación absoluta de la observación 3.1 con respecto a la mediana es

$$|3.1 - 6.9| = 3.8$$

Semejantemente las desviaciones absolutas restantes son 3.2, 1.5, 0.7, 0.0, 0.3, 2.0, 5.8, 15.3 y 22.9.

Observación $x_i$	$ x_i - med(x) $	Resultado
2.8	$ 2.8 - 6.9 $	4.1
3.1	$ 3.1 - 6.9 $	3.8
3.7	$ 3.7 - 6.9 $	3.2
5.4	$ 5.4 - 6.9 $	1.5
6.2	$ 6.2 - 6.9 $	0.7
6.9	$ 6.9 - 6.9 $	0.0
7.2	$ 7.2 - 6.9 $	0.3
8.9	$ 8.9 - 6.9 $	2.0
12.7	$ 12.7 - 6.9 $	5.8
22.2	$ 22.2 - 6.9 $	15.3
29.8	$ 29.8 - 6.9 $	22.9

Ordenando los resultados de la última columna se tiene:

0.0 0.3 0.7 1.5 2.0 3.2 3.8 4.1 5.8 15.3 22.9

Encontramos fácilmente su mediana de las desviaciones absolutas, el MAD, es 3.2.

- Sea  $x^* = 29.8$  un posible dato atípico a considerar, el estadístico de prueba es  $22.9/3.2 = 7.16$  entonces clasificamos a 29.8 como un dato atípico, ya que el valor 7.16 supera al valor crítico considerado.
- Sea  $x^* = 22.2$  otro posible dato atípico, encontramos el valor del estadístico  $15.3/3.2 = 4.78$  así que no clasificamos a este o cualquier otra de las observaciones como un dato atípico.

**Conclusión.** El conjunto de datos contiene un dato atípico,  $x^* = 29.8$

### *Comentarios.*

1. Habiendo decidido que 29.8 es un dato atípico todavía tenemos que decidir qué hacer sobre él. Un camino obvio a seguir es verificar (a) si puede existir un error y si es así puede corregirse; si obviamente no es un error entonces (b) hay algo peculiar sobre la unidad experimental que da lugar a ese valor.
2. Parece probable que los datos hayan venido de un sesgo con respecto de una distribución normal. La prueba que hemos dado no es una prueba para la normalidad, sin embargo, una prueba como la de Lilliefors' debe usarse para evaluar la normalidad si eso es importante.

### **3.2.3 Influencia y robustez**

Consideramos primero el efecto de un solo valor atípico en relación a la media. Suponga que tenemos  $n$  observaciones no contaminadas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  las cuales le llamamos las observaciones "buenas" y una observación contaminada  $z$  que es un valor atípico en el sentido que toma un valor mayor que cualquier observación buena. Sea  $\bar{x} = (\sum x_i)/n$  la media de las observaciones buenas y  $\bar{x}_a$  la media del conjunto aumentado (incluye  $z$ ). Se ve fácilmente que

$$\bar{x}_a - \bar{x} = \frac{n\bar{x} + z}{n+1} - \bar{x} = \frac{z - \bar{x}}{n+1} \quad (3.1)$$

Donde se sigue que el efecto de  $z$  en la media muestral  $\bar{x}$  para las observaciones buenas es una función lineal de  $z$ , y que tiende al infinito cuando  $z \rightarrow \infty$ . En otros términos el efecto de apenas una observación contaminada en la media muestral puede hacerse infinito,

mientras (3.1) es una medida de influencia de una observación contaminada la función de influencia  $I_n(z)$  para una muestra de  $n$  es obtenida de (3.1) multiplicando por  $n + 1$ , es decir.

$$I_n(z) = (n + 1)(\bar{x}_a - \bar{x}) = z - \bar{x}.$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\bar{x} \rightarrow \mu$ , la media poblacional para las observaciones buenas, y la función limitada

$$I(z) = z - \mu \quad (3.2)$$

Es la función de influencia asintótica, pero esto a menudo es referido como la *función de influencia*. En general, argumentos similares y fáciles de diferenciar se aplican si  $z$  es un dato atípico en la cola inferior, es decir, tenemos un valor notablemente menor que en todas las observaciones buenas.

En contraste a la situación con la media donde un valor atípico puede tener importancia, ciertamente ilimitada, la influencia de un solo valor atípico afecta a la mediana es usualmente insignificante y ciertamente limitada siempre que  $n \geq 2$ . La situación es un poco diferente dependiendo si los números de datos buenos sean impares o pares.

Consideremos primero el caso donde tenemos  $n = 2m$  datos buenos. Las observaciones son colocadas en orden ascendente y denotamos por  $x_{(i)}$  el  $i$ -ésimo valor más grande de la muestra entonces la mediana de las observaciones buenas es  $\frac{1}{2}(x_{(m)} + x_{(m+1)})$ . Pero si agregamos un dato atípico  $z$  a la muestra y es un valor mayor que  $x_{(2m)}$  el efecto estará en cambiar de puesto a la mediana de la muestra combinada solamente a  $x_{(m+1)}$ . De igual forma un dato atípico menor que  $x_{(1)}$  sólo mueve la mediana a  $x_{(m)}$ . Ahora veamos el caso, si el número de observaciones buenas es impar  $n = 2m + 1$  dada la mediana  $x_{(m+1)}$ ; se ve fácilmente que si agregamos un dato atípico  $z$  a la muestra y  $z > x_{(2m+1)}$  sólo mueve la mediana a  $(\frac{1}{2})(x_{(m+1)} + x_{(m+2)})$  y mientras que si  $z < x_{(1)}$  mueve la mediana a  $(\frac{1}{2})(x_{(m)} + x_{(m+1)})$ .

Dada la subyacente distribución poblacional que influye en los valores de los estadísticos de orden una aproximación diferente que es usado para la media se necesitará determinar la función de influencia asintótica. Los detalles se dan en Barnett y Lewis (1994, capítulo 4) que demuestran que una expresión apropiada es

$$I(z) = \frac{\text{sgn}(z - m)}{2f(m)} \quad (3.3)$$

Donde  $m$  es la mediana de las observaciones buenas que son distribuidas con una función de frecuencia  $f(x)$  y  $\text{sgn}(z - m) = +1, 0$  ó  $-1$  dependiendo si  $z$  es mayor que, igual a, o menor que  $m$  respectivamente. Claramente  $I(z)$  dado por (3.3) es acotada superiormente por una distribución continua y el supremo o valor máximo de  $|I(z)|$  es  $\frac{1}{2}f(m)$ . Este supremo es llamado error total sensible.

Es evidente que si tenemos una muestra grande de una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$  y precisamente una observación contaminada es agregada, el posible efecto sobre la media muestral es ilimitado, mientras el efecto máximo en la mediana muestral no puede exceder  $\frac{1}{2}f(\mu) = \sigma\sqrt{2\pi}/2 = 1.253\sigma$ , puesto que la mediana de la distribución normal de los valores buenos es  $\mu$ .

No es difícil ver que si hay  $n = 2m + 1$  observaciones buenas y dos observaciones contaminadas son agregadas, entonces cualquiera que sean sus magnitudes el efecto mayor sobre la muestra adulterada es mover la mediana de  $x_{(m+1)}$  a cualquier punto  $x_{(m)}$  o  $x_{(m+2)}$ . El argumento se extiende fácilmente a lo sumo a 4 contaminados con los límites precisos  $x_{(m-1)}$  o  $x_{(m+3)}$  y procediendo de esta manera, cuando  $2m$  observaciones contaminadas se agregan, los límites son  $x_{(1)}$  y  $x_{(2m+1)}$ . Así, al menos el 50 por ciento de las observaciones pueden ser contaminadas, y esta es una forma de generar datos atípicos antes que la mediana se haga ilimitada. En general este argumento puede ser usado incluso en observaciones buenas.

El número determinado de observaciones contaminadas necesario para construir una media o mediana ilimitada es llamado el punto de fracaso. Este a veces se expresa como un porcentaje, es decir 50 por ciento para la mediana, pero más usualmente como en fracción, es decir  $1/2$  para la mediana. Como hemos visto, el punto de fracaso para la media es  $1/(n + 1)$ , dado que una observación contaminada necesita ser agregada en una muestra de  $n$  para generar la media muestral ilimitada. El punto de fracaso es una medida importante de robustez porque en muchas situaciones prácticas hay una fuerte sospecha y hasta evidencia directa, que una considerable proporción de observaciones pueden ser contaminadas. Debe ser ahora intuitivamente claro por qué en los temas anteriores nosotros encontramos a menudo estimadores basados en la mediana, pues son más robustos contra el dato atípico que aquellos basados en las medias.

### 3.3 El Bootstrap

#### 3.3.1 Bootstrap e Inferencia Estadística

Como hemos venido mencionando anteriormente buena parte de la Inferencia Estadística se apoya en la suposición de que las variables estudiadas se distribuyen de acuerdo con algún modelo clásico paramétrico conocido. Bajo este supuesto, o recurriendo a leyes que permiten salvar la no-normalidad poblacional cuando el tamaño de las muestras es suficientemente grande, es posible determinar la distribución muestral de diferentes estadísticos que utilizamos en la estimación de parámetros poblacionales y en el contraste de hipótesis acerca de tales parámetros.

Por ejemplo, la comprobación de hipótesis estadística acerca del parámetro media se apoya en la suposición de que la distribución muestral del estadístico media sigue un modelo normal cuando la variable estudiada se distribuye normalmente en la población. Además de acuerdo con el teorema del límite central, la distribución muestral del estadístico media es normal

$N\left(\mu, \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$  cuando el tamaño muestral sea suficientemente grande (por acuerdo, de al menos  $n = 30$ ), incluso cuando no se cumpla la normalidad de la población.

Basándonos en los métodos Bootstrap, la idea de fondo sigue siendo la de construir un modelo de distribución para determinados estadísticos a partir de la información proporcionada por la muestra, aunque el modo de proceder es distinto. Como hemos señalado, en los métodos estadísticos clásicos la base para hacer inferencias sobre la población se encuentra en suponer para los estadísticos una distribución muestral teórica, cuyos parámetros pueden ser estimados a partir de estadísticos observados en la muestra. En cambio, los procedimientos basados en el Bootstrap implican obviar los supuestos sobre la distribución teórica que siguen los estadísticos. En su lugar, la distribución del estadístico se determina simulando un número elevado de muestras aleatorias construidas directamente a partir de los datos observados. Es decir, utilizamos la muestra original para generar a partir de ellas nuevas muestras que sirvan de base para estimar inductivamente la forma de la distribución muestral de los estadísticos, en lugar de partir de una distribución teórica asumida *a priori*.

Además este enfoque tiene su antecedente inmediato en las técnicas de simulación Monte Carlo, consistente en extraer un número elevado de muestras aleatorias de una población conocida

para calcular a partir de ellas el valor del estadístico cuya distribución muestral pretende ser estimada (Money, 1997). Sin embargo, en la práctica no solemos conocer la población y lo que manejamos son muestras extraídas de ellas. El investigador parte de un conjunto de datos observados, que constituyen una muestra extraída de la población que pretende estudiar. Cuando las técnicas Monte Carlo son aplicadas a la resolución de problemas estadísticos, partiendo de datos observados en una muestra, reciben más apropiadamente la denominación de *“técnicas de remuestreo”*.

Existen diversos procedimientos utilizados para generar muestras a partir de un conjunto de observaciones y construir una distribución muestral que pueda ser usada para la estimación de intervalos de confianza y el contraste de hipótesis. Entre ellos, posiblemente el más conocido y comúnmente utilizado es el Método Bootstrap.

El uso del bootstrap proviene grandemente del trabajo por Efron (1979). Una sencilla introducción a ésta y técnicas relacionadas son dadas por Efron y Gong (1983). Una cuenta más detallada de los elementos del bootstrap se da por Sprent (1998, Capítulo 2) y un tratamiento completo en niveles elementales e intermedios con muchos ejemplos son dadas por Efron y Tibshirani (1993), Davison e Hinkley (1997) y Chernick (1999).

### **3.3.2 Muestra Bootstrap**

Dado una muestra aleatoria de  $n$  observaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de alguna población una muestra bootstrap es una muestra aleatoria de tamaño  $n$  obtenida de estos datos por muestreo con reemplazamiento. Así algún  $x_i$  puede ser seleccionado más de una vez y otros en ninguna vez de una muestra bootstrap.

Es notoriamente posible determinar la distribución de todas las posibles muestras bootstrap y la distribución para muchos estadísticos asociados como las medias o medianas de las muestras bootstrap.

Tales distribuciones son llamadas la **distribución bootstrap verdadera** para distinguirlos de las estimaciones basados en subconjuntos aleatorios de todas las posibles muestras bootstrap. Éstas distribuciones son importantes en las aplicaciones prácticas por el hecho que determinan analíticamente distribuciones bootstrap verdaderas; es una tarea sorprendente para todo  $n$  pequeño excepto en el caso de unos pocos estadísticos donde algunos resultados generales

analíticos se mantienen (y en este último caso las inferencias se pueden usualmente hacer solo con el bootstrap). Esto es muy útil para el ejemplo, pero trivial en la práctica porque una muestra tan pequeña no nos informa muy bien acerca de la distribución asociada como lo es en una población grande.

En la práctica las inferencias del bootstrap son basadas utilizando casi siempre el método de Monte Carlo que genera un número fijo predeterminado,  $B$ , digamos, de muestras del bootstrap. Nosotros denotamos típicamente una muestra bootstrap por:

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$$

Donde cada  $x_i^*$  es igual a una de las observaciones originales  $x_i^* = x_j$ . Porque el muestreo es con reemplazo de algunas de las muestras de los valores originales (el  $x_j$ ) puede no aparecer y otras puede ocurrir más de una vez entre el  $x_i^*$ .

Por ejemplo:

Si  $n = 9$  y las observaciones son

$$2.5, 3.1, 4.2, 5.1, 5.3, 5.9, 6.7, 7.2 \text{ y } 10.5$$

Una prueba típica de bootstrap será

$$x_1^* = 4.2, \quad x_2^* = 6.7, \quad x_3^* = 5.1, \quad x_4^* = 6.7, \quad x_5^* = 7.2, \quad x_6^* = 6.7, \quad x_7^* = 2.5, \quad x_8^* = 10.5, \\ x_9^* = 5.1.$$

Si  $B$  muestras bootstrap son generadas la  $b$ -ésima muestra puede escribirse como:

$$x_1^{*b}, x_2^{*b}, \dots, x_n^{*b}.$$

La anotación del vector proporciona una taquigrafía conveniente si nosotros escribimos  $x^*$  para cualquier muestra bootstrap y  $x^{*b}$  para la  $b$ -ésima muestra. En situaciones bivariantes o multivariantes como aquellos en correlación o regresión cada  $x_i$  puede ser un vector. Para cada muestra bootstrap  $x^*$  frecuentemente calculamos estadísticas tales como la media muestral, mediana o la varianza muestral y usamos estos estadísticos para estimar la característica de la distribución de población correspondiente.

Con el propósito de ilustrar denotamos el parámetro o característica de la población que estamos interesados por  $\theta$  y el estadístico que estima la muestra bootstrap  $x^*$  es dado por  $s(x^*)$  el cual da una estimación  $\theta^* = s(x^*)$  de  $\theta$ . Debido al muestreo con reposición el valor numérico

de  $s(x^*)$  va cambiando de muestra en muestra y así es que el estadístico tiene una distribución.

Como el número de muestras bootstrap,  $B$  tiende al infinito la media de cualquier estadístico  $s(x^*)$  tiende a la distribución de muestreo bootstrap verdadera de la media calculada, aunque según lo precisado arriba, esto se sabe solamente en algunos casos especiales o se puede resolver solamente para los casos generales para los valores pequeños de  $n$ . La experiencia sin embargo muestra que en muchas (pero no en todas) situaciones para pequeños  $n$  la media de  $B$  muestras bootstrap converge rápidamente al valor límite que tiende cuando  $B \rightarrow \infty$ . Si generamos  $B$  muestras bootstrap y denotamos la media de la  $s(x^{*b})$  por  $s(\bullet^*)$ , es decir

$$s(\bullet^*) = \sum_b [s(x^{*b})] / b$$

entonces la estimación aproximada del verdadero valor del error estándar bootstrap de  $\theta^*$ , el cual se denota por  $se_B(s)$ , es:

$$se_B(s) = \left\{ \sum_b [s(x^{*b}) - s(\bullet^*)]^2 / (B-1) \right\}^{1/2} \quad (3.4)$$

La ecuación 3.4 es el estimador de la desviación estándar poblacional basada en una muestra aleatoria  $B$  de cierta población, la desviación estándar bootstrap verdadera tiende al estadístico  $s$  cuando  $B \rightarrow \infty$ . En la práctica la aproximación es a menudo buena para  $B = 20$  como mínima, con la condición de que  $n$  no sea demasiado pequeño. Incluso para las  $n$  estimaciones razonablemente pequeñas puede obtenerse con  $B = 100$ , aunque advertimos otra vez contra el uso indiscriminado del bootstrap con las muestras muy pequeñas porque entonces la distribución de la muestra puede no reflejar verdad a una población de interés.

Las trampas para advertir cuando se usa el bootstrap con las muestras pequeñas incluyen dificultades con sesgos que traen una moderada o grandes muestras en algunos contextos y son discutidos con ejemplos numéricos en Sprent (1998, sección 2.4) y mucho más generalmente para un rango de aplicaciones por Efron y Tibshirani (1993).

Es importante darse cuenta que en aplicaciones usando solamente un número finito,  $B$ , de muestras del bootstrap hay dos fuentes de error:

- 1) El primero es el error muestral aplicado para todo muestreo basado en inferencia sobre una población no importando que método inferencial es usado. Por ejemplo, en la inferencia paramétrica sobre la media de una población normal basada en una muestra

de  $n$  la media muestral  $\bar{x}$  en general no es igual a la media poblacional  $\mu$  pero el "error" de muestreo tomando  $\bar{x}$  como un estimador de  $\mu$  es medido por el error estándar de  $\bar{x}$ ,  $\sigma_{\bar{x}}$ .

2) La segunda fuente de error especificado para el muestreo bootstrap es que de hecho cuando nos aproximamos al error estándar del bootstrap verdadero usando solamente un número finito  $B$  de muestras del bootstrap. Aunque no lo demostramos aquí, puede ser mostrado que la desviación estándar del verdadero bootstrap esta aproximadamente igual a la población estimada de la desviación estándar para el estimador correspondiente. El ejemplo 3.3 muestra de alguna manera ligera la variación entre muestras que es reflejada en estimaciones bootstrap.

Se puede resumir lo anterior expuesto diciendo que el proceso bootstrap, y en particular, la construcción del estimador bootstrap de la desviación típica de un estimador, consta de las etapas siguientes:

1. A partir de la muestra original  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , se extrae una nueva muestra  $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ , por medio de muestreo con reposición. Es decir, tras la extracción de un primer elemento, éste se repone en la muestra original de tal forma que podría ser elegido de nuevo como segundo elemento de la muestra extraída. De este modo, cada observación individual tiene una probabilidad  $1/n$  de ser elegida cada vez, como si el muestreo se realiza sin reposición en un universo infinitamente grande construido a partir de la información que provee la muestra.
2. Para la muestra obtenida se calcula el valor de un determinado estadístico  $\hat{\theta}$  que se utiliza como estimador del parámetro poblacional  $\theta$ , en cuyo estudio estamos interesados.
3. Repetimos los dos pasos anteriores, hasta obtener un elevado número de estimaciones  $\hat{\theta}^*$ ,  $B$  veces; donde  $B$  tiene que ser lo suficientemente mayor (la magnitud de  $B$  en la práctica depende de las pruebas que se van a aplicar a los datos. Se ha afirmado que,  $B$  debería estar de entre 50 a 200 para estimar el error típico de  $\hat{\theta}$ . Sin embargo, esto tiene reducida importancia en la actualidad, pues las computadoras personales son tan

rápidas que no tiene sentido tener un afán especial en trabajar con valores bajos de  $B$  y, por otra parte, nunca es pernicioso que  $B$  sea demasiado grande. Por lo general,  $B = 1000$  se suelen conseguir buenos resultados y valores de  $B$  superiores a 5000 ya no agregan ninguna ventaja).

4. Construcción de una distribución de probabilidad a partir de los  $B$  valores  $\hat{\theta}^{*(b)}$ .

Se construye una distribución empírica del estadístico  $\hat{\theta}$ , que representa una buena aproximación a la verdadera distribución de probabilidad para ese estadístico. Es decir, se determina de este modo la distribución muestral de un estadístico sin haber hecho suposiciones sobre la distribución teórica a la que ésta se ajusta y sin manejar fórmulas analíticas para determinar los correspondientes parámetros de esa distribución.

Los  $B$  valores  $\hat{\theta}^{*(b)}$  se le asignan una frecuencia relativa  $1/b$  a cada punto  $\hat{\theta}^{*(1)}, \hat{\theta}^{*(2)}, \dots, \hat{\theta}^{*(b)}$ . Esta distribución  $F^*(\hat{\theta}^*)$ , es el estimador bootstrap de la distribución muestral exacta de  $\hat{\theta}$ ,  $F(\hat{\theta})$ . En la metodología bootstrap se utiliza  $F^*(\hat{\theta}^*)$  para efectuar inferencias sobre  $\hat{\theta}$ , ya que la distribución exacta  $F(\hat{\theta})$  suele ser desconocida.

5. Construcción del estimador bootstrap de la desviación típica del estimador  $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\sigma_{\hat{\theta}^*} = [Var(\theta^*)]^{1/2} = se_B(s) = \left\{ \sum_b [s(x^{*b}) - s(\bullet^*)]^2 / (B-1) \right\}^{1/2}$$

Siendo

$$s(\bullet^*) = \sum_b [s(x^{*b})] / b$$

De acuerdo con la idea central en que se basa el método Bootstrap, el procedimiento supone utilizar la muestra considerando que en si misma contiene la información básica sobre la población. Por tanto, la adecuación de este método será tanto mayor cuanto más información aporte la muestra sobre la población.

Una consecuencia directa es que a medida que aumenta el tamaño de la muestra mejor será la estimación que podemos hacer sobre la distribución muestral de un estadístico. No obstante, incluso con muestras pequeñas, entre 10 y 20 casos, el método Bootstrap puede ofrecer

resultados correctos<sup>21</sup>, juzgándose inadecuados para muestras de tamaño inferior a 5. Con un tamaño suficientemente grande, el incremento en el número de muestras procurará una mejora en la estimación de la distribución muestral.

El bootstrap y los procedimientos de remuestreo en general, han comenzado a centrar la atención de los estadísticos a partir de la década de los ochenta, cuando el desarrollo de la informática allanó los obstáculos prácticos unidos a la simulación de un número elevado de muestras. A finales de esta década, la utilización del método Bootstrap para el contraste de hipótesis empezaba a ser considerada una alternativa a los tests paramétricos y no paramétricos convencionales. El ejemplo 3.3 emite alguna luz en la manera que prueba la variación que refleja las estimaciones bootstrap.

### Ejemplo 3.3

*El problema.* Para los siguientes datos muestrales explore el uso del Bootstrap para estimaciones de medianas poblacionales.

0.04 0.06 0.27 0.32 0.33 0.40 0.50 0.63 0.69 0.92  
1.09 1.10 1.35 1.61 1.66 1.69 1.71 1.80 1.98 2.65  
2.83 3.50 3.72 3.75 3.99 5.16 5.49 6.31 7.05 16.05

*Formulación y suposición.* Los datos son de hecho una muestra aleatoria de tamaño 30 de una distribución conocida, pero no es tan diferente de algunas que podrían surgir en la práctica. Ellos podrían ser por ejemplo los porcentajes de alguna contaminación en varias fuentes de agua, una situación donde no es común encontrar pequeños niveles de contaminación en muchas de las fuentes pero niveles altos y niveles de rangos amplios en otros.

Los datos están arreglados en orden ascendente para indicar más claramente la falta de simetría con una cola larga más alta incluyendo el valor de 16.05 que podría sugerir a sí mismo como un valor atípico (ejemplo 3.2).

La mediana muestral  $\frac{1}{2}(1.66 + 1.69) = 1.675$ . Explorando la información disponible para generar  $B = 40$  muestras bootstrap y obteniendo la mediana de cada uno de las iteraciones usamos el estimador del error estándar bootstrap de este estadístico.

---

<sup>21</sup> Aplicación del método Bootstrap al contraste de hipótesis en la investigación educativa. Javier Gil Flores, tomado de la revista de educación en la Universidad de Sevilla.

*Procedimiento.* Usamos el programa Minitab para generar las 40 muestras bootstrap usando la facilidad del muestreo con reemplazamiento. La mediana fue calculada para cada una de estas 40 muestras y rangos desde 0.805 a 3.17. La estimación del error estándar bootstrap dado por la ecuación (3.4) fue 0.4116.

### *Conclusiones.*

Para ayudar a interpretar estos resultados ahora manifestaremos que los datos están ordenados y generados de una muestra aleatoria para una distribución exponencial con media  $\mu = 3$ . La mediana teórica de esta distribución es  $\theta = 2.079$ .

Una regla general de indicación usada en bootstrap deberíamos aceptar un valor hipotético de un parámetro  $\theta$  si la muestral equivalente estimada (aquí la mediana muestral) yace dentro de dos desviaciones estándares de ese valor hipotético. Tomando las estimaciones bootstrap del error estándar, como una estimación razonable de esta desviación estándar en este ejemplo la diferencia  $2.079 - 1.6705 = 0.404$  es menos que este valor estándar estimado, los cuales aquí es 0.4116.

### *Comentario.*

1. Inquieta el hecho que si las 40 muestras bootstrap den una estimación confiable del error estándar bootstrap verdadero. En efecto, cumple un requisito implícito para la validez del cálculo robusto mencionado anteriormente, esto se basa en las suposiciones que el error estándar bootstrap verdadero está razonablemente próximo al estimador del error estándar conocido.

En este ejemplo donde la muestra tiene una distribución conocida, una expresión analítica del estimador del error estándar para la mediana de una muestra de tamaño  $n$  llamado:

$$se(\text{median}) = 1/(4nf^2)^{1/2} \quad (3.5)$$

Donde  $f$  es la función de densidad de probabilidad común en la mediana. Digamos si tenemos una distribución exponencial con media 3 eso puede ser demostrado que  $f = 0.1667$  y donde  $n = 30$  entonces  $se(\text{median}) = 0.5476$ .

Anteriormente vimos que el estimador del error estándar bootstrap, 0.4116, es una subestimación del error estándar verdadero. Éste es un sesgo introducido ya que la muestra seleccionada tiene una mediana  $m = 1.675$ , el cual es apreciablemente menor que la mediana poblacional  $\theta = 2.079$ .

Esta situación no es muy diferente para el caso de las pruebas conocidas. Recordemos que cuando iteramos una muestra y éste se distribuye normalmente, el estimador muestral  $s^2$  de  $\sigma^2$  difieren en cada una de las muestras. Esto es por que, cuando  $\sigma^2$  es desconocida, la prueba - t es usada.

Ahora bien, si asumimos que la mediana poblacional fuese igual a la mediana muestral de 1.675, entonces el error estándar del estimador de la mediana -asumiendo que nuestra muestra fuera de una distribución exponencial- con esta mediana podría ahora ser 0.4412, concluyendo que el estimador bootstrap obtenido es 0.4416.

2. El bootstrap puede ser usado para obtener un intervalo de confianza estimado para un parámetro como la mediana.

3. En este ejemplo consideramos una muestra para una distribución conocida y por ello, fue capaz de apelar algunos resultados teóricos para el error estándar de la mediana porque  $f$  fue conocido en la ecuación (3.5). Si no conociéramos a  $f$  o sospechábamos que la muestra fue de una mezcla de distribuciones o que algunas observaciones podría ser valores atípicos el bootstrap podría ser un serio competidor también, digamos, los procedimientos de prueba de signo. Exploraremos este punto más adelante en el Ejemplo 3.5.

### ***3.3.3 Los Intervalos de confianza Bootstrap***

El método Bootstrap con frecuencia es usado para obtener intervalos de confianza aproximados y muchos autores han estado escribiendo acerca de su interpretación y propiedades. Las aproximaciones simplistas padecen de dos defectos, el primero es un sesgo que presentamos en breve en el tema 3.3.4 y el otro es que a menudo tienden a proveer menos de la definida confianza, por ejemplo un intervalo calculado de forma que tenga un 95 por ciento de confianza sólo puede ceder aproximadamente el 91 o 92 por ciento de confianza. En un nivel básico Efron y Tibshirani (1993, Sección 14.2) listan 5 formas diferentes para calcular intervalos de confianza usando el bootstrap.

A continuación se presentan 2 métodos a través de los cuales se pueden construir intervalos de confianza Bootstrap:

### 1. Método de aproximación normal.

Comenzamos nuestra discusión a partir del resultado conocido que dado una muestra de  $n$  para una distribución normal con varianza  $\sigma^2$  el 95 por ciento de los límites de confianza para la media poblacional  $\mu$  es  $\bar{x} \pm 1.96\sigma/(\sqrt{n})$  donde  $\bar{x}$  es la media muestral. Si  $\sigma$  es desconocido reemplazamos el error estándar verdadero  $\sigma/(\sqrt{n})$  por su estimador muestral  $s/(\sqrt{n})$  y 1.96 por el apropiado cuantil de la distribución t con  $n-1$  grados de libertad, donde

$$s = \sqrt{\left\{ \left[ \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \right] / (n-1) \right\}}.$$

Para valores de  $n > 30$ , la distribución t es muy aproximada a la distribución normal estándar. Las modificaciones para otros niveles de confianza son veraces. En la práctica los límites dados en el párrafo anterior son ampliamente usados aunque haya poca evidencia que la muestra proviene de una distribución normal, más bien se confía en el teorema del límite central, pese a su naturaleza asintótica (incluso para un moderado  $n$ ).

Este resultado fundamental para la inferencia paramétrica estimula dos acercamientos del tipo intervalos de confianza bootstrap. El primero es para muestras razonablemente grandes donde los límites de un intervalo de confianza del 95% para un parámetro  $\theta$  puede ser basado en un estimador muestral  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  y están dados por  $\hat{\theta} \pm 2se^*(\hat{\theta})$  donde  $se^*(\hat{\theta})$  es una estimación del error estándar bootstrap basado en  $B$  muestras bootstrap. Para muestras de una población normal esto surte efecto para la media porque puede mostrarse que en tal caso el error estándar bootstrap es una buena aproximación para el error estándar estimado (aunque se nota un sesgo sin importancia). Sin embargo, como hemos enfatizado el bootstrap es más útil cuando la teoría analítica es inexistente o es altamente dependiente de distribución y por consiguiente cualquier teoría paramétrica no puede tener aplicación para una muestra particular. La experiencia ha demostrado que el método bootstrap no traslada adecuadamente sus propiedades para tales situaciones. Esto es en parte, debido a la inclinación potencial en los errores estándar bootstrap, pero más importante aún porque los intervalos de confianza basados en la simetría acerca de un estimador  $\hat{\theta}$  son inapropiados si ese estimador tiene una distribución sesgada.

2. Aproximación basada en los cuantiles.

Entre los más fáciles para realizar aproximaciones de intervalos de confianza basados en la distribución de un apropiado estimador bootstrap,  $s(x^{*b})$  de cada  $B$  muestra bootstrap. Cuando  $B$  es grande, entonces los  $s(x^{*b})$  son razonablemente libres de sesgos en la distribución de  $s(x^{*b})$  y es probable aproximar la distribución del estimador del parámetro  $\theta$  de interés.

Una forma obvia para estimar un intervalo de confianza del 95 % obtenemos los cuantiles 0.025 y 0.975 de la distribución de los  $B$  estimadores  $s(x^{*b})$  calculados, ya que al determinar el extremo inferior del intervalo obtenemos  $1 - 2\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.025$ .

Así mismo, si  $B = 1000$  los límites para un intervalo de confianza del 95% para valores grandes de  $s(x^{*b})$  estará entre el 25-ésimo y 97-ésimo.

De manera general, los límites para un intervalo de confianza de  $(1 - 2\alpha)100\%$  con  $B$  muestras bootstrap, para valores grandes de  $s(x^{*b})$  estará entre:

$$\alpha B - \text{ésimo} \text{ y } (1 - \alpha)B - \text{ésimo} .$$

Para valores no enteros de tales cuantiles es bastante normal aproximarlos a un número entero. Los intervalos de confianza formados de este modo son los llamados intervalos basados en los cuantiles. Las desventajas principales de estos intervalos de confianza son que ellos pueden ser engañosos debido al sesgo y tienden a dar menos cobertura nominal. El efecto del sesgo es que las verdaderas probabilidades asociadas con cada cola no son iguales la una con la otra y que depende grandemente de la dirección del sesgo.

Ejemplo 3.4

*El problema.* Para los datos del ejemplo 3.3 obtenga intervalos de confianza basados en cuantiles del 95% y 99% usando la mediana poblacional de 2,000 muestras bootstrap. Los datos son:

0.04	0.06	0.27	0.32	0.33	0.40	0.50	0.63	0.69	0.92
1.09	1.10	1.35	1.61	1.66	1.69	1.71	1.80	1.98	2.65
2.83	3.50	3.72	3.75	3.99	5.16	5.49	6.31	7.05	16.05

*Formulación y suposición.* Para cada una de 2,000 muestras bootstrap se obtiene la mediana, estos son arreglados en orden ascendentes y los límites apropiados son obtenidos en la forma descrita abajo.

## Capítulo III

---

*Procedimiento.* Obtenemos 2,000 medianas de las muestras bootstrap usando Minitab y arreglados en orden ascendente.

Los límites del 95% están entre el 50-ésimo y 1950-ésimo posiciones respectivamente, ya que al verificar la generalidad expuesta anteriormente se tiene que:

$$2000 * 0.025 = 50$$

$$2000 * 0.975 = 1950$$

Para nuestras muestras resultaron ser los valores de  $s(x^{*b})$  en las posiciones 50 y 1950.

$$[0.92, 2.83]$$

Similarmente, los límites del 99% se encuentran en las posiciones 10-ésimo y 1990-ésimo respectivamente y los valores del intervalo de confianza serán

$$[0.69, 3.50]$$

Igual el hecho de verificar la generalidad, al calcularlos se tiene:

$$1 - 2\alpha = 0.99, \text{ despejando } \alpha \text{ es igual a } \alpha = 0.005$$

Entonces los límites establecidos para un 99% son:

$$2000 * 0.005 = 10$$

$$2000 * 0.995 = 1990$$

*Conclusión.* Estimaciones basadas en cuantiles, para intervalos de confianza del 95% y 99% para la mediana poblacional son

$$(0.92, 2.83) \text{ y } (0.69, 3.50).$$

*Comentario.*

1. Es interesante comparar éstos intervalos de confianza con los basados en el procedimiento de prueba del signo. Bajo ese procedimiento el intervalo  $(0.92, 2.83)$  tiene una cobertura del 95.72% exactos y el intervalo  $(0.69, 3.50)$  tiene una cobertura del 99.48%, entonces virtualmente no hay evidencia del potencial de los intervalos basados en los cuantiles con los intervalos basados en los signos.

2. Para nuestras 2,000 muestras el error estándar estimado de la mediana bootstrap resultó ser 0.4213, muy próximo a la estimación 0.4116 obtenida en el Ejemplo 3.2 de sólo 40 muestras. Es común experimentar que con el método bootstrap muestras de 100 o menos dan buenas estimaciones de errores estándar, mientras que muestras de 1,000 o más son necesarias para satisfacer en cuantiles o estimaciones relacionadas a intervalos de confianza.

3. Dado que la muestra asimétrica [conocemos los hechos que vinieron de una distribución asimétrica (ver Ejemplo 3.3)] aproxima los intervalos de confianza basados en la estimación del error estándar bootstrap no son apropiados incluso si las estimaciones del error estándar fueran buenos. Al contrastar este hecho usaremos el método de la normalidad con 95% los límites de confianza son  $1.675 \pm 2(0.4213)$ , por lo tanto dando insatisfactoriamente el intervalo  $(0.83, 2.52)$ .

### 3.3.4 Técnicas Relacionadas

Aunque no fue claro en nuestros ejemplos, el bootstrap frecuentemente conduce hacia estimadores sesgados. En algunos casos teóricos los ajustes pueden ser hechos para extraer sesgo y los métodos bootstrap existentes para las estimaciones del sesgo no proporcionan buenos resultados. Por lo que en muchas aplicaciones prácticas los sesgo están más fácilmente estimados por una técnica más antigua llamada el jackknife. La idea fue introducida específicamente para estimaciones sesgadas por Quenouille (1949), pero el nombre jackknife es debido a Tukey (1958). El jackknife no siempre funcionará; en particular no trabajará adecuadamente cuando la mediana es usada como un estimador. Muchos estimadores comúnmente usados están sesgadas excepto tal vez cuándo las suposiciones distributivas fuertes son hechas. Ciertamente uno de los muy pocos estimadores universalmente insesgados de uso común es la media muestral, lo cual es insesgado cuando es usado como un estimador de la media poblacional. Un ejemplo de estimador sesgado es la variancia muestral  $s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / n$  como estimador de una variancia poblacional  $\sigma^2$ . Aquí el sesgo es

fácilmente estimado porque es bien conocido que  $E(s^2) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$ , entonces el sesgo es  $-\frac{\sigma^2}{n}$ .

Dada una muestra  $n$  con cierto parámetro  $\theta$ , un parámetro análogo a  $\theta$  será el estimador del parámetro de la muestra denotado por  $\hat{\theta}$ , formaremos  $n$  estimadores más reemplazando a la muestra original por un conjunto de muestras idénticas (dentro de ese conjunto de estimadores se formaran con las muestras generadas excluyendo a la original) en cada repetición una observación es excluida. Éstas muestras son llamadas muestras jackknife. Así la  $i$ -ésima muestra jackknife es

$$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

denotamos el estimador de  $\theta$  basado en la muestra con  $x_i$  omitido por  $\hat{\theta}_{(i)}$  y la media de  $\hat{\theta}_{(i)}$  por  $\hat{\theta}_{(.)}$ , es decir,

$$\hat{\theta}_{(.)} = \sum_i \hat{\theta}_{(i)} / n$$

Finalmente el estimador jackknife,  $\theta^h$  de  $\theta$  es

$$\theta^h = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_{(.)} \quad (3.6)$$

y el estimador jackknife del sesgo es

$$sesgo(\hat{\theta}) = (n-1)(\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}) \quad (3.7)$$

la noción de (3.6) y (3.7) es para que ambos, la media muestral y la varianza muestral como estimador de la correspondiente ecuación (3.6) de parámetros poblacionales dan estimadores insesgados de estos parámetros y (3.7) estima correctamente el sesgo de la media muestral como un estimador de la media poblacional como cero y la varianza muestral como estimador de la varianza poblacional tiene un sesgo de  $-\frac{\sigma^2}{n}$ . En general, la ecuación (3.7) no reduce el sesgo de cada estimador para hacer cero ni tampoco la ecuación (3.6) siempre provee un estimador insesgado de cualquier parámetro. Sin embargo, la última propuesta reduce generalmente cualquier sesgo en  $\hat{\theta}$ . El jackknife es usado en asociación con el bootstrap para reducir sesgo y hacer otros mejoramientos a estimación bootstrap es discutido por Efron y Tibshirani (1993) y por Davison e Hinkley (1997).

### ***3.3.5 Utilización del Bootstrap en la Investigación Educativa***<sup>22</sup>

Una clara utilidad de estas técnicas está en la posibilidad de hacer frente a los problemas de inferencia estadística en las situaciones en las que los supuestos sobre la población son insostenibles y los métodos paramétricos tradicionales no resultan adecuados. En el ámbito de la investigación educativa, y de la investigación social en general, el supuesto de normalidad puede llegar a ser poco realista en algunos casos. Algunos estadísticos han denunciado el abuso que se hace de las leyes de probabilidad, y en especial de la ley normal.

Otra situación que aconsejaría el recurso o método Bootstrap se da cuando trabajamos con estadísticos para los cuales no se dispone de supuestos acerca de la forma adoptada por su distribución muestral. Es el caso, por ejemplo, de la diferencia de medianas o la asimetría, cuya

---

<sup>22</sup> Aplicaciones del método Bootstrap al contraste de hipótesis en la investigación educativa. Por Javier Gil Flores, tomando de referencia la revista de educación en la Universidad de Sevilla.

distribución muestral es desconocida y, en consecuencia, no contamos con métodos paramétricos que permitan la inferencia estadística.

### *Ejemplos de aplicación del Bootstrap para el contraste de dos grupos*

Una situación familiar en los diseños de investigación, tanto experimental como causal-comparativos, es la comparación de grupos a fin de determinar si existen diferencias significativas entre ellos. A esta situación corresponden los dos ejemplos que desarrollaremos, en los que se realizan contrastes de hipótesis.

En el primero de ellos basaremos el contraste en el estadístico de diferencia de medias, mientras que en el segundo caso recurriremos al cálculo del estadístico *t* de Student, que suele ser el habitualmente empleado desde enfoques paramétricos.

La implementación de este método requiere el recurso de herramientas informáticas. Los paquetes estadísticos de mayor difusión no suelen incluir procedimientos automatizados para realizar el Bootstrap.

#### Ejemplo 3.5

- **Contraste basado en la diferencia de medias**

En el primero de los ejemplos de aplicación del Bootstrap al contraste de hipótesis, trabajaremos con datos extraídos del estudio de Gil y Jaén (2001) sobre una estrategia docente utilizada en la enseñanza de los métodos cualitativos de investigación educativa a estudiantes de Pedagogía.

Tras utilizar una metodología didáctica basada en la realización de proyectos de investigación por parte de los alumnos, se quiso evaluar la experiencia recurriendo, entre otros aspectos, a los resultados logrados en términos de cambio de las actividades hacia la investigación. Se utilizó una escala de medición de actitudes hacia la investigación cualitativa, administrada antes y después de la experiencia a fin de comprobar el modo en que podrían haberse modificado las actitudes de partida en el grupo de alumnos que cursan la materia. En total, el instrumento constaba de 20 ítems o afirmaciones, ante los que el alumno debía manifestar su grado de acuerdo conforme a una escala de seis puntos.

Recogidos los datos, pudo calcularse la puntuación total en cada una de las aplicaciones del instrumento. La comparación entre la media alcanzada por el grupo de alumnos antes y después de la experiencia aportaría información sobre la posible modificación de actitudes hacia la investigación cualitativa, y en particular sobre la mejora de éstas.

Siguiendo el procedimiento convencional, habría que basarse en los valores promedio de ambos grupos, sometiendo a contraste la hipótesis nula de que son iguales las medias en las poblaciones de las que fueron extraídas las respectivas muestras observadas. Bajo la hipótesis nula, el estadístico T, construido a partir de la diferencia de medias, se distribuiría siguiendo una distribución t de Student para un número determinado de grados de libertad. Si el valor observado se aleja suficientemente del valor medio de la distribución, que según la hipótesis nula es cero, podríamos rechazar el supuesto de partida.

La aplicación de un contraste basado en el estadístico t de Student requeriría la comprobación de supuestos previos tales como la normalidad de las variables estudiadas. Cuando la distribución del estadístico de contraste no sigue el modelo de la t, bien porque la variable estudiada no se distribuye normalmente en la población o bien porque el tamaño muestral resulta insuficiente, podríamos estar cometiendo un error en la inferencia.

En la situación que tomamos como ejemplo, la asignatura en la que se desarrolló la experiencia contaba con tan sólo seis alumnos matriculados, dado su carácter optativo cuatrimestral, la existencia de horario único en turno de tarde y la presencia de otras materias optativas que atraen el interés del alumnado. En la primera aplicación de la escala se recogieron respuestas para los seis alumnos, mientras que en la aplicación final sólo pudo calcularse la puntuación total para cinco alumnos, dado que uno de ellos no respondió a la totalidad de los ítems. Consideremos que se trata de muestras no relacionadas, dado que el carácter anónimo de la escala impediría establecer una correspondencia entre las escalas previas y posteriores a la intervención. Así pues, la información de partida sería la proporcionada por las muestras.

$$z = \{68, 73, 76, 80, 85, 92\}$$

$$y = \{68, 88, 94, 100, 108\}$$

Cuyas medias son respectivamente

$$\hat{z} = 79 \quad \text{y} \quad \hat{y} = 91.6$$

Ante grupos tan pequeños, la suposición de normalidad parece arriesgada. En tal situación, una solución no paramétrica adecuada sería aproximarse al problema a través del método Bootstrap, construyendo nuestro propio modelo para valorar la diferencia de medias observada.

La aplicación del Bootstrap supondría considerar que ambas muestras  $(z, y)$ , proceden de poblaciones  $(F, G)$  posiblemente diferentes, y someter a contraste la hipótesis nula  $H_0 : F = G$ .

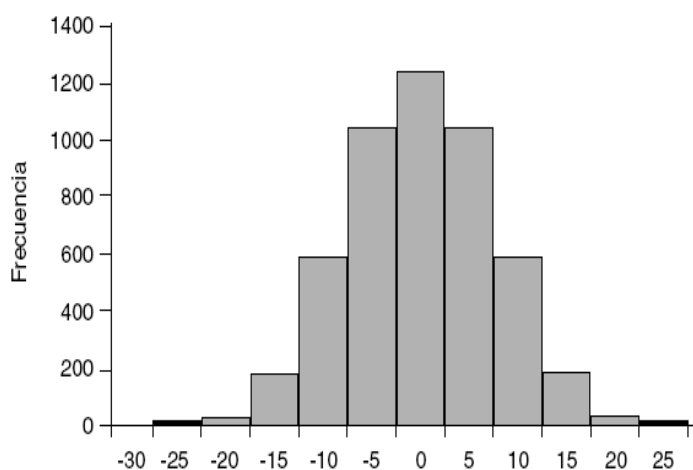
Para el contraste, utilizaremos el estadístico diferencia de medias, que en este caso alcanza un valor observado  $\bar{y} - \bar{z} = 12.6$ , y estudiaremos el modo en que se distribuye tal estadístico en un conjunto elevado de muestras generadas por remuestreo. El algoritmo que seguiremos es el siguiente:

- Si  $H_0$  es cierta,  $z$  e  $y$  proceden de una población común. Para generar muestras de esa población común, utilizaremos la información disponible, que no es otra que la proporcionada por ambas muestras. Así pues, combinando los elementos de  $z$  e  $y$ , obtenemos  $x = \{z, y\}$  que constará de los 11 valores registrados. A partir de  $x$ , extraemos con reposición una muestra de tamaño  $n = 11$ , denominando  $z^*$  a los 6 primeros valores, e  $y^*$  a los 5 restantes.
- Calculamos para la muestra extraída el valor del estadístico  $\bar{y}^* - \bar{z}^*$ , en el que basaremos el contraste de hipótesis.
- Repetimos los pasos anteriores un número elevado de veces. El número de repeticiones, y por tanto de muestras extraídas, será de 5,000 siguiendo las recomendaciones de Chernick (1999, p.114), que considera esta cifra adecuada para la mayor parte de los problemas planteados.
- Construimos la distribución de frecuencias para el estadístico  $\bar{y}^* - \bar{z}^*$ . En la tabla 3.1 se recogen frecuencias absolutas y relativas (porcentajes) para intervalos de valores de amplitud 5, denotados por su punto medio. Esta misma distribución de frecuencias se ha representado gráficamente mediante el histograma que mostramos en la figura 3.1

Tabla 3.1 Distribución muestral empírica para el estadístico  $\bar{y}^* - \bar{z}^*$

$\bar{y}^* - \bar{z}^*$	Frecuencia	%	% acumulado
-30	1	0.0	0.0
-25	9	0.2	0.2
-20	38	0.8	0.10
-15	186	3.7	4.7
-10	568	11.4	16.0
-5	1073	21.5	37.5
0	1256	25.1	62.9
5	1073	21.5	84.1
10	549	11.0	95.1
15	196	3.9	99.0
20	43	0.9	99.8
25	8	0.2	100.0
Total	5000		

Gráfico 3.1 Histograma para los valores observados del estadístico  $\bar{y}^* - \bar{z}^*$



La distribución obtenida constituye una estimación por medio de Bootstrap de la distribución muestral para el estadístico diferencia de medias. Si contamos el número de veces que la diferencia de medias supera o iguala el valor observado en las muestras originales, que es 12.6, podremos obtener la frecuencia relativa, consideramos como una aproximación a la probabilidad de encontrar una diferencia de medias igual o mayor a la observada, aceptando la hipótesis nula como cierta,:

$$\text{Pr } ob_{H_0} \{(\bar{y}^* - \bar{z}^*) \geq 12.6\} = \# \{(\bar{y}^* - \bar{z}^*) \geq 12.6\} / 5,000 = 0.0478$$

Donde  $\text{Pr } ob_{H_0}$  es la probabilidad de la hipótesis nula de prueba, es decir, la probabilidad del estadístico que excede a 12.6 es igual al número de frecuencia de los casos que superan a 12.6 entre el total de las muestras extraídas. Estimada a partir de la distribución empírica, en la que 239 muestras han dado lugar a diferencias iguales o mayores que 12.6, el valor de esta probabilidad resulta ser  $p = 0.0478$ .

Trabajando con un nivel de significación de 0.05, podríamos afirmar que existe una diferencia significativa a favor del segundo grupo (contraste unilateral derecho), o lo que es igual, que las actitudes de los alumnos hacia la investigación cualitativa son mejores tras la experiencia realizada en el marco de la asignatura Métodos Cualitativos de Investigación Educativa.

### Ejemplo 3.6

#### Contraste basado en el estadístico t

El segundo de los ejemplos que presentamos fue tomado de la experiencia realizada por Gill y García (2002), consiste en la utilización y valoración de una Guía Interactiva sobre investigación Educativa, diseñada para orientar a los alumnos de Ciencias de la Educación sobre las posibilidades de realizar investigación educativa, tanto desde el contexto académico como profesional, y motivarles hacia la misma. Dicha experiencia se llevó a cabo con estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla, que cursaban asignaturas de métodos de investigación educativa en el curso académico II- 2001.

Tabla 3.2 Distribuciones de frecuencias y estadísticos descriptivos para las valoraciones en cada grupo.

Grupo z	
Valor	Frec.
1	1
2	5
3	9
4	6
5	3
$\bar{z} = 3.21$	$S_z = 1.06$

Grupo y	
Valor	Frec.
1	0
2	1
3	8
4	14
5	4
$\bar{y} = 3.78$	$S_y = 0.75$

Entre las técnicas utilizadas para obtener las opiniones de los usuarios, se recurrió a una escala de valoración, que los alumnos y alumnas completaron una vez examinado el material multimedia. Éstos otorgaron una puntuación comprendida entre 1 y 5 a diferentes aspectos, entre los que se encuentra el hecho de que la información contenida en la Guía constituya un estímulo para hacer investigación. Para determinar diferencias entre el poder motivador que se atribuye a la Guía en distintos colectivos destinatarios de la misma, consideraremos las valoraciones realizadas por 24 alumnos de 2° año de Pedagogía (grupo z) y 27 alumnos de 1° año de Psicopedagogía (grupo y). En la tabla 3.2 se incluyen las correspondientes distribuciones de frecuencias, así como los estadísticos media y desviación típica para las valoraciones obtenidas de ambos grupos.

Teniendo en cuenta que ambos grupos poseen experiencias académicas y expectativas diferentes, y a la vista de los estadísticos media que se alcanzan, podría sospecharse la existencia de formas diferenciadas de valorar la capacidad estimuladora del material multimedia diseñado. Para comprobarlo, someteremos a contraste la hipótesis nula de igualdad de medias.

En este caso, no se verifica el supuesto de normalidad exigido para la aplicación de un contraste paramétrico basado en el estadístico t. La prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov – Smirnov, utilizada para comprobar la hipótesis nula de que no hay diferencias significativas entre la distribución empírica y el modelo de distribución normal, arrojó para los grupos de alumnos de Pedagogía y Psicopedagogía niveles de significancia  $p = 0.277$  y  $p = 0.026$  respectivamente. En consecuencia, puede afirmarse para el segundo grupo que la

muestra fue extraída normalmente, y hablando en términos estrictos, la distribución muestral del estadístico  $t$  no puede ser identificada con un modelo teórico de distribución.

De cara a hacer frente a esta situación, una alternativa no paramétrica se encuentra en la aplicación del método Bootstrap para el contraste de medias. Aunque podríamos seguir un procedimiento simple similar al mostrado en el primero de los ejemplos, que mostrábamos en el apartado anterior, aquí recurriremos al estadístico  $t$ , ejemplificando el modo en que los procedimientos tradicionales pueden ser reenfocados desde la óptica de las técnicas de remuestreo. Un modo de actuar sería el que describimos seguidamente:

- Combinamos los datos disponibles, que son los obtenidos para los grupos  $z$  e  $y$ , obteniendo el conjunto  $x = \{z, y\}$  que consta de un total de 51 valores. Extraemos por muestreo aleatorio con reposición una muestra  $x^*$  de tamaño  $n = 51$ , constituyendo con los primeros valores una nueva muestra  $z^*$  de tamaño  $p = 24$  y con los restantes una muestra  $y^*$  de tamaño  $m = 27$ .
- Para la muestra  $x^*$ , calculamos el valor del estadístico  $t$ , que vendrá dado por la expresión:

$$t(x^*) = \frac{\bar{y}^* - \bar{z}^*}{\sqrt{\frac{\sigma_y^{2*}}{m} + \frac{\sigma_z^{2*}}{p}}}$$

Donde

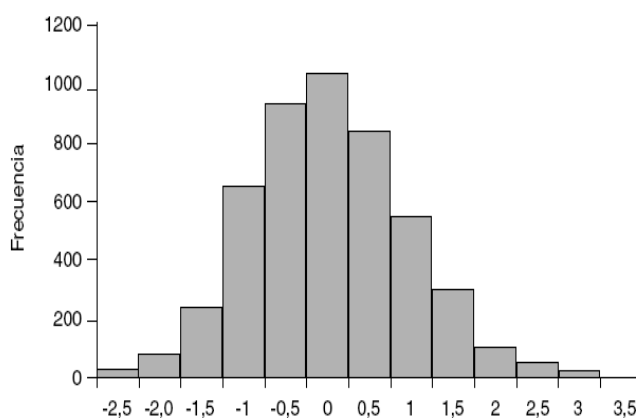
$$\sigma_y^{2*} = \sum_{i=1}^m \frac{(y_i^* - \bar{y}^*)^2}{m-1} \qquad \sigma_z^{2*} = \sum_{i=1}^p \frac{(z_i^* - \bar{z}^*)^2}{p-1}$$

- Hemos adoptado el estadístico  $t$  que se utiliza cuando no se asume el supuesto de igualdad de varianzas.
- Repetimos los pasos primero y segundo un número elevado de veces, que de nuevo en este caso será de 5,000.
- Construimos la distribución de frecuencias para los valores asumidos por el estadístico  $t(x^*)$ . Esta distribución empírica y el histograma elaborado para su representación gráfica se muestran respectivamente en la tabla 3.3 y el gráfico 3.2

Tabla 3.3 Distribución muestral empírica para el estadístico  $t(x^*)$

$t(x^*)$	Frecuencia	%	% acumulado
-2.5	11	0.2	0.2
-2.0	103	2.1	2.3
-1.5	267	5.3	7.6
-1.0	688	13.8	21.4
-0.5	950	19.0	40.4
0	1040	20.8	61.2
0.5	859	17.2	78.4
1.0	566	11.3	89.7
1.5	310	6.2	95.9
2.0	131	2.6	98.5
2.5	57	1.1	99.6
3.0	17	0.3	100.0
3.5	1	0.0	100.0
Total	5000		

Gráfico 3.2. Histograma para los valores observados del estadístico  $t(x^*)$ .



Dado que la ausencia de normalidad impide afirmar que la distribución muestral del estadístico  $T$  sigue el modelo de la  $t$  de Student, tomamos la distribución empírica como base para estimar la probabilidad de encontrar valores iguales o mayores que el valor observado de  $t$  (contraste unilateral derecho), que calculado para las muestras originales es  $t=2,185$ . Puesto que sólo se

alcanza o supera este valor en 75 de un total de 5,000 muestras utilizadas, la probabilidad que buscamos resulta ser:

$$Pr_{ob_{H_0}} \{t(x^*) \geq 2.185\} = \# \{t(x^*) \geq 2.185\} / 5,000 = 0.0150$$

Para un nivel de significación de 0.05, podríamos rechazar la hipótesis nula y afirmar que existen diferencias significativas a favor del segundo grupo, por lo que la capacidad motivadora atribuida a la guía interactiva por los alumnos de Psicopedagogía es mayor que entre los alumnos de Pedagogía.

### *Valoración y Conclusiones*

Un primer aspecto a valorar es la utilidad de los métodos Bootstrap en las situaciones en las que queda comprometida la idoneidad de los enfoques paramétricos clásicos para el contraste de hipótesis. Tanto unos como otros implican partir de la muestra observada con el propósito de llegar a conclusiones sobre una población, pero mientras que la estadística paramétrica se apoya en supuestos sobre la distribución poblacional o sobre sus parámetros, el Bootstrap prescinde de ellos. La corrección de los resultados obtenidos por medio de Bootstrap para la inferencia estadística ha sido demostrada a partir de su utilización en simulaciones, en las que se analizaban muestras extraídas de poblaciones distribuidas normalmente. En tales circunstancias, la aplicación de los métodos paramétricos y métodos Bootstrap dió lugar a resultados similares en la estimación de medias o en la estimación de coeficientes para la regresión (Mooney y Duval, 1993).

Si bien esta comparación permite incrementar la confianza sobre los métodos Bootstrap, también es verdad que si los supuestos en los que se basa la descripción matemática de la población se cumplen, no hay razones para descartar los procedimientos de inferencia estadística que posibilita el enfoque tradicional. La utilidad de este tipo de métodos se hace patente, de manera especial, en aquellas situaciones en las que no es posible justificar los supuestos de partida o cuando no se cuenta con fórmulas analíticas en las que basar nuestra descripción de la población.

En la práctica del análisis estadístico, la alternativa habitual a las pruebas paramétricas para el contraste de hipótesis se ha apoyado en procedimientos que tienen como ventaja el no hacer supuestos sobre las poblaciones o sobre sus parámetros, y que se han englobado bajo la denominación de estadística no paramétrica (Siegel, 1991). Sin embargo, la mayor parte de estas técnicas suponen trabajar con variables a nivel ordinal, reduciendo a rangos las puntuaciones observadas y perdiendo por tanto una parte de la información disponible.

Otro aspecto destacable es la simplicidad con la que puede aplicarse el método Bootstrap. Un ejemplo de ello es la primera de las aplicaciones que aquí hemos presentado, en el cual utilizamos únicamente la diferencia de medias y no precisamos de ningún tipo de expresión algebraica para describir los parámetros de su distribución muestral. Esta simplicidad hace que el método constituya un enfoque atractivo en la enseñanza de la estadística. La simulación a partir de muestras permite trabajar sin fórmulas ni descripciones matemáticas, que no siempre son comprendidas por el alumnado y que a menudo constituyen un obstáculo para el aprendizaje. Un inconveniente de los métodos estadísticos convencionales está no sólo en el manejo correcto de las nociones aritméticas, sino también en la elección correcta de las fórmulas que es preciso aplicar en cada situación. Para algunos estudiantes, el manejo de las fórmulas y métodos estadísticos llega a adquirir un carácter mágico. Saliendo al paso de esta situación, los métodos basados en el remuestreo presentan como ventaja la utilización de técnicas simples e intuitivas basadas en la simulación de un modelo a partir de un número elevado de muestras aleatorias. La resolución de los problemas estadísticos deja de estar vinculada a la pericia matemática y pasa a ser una cuestión de claridad de pensamiento sobre los problemas planteados. A pesar del peso de tales argumentos, los métodos Bootstrap, al igual que otros desarrollos estadísticos de las últimas décadas, siguen estando ausentes en la mayor parte de los textos introductorios a las técnicas estadísticas (Efron, 2000, p. 1295). La introducción en el currículum de este tipo de técnicas, que permiten un acercamiento intuitivo a la estadística, es uno de los retos que siguen pendientes en relación con el desarrollo del Bootstrap.

La viabilidad de poner en práctica enfoques como el Bootstrap se basa en el avance de los ordenadores, cada vez más accesibles, fáciles de usar, y rápidos en la realización de cálculos. La evolución de este tipo de métodos estadísticos basados en la computación intensiva presenta, a juicio de autores como Chernick (1999), un brillante futuro. Cabe esperar que en el horizonte inmediato de la investigación educativa, la utilización del Bootstrap vaya cobrando importancia y la comunidad científica de nuestro ámbito reconozca las posibilidades de esta nueva forma de inferencia estadística, de tal manera que se alcancen niveles de aplicación similares a los que ya se están dando en otras disciplinas.

# Capítulo IV

## Aplicaciones

### Estadística No Paramétrica

### **4.1 Introducción**

En el desarrollo de esta investigación se han venido mencionando aspectos básicos referidos a la Estadística No Paramétrica donde se ha mostrado una variedad de pruebas, cuya utilidad principal es realizar contrastes que no necesitan establecer supuestos sobre las poblaciones originales de las que se extraen las muestras.

Uno de los objetivos que se persigue en este capítulo, es realizar una aplicación específica del uso adecuado de la inferencia estadística no paramétrica, para disponer de herramientas necesarias en el análisis de la información; existen muchas aplicaciones y una diversidad de áreas del conocimiento como: social, económico, biológico, educativa, salud, etc. La aplicación que se presenta en este capítulo estará enfocada en aspectos sociales tomando como base a las Encuestas de Hogares de Propósitos Múltiples 2004 (EHPM) que es una encuesta de suma importancia para el Ministerio de Economía, y que a través de la Dirección General de Estadística y Censos (DIGESTYC) investigan aspectos relacionados a los hogares de El Salvador como: características sociodemográficas, educativas, salud, etc.

Para desarrollar dicha aplicación se trabajará solamente una parte de la muestra total de la EHPM, es decir, el análisis estará enfocado al departamento de San Salvador a jefes/as de hogares.

Este capítulo dispone de las siguientes fases:

- 1- Se establecen objetivos generales y específicos referidos a la aplicación de los Métodos no Paramétricos.
- 2- Se describirán aspectos generales relacionados al contenido de la base de datos, tales como: Descripciones generales referentes a la importancia de la encuesta sobre las variables principales sometidas en estudio.
- 3- Metodología de base para realizar la inferencia Estadística no Paramétrica.
- 4- Desarrollo de la aplicación. Esta fase contendrá la ejecución de la metodología establecida anteriormente.

## ***4.2 Objetivos relacionados a la aplicación***

### ***4.2.1 Objetivo General***

Aplicar la teoría de los Métodos no Paramétricos a las principales variables socioeconómicas de interés de la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples (EHPM) año 2004 para el departamento de San Salvador a jefes/as de hogares.

### ***4.2.2 Objetivos Específicos***

1. Desarrollar una metodología básica que ayude a identificar el tipo de Prueba no Paramétrica, orientados al contraste de hipótesis con respecto a las variables de la EHPM.
2. Realizar pruebas no Paramétricas a variables cualitativas de la EHPM, donde se logre visualizar las pruebas de asociación.
3. Proporcionar una guía de uso sobre el programa estadístico enfocado a las Pruebas no Paramétricas en SPSS.
4. Determinar una clara utilidad de las técnicas bootstrap en la posibilidad de hacer frente a los problemas de inferencia estadística en las situaciones en que los métodos paramétricos tradicionales no resultan adecuados.
5. Ilustrar el procedimiento del método bootstrap realizando una aplicación de procedimientos de remuestreo, concretamente para la estimación de varianza; a través de ciertas variables de interés de la EHPM, al departamento de San Salvador.

### ***4.3 Descripción de la información contenida en la base de datos.***

#### **4.3.1 Conceptos Generales**

El Ministerio de Economía, a través de la Dirección General de Estadística y Censos (DIGESTYC); anualmente presenta los resultados de la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples (EHPM), en la que investigan aspectos relacionados a la población de El Salvador tales como: sus características demográficas, educativas, salud, etc. Y uno de los objetivos que persigue dicha encuesta es generar información estadística actualizada relacionada con las condiciones socioeconómicas y demográficas de la población.

Es preciso mencionar que el levantamiento de información de la EHPM esta sujeta bajo una metodología que implícitamente esta vinculada con las técnicas de muestreo probabilísticas.

- **Cobertura espacial y temporal**

La EHPM 2004 se realizó a nivel nacional en los 14 departamentos del país, cubriendo tanto el área urbana como rural. La encuesta se realizó durante el período comprendido del mes de enero a diciembre de 2003, con el propósito de identificar aspectos que permitan visualizar la situación ocupacional usando como período de referencia, la semana anterior al momento de la encuesta.

- **Módulos continuos**

En la EHPM contiene rubros básicos sobre población (características personales de los miembros de los hogares, edad, sexo, parentesco, etc.), educación, empleo e ingreso, salud, remesas familiares y gastos del hogar.

Los módulos continuos son:

- a. **Características Sociodemográficas.** A través de este módulo se recabó información estadística sobre la composición y estructura poblacional de los hogares, de tal forma que permita identificar su comportamiento demográfico.

b. **Características de Educación.** Las variables captadas en este módulo permiten caracterizar las principales condiciones de educación de la población encuestada, en relación con la cobertura del sistema educativo.

c. **Características Generales de la Vivienda.** A partir de este módulo se han obtenido indicadores sobre las características físicas, tenencia y servicios básicos de la infraestructura utilizada como vivienda por los hogares encuestados.

d. **Empleo e Ingreso.** La información que se obtiene en este módulo ha permitido producir estadísticas actualizadas sobre las principales variables que caracterizan la situación y tendencia del empleo en el país.

e. **Salud.** A través de este módulo se conocen las condiciones de salud de la población, así como el uso de los servicios de salud al cual recurrió la población.

f. **Remesas Familiares.** La información de este módulo permite mejorar la captación de datos relacionados con el ingreso en el hogar y medir de esta forma, el peso que las remesas tienen en la economía de las familias salvadoreñas.

g. **Gasto del hogar.** Con relación a los datos que se obtienen con este módulo, su captación permite estimar el gasto promedio del hogar, así como el rubro del gasto del hogar (especificación).

### ***4.3.2 Variables importantes de la base de datos***

La DIGESTYC cada año proporciona los resultados respectivos de la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples<sup>23</sup> y en esta oportunidad daremos a conocer algunas variables o indicadores que esta encuesta le da mayor importancia.

1.- Total de hogares

2.- Total de Personas

---

<sup>23</sup> Esta información puede ser consultada en la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples 2004 o en pagina Web: [www.digestyc.gob.sv](http://www.digestyc.gob.sv)

- 3.- Personas por Hogar
- 4.- Población económicamente activa, tanto para mujeres como para hombres
- 5.- Total de ocupados
- 6.- Total de Desocupados
- 7.- Total de analfabetos
- 8.- Escolaridad Promedio
- 9.- Total de ingreso familiar mensual
- 10.- Total de ingreso por hogar
- 11.- Ingreso por hogar mensual
- 12.- Jefes de hogares: hombres y mujeres
- 13.- Total de hogares con remesas familiares
- 14.- Total de remesa familiar mensual
- 15.- Remesa por hogar mensual
- 16.- Gastos de hogar mensual

Como se observa esta encuesta contiene una gran magnitud de información implícitamente relacionado a los hogares y miembros. Resulta que para realizar Pruebas no Paramétricas solamente se hará énfasis de algunas variables que más adelante detallaremos.

Además los niveles de estimación geográfica para los cuales la muestra proporciona información válida son los siguientes:

País: Total, Urbano y Rural

Región: Total, Urbano y Rural.

Departamento y Municipio: Total

Este último aspecto es importante mencionar porque cierta parte de la aplicación se enfocará a nivel de municipio para el departamento de San Salvador.

### 4.3.3 Tamaño de muestra y variables a utilizar en la aplicación.

Después de mencionar las principales variables de la EHPM, la muestra a utilizar corresponde al departamento de San Salvador y que desagregaremos a nivel municipal, como se detalla a continuación:

Tabla 4.1 Números de hogares por Municipio, Departamento de San Salvador

Municipio	No de hogares	Porcentaje
San Salvador	227	6.06
Aguilares	39	1.04
Apopa	273	7.29
Ayutuxtepeque	274	7.32
Cuscatancingo	235	6.28
Delgado	235	6.28
El paisnal	15	0.40
Guazapa	51	1.36
Ilopango	292	7.80
Mejicanos	280	7.48
Nejapa	238	6.36
Panchimalco	236	6.31
Rosario de mora	12	0.32
San Marcos	274	7.32
San Martín	286	7.64
Santiago Texacuango	33	0.88
Santo Tomas	287	7.67
Soyapango	218	5.82
Tonacatepeque	238	6.36
Total	3,743	100.00

Se observa en la tabla 4.1 un total de 3,743 hogares, este total de hogar representan los jefes/as de hogares<sup>24</sup>.

Para desarrollar el análisis inferencial no paramétrico determinamos las variables que utilizaremos en esta aplicación, a continuación mostramos:

- 1.- Área de ubicación del hogar
- 2.- Municipio
- 3.- Número de miembros del hogar
- 4.- Género
- 5.- Último grado aprobado
- 6.- Ingreso individual
- 7.- Ingreso familiar por hogar mensual
- 8.- Gastos del Hogar mensual

<sup>24</sup> El que ejerce la autoridad para tomar decisiones que beneficien o afecten al grupo familiar que tiene a cargo.

### **4.4 Metodología estadística a utilizar**

La metodología que ocuparemos se desarrolla en varias fases:

#### **1.- Se hará una descripción de los variables incluidas en estudio.**

Aquí describiremos cada una de las variables seleccionadas.

#### **2.- Determinación de las variables mediante tipo de escala de dato.**

Las variables son determinadas y especificadas según el tipo de escala para posteriormente ajustarle un método no paramétrico apropiado, simplificando notablemente la clasificación e identificación de las distintas técnicas de análisis de datos.

#### **3- Aplicación del método bootstrap sobre las variables.**

En esta oportunidad presentaremos el Bootstrap, que desde su formalización por Efron (1979) ha llegado a constituirse en el más popular de los procedimientos de remuestreo. Tras revisar de manera introductoria los fundamentos del mismo, analizamos sus posibilidades para la inferencia estadística, y concretamente para el contraste de hipótesis. Las aplicaciones están enfocadas en el ámbito de la investigación social para dos casos de utilización que sirven para ilustrar el procedimiento y valorar este enfoque, cuyo objetivo es realizar una simulación con respecto al remuestreo a través de la muestra seleccionada.

#### **4.- Búsqueda del método no paramétrico apropiado a la variable en estudio.**

Como se ha hecho previamente una clasificación del tipo de dato se nos facilita determinar el tipo de análisis a las variables en estudio, lo siguiente será buscar el método de inferencia no paramétrico más adecuado que permitan contrastar dependiendo de la naturaleza del problema, se mencionan algunas a tratar:

- Pruebas para una muestra: Chi-cuadrado, Binomial, Kolmogorov- Smirnov, Rachas, etc.
- Pruebas para dos muestras independientes.
- Pruebas para varias muestras independientes.
- Pruebas para dos muestras relacionadas. Pruebas de asociación. En esta última aplicación se muestra una pequeña simulación de la importancia relativa que tienen los análisis de datos cualitativos, más bien, un enfoque asociativo de variables.

### *4.5 Estadística no Paramétrica para análisis e interpretación de la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples 2004 a jefes/as de hogares de San Salvador.*

#### 4.5.1 Descripción de variables

Para poder aplicar las técnicas, es necesario conocer el contenido de las variables, que nos ayuden a determinar que tipo de análisis estadístico es el más adecuado. A continuación haremos una descripción sobre éstas.

#### CARACTERÍSTICAS DEMOGRÁFICAS

- Área de ubicación del hogar: Esta variable muestra el número de hogares correspondiente a la zona Urbana o Rural.
- Municipio. Esta variable muestra los municipios correspondientes al departamento de San Salvador.
- Número de miembros de hogar. Contiene el número de miembros por hogar.
- Género: Mediante esta variable podemos determinar el número de mujeres y hombres de cómo esta conformado los hogares de San Salvador.

#### CARACTERÍSTICAS DE EDUCACIÓN

- Último grado aprobado. es la estratificación de acuerdo al grado escolar aprobado en el sistema de enseñanza regular; ejemplo Parvularia (uno a tres años de estudio), Básica (de primero a noveno grado), Media (de primero a segundo o tercer año de bachillerato, según el nuevo sistema educativo), etc.

#### CARACTERÍSTICAS DEL HOGAR

- Ingreso individual. Contiene la sumatoria de todos los ingresos que obtiene el individuo a través de su trabajo laboral y otras actividades extras.
- Ingreso familiar. Contiene los ingresos laborales, no laborales, agropecuarios, remesas y otros ingresos anuales.
- Gasto total del hogar. Gasto total mensual de hogar (gasto en salud, educación, vivienda, transporte, etc.)

**4.5.2 Clasificación de las variables según tipo de datos.**

Para las variables incluidas en el análisis se plantea la siguiente clasificación según nivel de medida en los datos. Entre paréntesis mostramos el nombre de la variable determinada en la base de datos.

Tabla 4.2 Variables según tipo de datos

Variables	Tipo de datos	Justificación
Área (area)	Nominal	Contiene dos tipos de respuestas: Urbana y Rural, en la base de datos esta etiquetada por número pero no necesariamente esta implicando un orden dentro de las categorías.
Municipio	Ordinal	El tipo de dato es cuantitativo discreto, en la base de datos esta etiquetado por número, pero aquí si se establece un orden jerárquico dentro de sus categorías.
Miembros del hogar (miemh)	Razón	El tipo de dato correspondiente a esta variable es de razón por ser cuantitativa continua.
Género (R104)	Nominal	Contiene dos tipos de repuestas: Hombre y Mujer en la base de datos esta etiquetada por número, pero no necesariamente esta implicando un orden de jerarquía dentro de las categorías.
Último grado aprobado (aproba2)	Ordinal	El tipo de dato es cuantitativo discreto, en la base de datos esta etiquetado por número, pero aquí si se establece un orden ascendente dentro de sus categorías.
Ingreso individual (ingre)	Razón	El tipo de dato correspondiente a esta variable es de razón por ser cuantitativa continua.
Ingreso Familiar (ingfa)	Razón	El tipo de dato correspondiente a esta variable es de razón por ser cuantitativa continua.
Gasto del Hogar (gastoh)	Razón	El tipo de dato correspondiente a esta variable es de razón por ser cuantitativa continua.

### 4.5.3 *Búsqueda de Pruebas no Paramétricas.*

Cuando mencionamos búsqueda de Prueba no Paramétrica, nos estamos refiriendo al uso adecuado de las mismas, es decir, se toma en cuenta propiedades o supuestos a considerar para determinar el tipo de análisis a aplicar que puede ser: inferencia clásica paramétrica o no paramétrica. Y uno de los criterios del análisis no paramétrico es el tamaño de muestra, si es menor que 30 automáticamente nos veríamos forzados a aplicarlo, porque es muy difícil ajustarlo o encontrar un tipo de distribución clásica conocida.

A continuación presentaremos diferentes casos donde podríamos hacer uso de las pruebas no paramétricas, según el tipo de dato y número de muestras.

#### Caso 1. Pruebas para una muestra

Este procedimiento es adecuado para averiguar si la distribución empírica de una variable se ajusta a una determinada distribución teórica (uniforme, binomial, etc.) El procedimiento incluye varias pruebas:

- Prueba de Kolmogorov – Smirnov para una muestra. También es una prueba de bondad de ajuste, se adapta mejor a variables cuantitativas.
- Pruebas de Rachas: sirve para evaluar si una determinada secuencia de observaciones es aleatoria, es decir, para estudiar si las observaciones de una determinada muestra son independientes entre si.

#### ● **Aplicación de la Prueba de Kolmogorov – Smirnov**

#### **PROBLEMA 1**

Para los ingresos familiares de jefes/as de hogares del municipio el Paisnal se quiere conocer si se ajustan a una distribución normal con un nivel de significancia del 0.05%.

Los datos son los siguientes

91 602 372 104 260 152 242 46 160 546 124 138 306 228 104

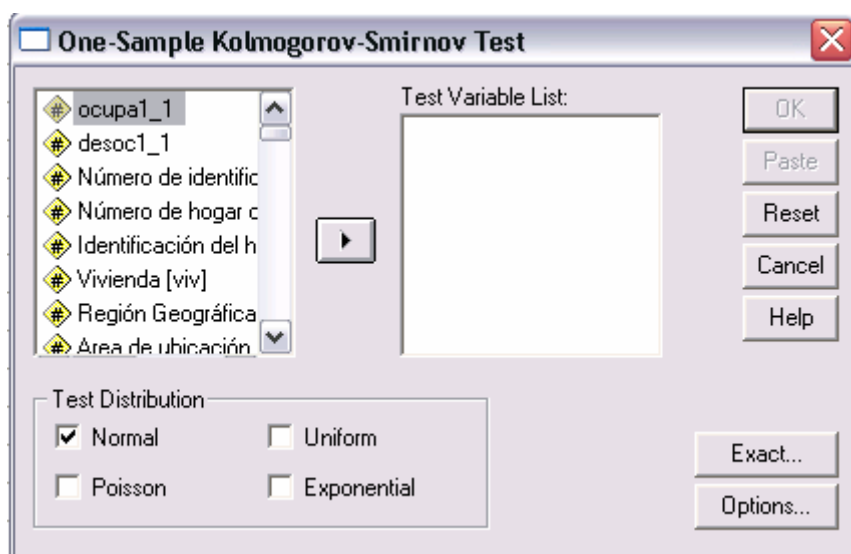
Tabla 4.3 Datos descriptivos del ingreso familiar a jefes/as de hogares del municipio el Paisnal

Descriptive Statistics					
	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Ingreso familiar mensual	15	46	602	231.67	164.924
Valid N (listwise)	15				

La tabla 4.3 recoge la información de la muestra y se tiene que: 15 casos correspondientes a la variable de ingreso familiar mensual, con un valor máximo de \$602 y un valor mínimo de \$46, su media es \$ 231.67 y su desviación estándar es 164.92.

Para obtener la prueba de una muestra de Kolmogorov-Smirnov:

- Abrir la base en SPSS
- Luego en el menú analizar
- Dirigirse a la opción test no paramétrica
- Finalmente elija la opción test de una muestra para K-S, se encontrará con un cuadro de dialogo de esta manera.



En la parte izquierda muestra una lista de variables de la base de datos. Para contrastar la hipótesis de bondad de ajuste referida a una variable cuantitativa:

- ✓ Trasladar la variable ingreso familiar mensual a la Test variable list
- ✓ Elija el tipo de Test Distribution. Las opciones de este apartado permiten elegir la distribución teórica a la cual se desea ajustar la distribución empírica de la variable

seleccionada: Normal, uniforme, Poisson y Exponencial (puede seleccionarse más de una vez).

- ✓ Finalmente aceptar, mostrará un cuadro de salida como el siguiente.

Tabla 4.4: Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra, bajo el criterio de una distribución normal.

	Ingreso familiar mensual
N	15
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean
	Std. Deviation
Most Extreme Differences	Absolute
	Positive
	Negative
Kolmogorov-Smirnov Z	.780
Asymp. Sig. (2-tailed)	.577

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

En el cuadro anterior se ofrecen las diferencias más extremas entre las frecuencias acumuladas empíricas y teóricas (la más grande de las positivas 0.201, la más pequeña de las negativas 0.130 y la más grande de las dos en valor absoluto). Por último, ofrece el estadístico de K-S ( $Z=0.780$ ) y su nivel crítico (significancia asintótica bilateral=0.577). Puesto que el nivel del valor crítico es mayor que 0.05, se puede aceptar la hipótesis de normalidad y concluir que los ingresos familiares de los jefes de hogares del Paisnal se ajustan a una distribución normal.

### Conclusión.

1. Los datos del ingreso familiar del municipio el Paisnal a jefes/as de hogares se ajustan a una distribución normal.
2. Una vez que se obtienen las distribuciones empírica y teórica, el estadístico de K-S se calcula a partir de la diferencia  $D_i$  más grande existente entre  $F(X_i)$  y  $F_0(X_i)$ :

$$Z_{K-S} = \max |D_i| \sqrt{n}$$

Este estadístico  $Z_{K-S}$  se distribuye según el modelo de probabilidad normal  $N(0,1)$ . El SPSS utiliza el método de Smirnov (1948) para obtener las probabilidades concretas asociadas a los valores del estadístico  $Z_{K-S}$ .

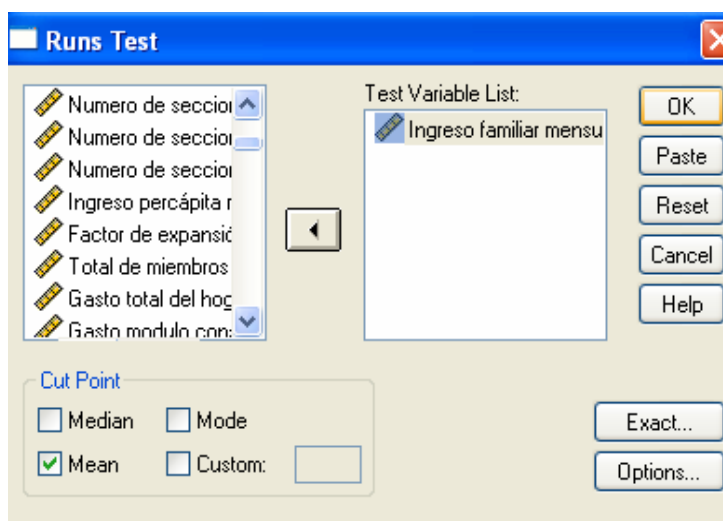
### ● Aplicación de la Prueba de Rachas

Se determinará una prueba de rachas para contrastar la hipótesis de aleatoriedad referida a variable ingreso familiar a jefes/as de hogares del Paisnal. Usaremos los mismos datos del problema 1.

#### PROBLEMA 2

Para obtener la prueba de rachas:

- Abrir la base en SPSS
- Luego en el menú **Analizar**
- Dirigirse a la opción **test no paramétrica**
- Finalmente elija la opción **rachas**, se encontrará con un cuadro de dialogo de esta manera.



En la parte izquierda muestra una lista de variables de la base de datos. Para contrastar la hipótesis de bondad de ajuste referida a una variable cuantitativa:

- ✓ Trasladar la variable ingreso familiar mensual a la ventana "Test variable list".
- ✓ Elija el tipo de Cut Point. Recordemos que para obtener el número de rachas es necesario que las observaciones estén clasificados en dos grupos. Si no lo están, debemos utilizar algún criterio para hacer que lo estén. Si se desea contrastar la hipótesis de independencia referida a una variable cuantitativa, podemos utilizar como criterio de dicotomización (como punto de corte) la mediana, la moda, la media. En ese

caso, los valores más pequeños que el punto de corte pasan a formar parte del segundo grupo. Si se desea contrastar la hipótesis de independencia referida a una variable categórica puede utilizarse como punto de corte la opción personalizada.

- ✓ Finalmente aceptar, mostrará un cuadro de salida como el siguiente.

Tabla 4.5. Pruebas de rachas para la variable ingreso familiar a jefes/as de hogares del Paisnal

Runs Test	
	Ingreso familiar mensual
Test Value <sup>a</sup>	231.67
Cases < Test Value	9
Cases >= Test Value	6
Total Cases	15
Number of Runs	11
Z	1.288
Asymp. Sig. (2-tailed)	.198

a. Mean

La tabla 4.5 comienza indicando el valor utilizado como punto de corte para la dicotomización: Valor de prueba = 231.67. Una nota a pie de tabla recuerda que ese punto de corte es la media. A continuación aparece el número de casos en el primer grupo (Casos < Valor de prueba= 9), el número de casos del segundo grupo (Casos >= Valor de prueba= 6), el número de casos válidos de la muestra utilizada (Casos = 15) y el número de rachas computadas (11). La tabla ofrece, por último el valor del estadístico de contraste (Z = 1.288) y su nivel crítico (significaron asintótica bilateral =0.198). Puesto que el nivel crítico es grande (mayor que 0.05), se puede aceptar la hipótesis y concluir que la secuencia de observaciones estudiada es aleatoria.

### Caso 2. Pruebas para dos muestras independientes

Este procedimiento contiene varias pruebas no paramétricas, todas ellas diseñadas para analizar datos provenientes de una variable categórica (con dos niveles que definen dos grupos o muestras) y una variable cuantitativa al menos ordinal (en la cual interesa comparar los dos grupos o muestras).

El procedimiento incluye varias pruebas:

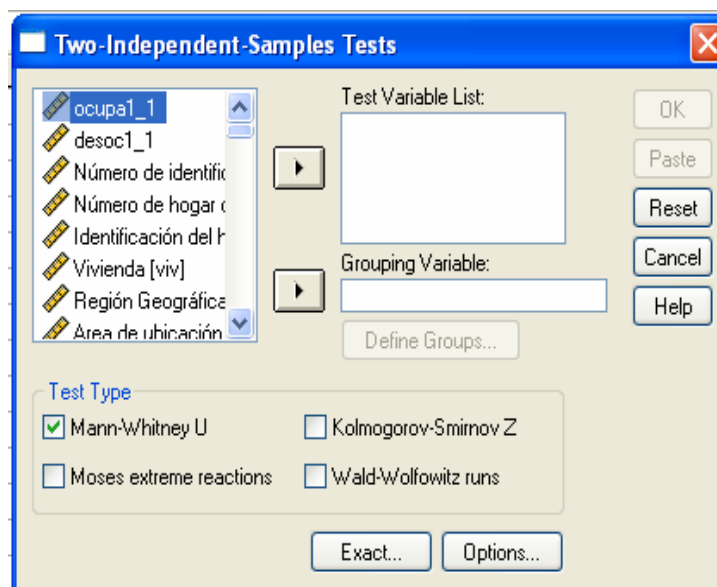
- La prueba de Wilcoxon <sup>25</sup>. Es una excelente alternativa a la prueba  $t$  sobre diferencia de medias cuando: 1) no se cumplen los supuestos en los que se basa la prueba  $t$  (normalidad y homocedasticidad) 2) no es apropiado utilizar la prueba  $t$  porque el nivel de medida de los datos es ordinal.
- La prueba de Kolmogorov – Smirnov para dos muestras. Permite contrastar la hipótesis de que ambas muestras proceden de la misma población, a diferencia de lo que ocurre con la prueba anterior, esta permite comparar la función de distribución empírica de una muestra aleatoria con una distribución acumulativa hipotética
- La prueba de rachas de Wald-Wolfowitz. Al igual que la prueba de Kolmogorov –Smirnov, es sensible no solo a diferencia entre los promedios poblacionales, sino a diferencias en variabilidad, simetría, etc.

Para obtener la prueba de dos muestras independientes, usando el SPSS hay que realizar los siguientes pasos:

- Abrir la base en SPSS
- Luego en el menú **Analizar**
- Dirigirse a la opción **test no paramétrica**
- Finalmente elija la opción **dos muestras independientes**, se encontrará con un cuadro de dialogo de esta manera.

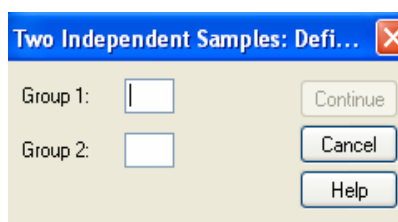
---

<sup>25</sup> El procedimiento que en este apartado estamos llamando prueba U de Mann –Whitney fue originalmente propuesto por Wilcoxon (1945) para el caso de tamaños muestrales iguales ( $n_1 = n_2$ ). Festinger (1946) desarrolló independientemente un procedimiento equivalente al de Wilcoxon. Pero fueron Mann y Whitney (1947) los primeros en extender el procedimiento al caso de tamaños muestrales desiguales y los primeros también en proporcionar tablas para poder utilizar el procedimiento con unas muestras pequeñas.



En la parte izquierda muestra una lista de variables de la base de datos. Para contrastar la hipótesis de bondad de ajuste referida a una variable cuantitativa:

- ✓ Seleccionar la variable que le interesa comparar en los grupos y trasladarla a Test variable list
- ✓ Seleccionar la variable que define los grupos (muestras) que interesa comparar y trasladarlo al cuadro de variable de agrupación.
- ✓ Haga click en el botón definir grupos... para acceder al subcuadro de dialogo Dos muestras independientes: definir grupos como se muestra en el siguiente cuadro el cual permite indicar cuales son los códigos de la variable de agrupación que corresponde a los grupos (muestras) que interesan comparar.



- ✓ En el cuadro tipo de prueba, marcar la opción u opciones correspondientes a las pruebas que se desea obtener.

**PROBLEMA 3**

En este problema se aplicarán las pruebas para dos muestras independientes, los cuales se presentan a continuación:

- Prueba de Wilcoxon o Mann – Whitney
- Prueba de Kolmogorov – Smirnov para dos muestras
- Prueba de rachas de Wald-Wolfowitz.

● **Aplicación de la Prueba de Wilcoxon o Mann - Whitney**

Supongamos que se desea evaluar el gasto por hogar alcanzado por la diferencia de géneros que pertenecen al departamento de San Salvador. Si lo que interesa es contrastar cual de los dos grupos ha alcanzado, en promedio, mayores gastos en los hogares, bastará en comparar los promedios de ambos grupos con alguno de los procedimientos ya estudiados.

Se ha seleccionado una muestra de tamaño 15 de forma aleatoria<sup>26</sup> para el departamento de San Salvador, los datos seleccionados son:

Gasto del hogar	348	357	765	157	416	140	104	366	10	342	215	537	262	466	180
Género	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1

Se verificará la independencia entre poblaciones (género). La siguiente tabla ofrece el tamaño de cada grupo, el rango promedio que resulta de la asignación de rangos a cada grupo y la suma de rangos.

Tabla 4.6. Rangos

		Ranks		
	Género	N	Mean Rank	Sum of Ranks
Gasto total del hogar	Hombre	10	10,10	101,00
	Mujer	5	3,80	19,00
	Total	15		

Observe en la tabla 4.6 que los grupos asignados a este análisis corresponden al género comparando el promedio de gasto por hogar. El número total de jefes de hogares es de 10 y para jefas de hogares es 5. Podríamos decir en términos del rango medio que los hombres

<sup>26</sup> Se ha generado los datos aleatorios en el SPSS

superan a las mujeres significativamente en cuanto a los gastos. Para afirmar lo anterior contamos con el siguiente estadístico de prueba.

La siguiente tabla ofrece el estadístico de U de Mann – Whitney (también ofrece el estadístico W de Wilcoxon, que es una versión equivalente del estadístico U)

Tabla 4.7 Prueba de Mann – Whitney

Test Statistics <sup>b</sup>	
	Gasto total del hogar
Mann-Whitney U	4,000
Wilcoxon W	19,000
Z	-2,572
Asymp. Sig. (2-tailed)	,010
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,008 <sup>a</sup>

a. Not corrected for ties.

b. Grouping Variable: Género

La tipificación de ambos vale  $Z = -2.572$ . Y el nivel crítico bilateral (significación asintótica bilateral) vale 0.008, es menor que 0.05; por lo tanto, se puede rechazar la hipótesis de igualdad de promedios y concluir que los grupos definidos para el género proceden de poblaciones con diferentes gastos de hogar.

● **Aplicación de la Prueba de Kolmogorov – Smirnov para dos muestras**

Esta prueba sirve para contrastar la hipótesis de que dos muestras proceden de la misma población. Para ello compara las funciones de distribución (funciones de probabilidad acumuladas) de ambas muestras. A diferencia de lo que ocurre con la prueba U de Mann-Whitney, que permite comparar dos promedios poblacionales.

Continuando el problema anterior con esta prueba se tiene; la tabla 4.8 ofrece la prueba de Kolmogorov – Smirnov. En primer lugar aparecen las diferencias más extremas (absoluta, Positiva y Negativa) entre las funciones de distribución de ambas muestras.

Tabla 4.8. Prueba de Kolmogorov – Smirnov

		Gasto total del hogar
Most Extreme Differences	Absolute	,800
	Positive	,000
	Negative	-,800
Kolmogorov-Smirnov Z		1,461
Asymp. Sig. (2-tailed)		,028

a. Grouping Variable: Género

A continuación se informa del resultado de la tipificación de la diferencia más extrema en valor absoluto (Z de Kolmogorov – Smirnov=1.461) acompañado de su correspondiente nivel crítico bilateral (Significación asintótica bilateral=0.028). Puesto que el nivel crítico obtenido es menor que 0.05, se puede rechazar la hipótesis de igualdad de distribuciones y concluir que los dos grupos comparados difieren significativamente.

● **Aplicación de la Prueba de Wald – Wolfowitz**

Permite contrastar la hipótesis de que ambas muestras proceden de la misma población. Al igual que la prueba de Kolmogorov – Smirnov para dos muestras, es sensible no solo a diferencia entre los promedios poblacionales, sino a diferencias de variabilidad, simetría, etc. Se muestra la siguiente tabla.

Tabla 4.9. Test de Wald –Wolfowitz

		Number of Runs	Z	Exact Sig. (1-tailed)
Gasto total del hogar	Exact Number of Runs	4 <sup>a</sup>	-1,928	,029

a. No inter-group ties encountered.

b. Wald-Wolfowitz Test

c. Grouping Variable: Género

La tabla 4.9 recoge el resultado de las rachas, como también el estadístico Z y sobre el nivel crítico unilateral (Significación asintótica unilateral) asociado al estadístico. Se observa la presencia de 4 rachas y no hay empates entre grupos, por lo que su nivel de significancia es menor que 0.05 por lo tanto aceptamos que los datos provienen de distintas poblaciones.

### Conclusión.

Para decidir cuando el número de rachas encontrado es lo bastante pequeño como para rechazar la hipótesis de que las muestras proceden de la misma población, el SPSS utiliza dos estrategias distintas dependiendo del tamaño de las muestras. Si  $n > 30$ , utiliza la aproximación normal (ver en el apartado de las rachas para una muestra); pero a diferencia de lo que ocurre en el estadístico  $z$  para una muestra, aquí se utiliza un nivel crítico unilateral; la probabilidad de obtener un número de rachas igual o menor que el obtenido. Si  $n \leq 30$ , el SPSS ofrece el nivel crítico unilateral exacto.

### Caso 3. Pruebas para varias muestras independientes.

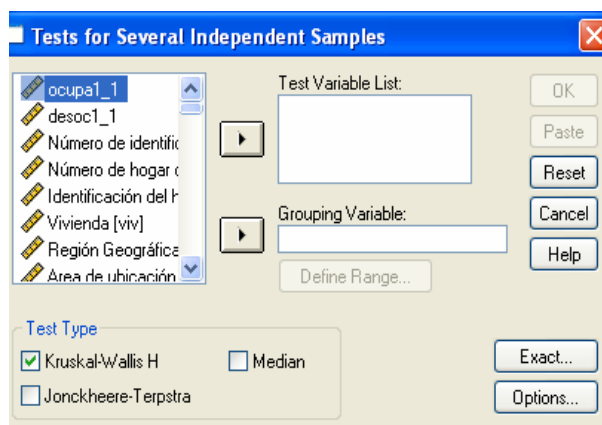
Este procedimiento contiene varias pruebas no paramétricas, todas ellas diseñadas para analizar datos provenientes de diseños con una variable independiente categórica (con más de dos niveles que definen más de dos grupos o muestras) y una variable dependiente cuantitativa al menos ordinal en el cual interesa comparar las muestras. Entre ellas tenemos:

- La prueba H de Kruskal – Wallis. Para dos muestras independientes fue extendida al caso de más de dos muestras por Kruskal y Wallis. La situación experimental que permite resolver esta prueba es similar a la estudiada en el ANOVA de un factor completamente aleatorizado. La ventaja fundamental sobre esta prueba frente al estadístico F del ANOVA de un factor completamente aleatorizado son dos: 1) no necesita establecer supuestos sobre las poblaciones originales tan exigentes como los del estadístico F (normalidad, homocedasticidad); y 2) permite trabajar con datos ordinales. Por contra, si se cumplen los supuestos en los que se basa el estadístico F, la potencia de éste es mayor que la del estadístico H de Kruskal – Wallis.

- Prueba de la mediana. La prueba de la mediana es similar a la prueba chi-cuadrado, en esta se utiliza dos variables una categórica y una cuantitativa. El objetivo de la prueba es contrastar la hipótesis de que las J muestras proceden de poblaciones con la misma mediana.

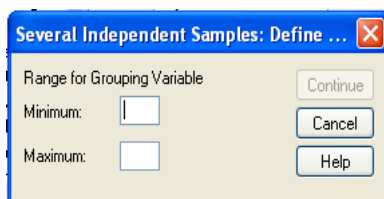
Para obtener la prueba para varias muestras independientes, utilizando el SPSS:

- Abrir la base en SPSS
- Luego en el menú **Analizar**
- Dirigirse a la opción **test no paramétrica**
- Finalmente elija la opción **K muestras independientes**, se encontrará con un cuadro de dialogo de esta manera.



En la parte izquierda muestra una lista de variables de la base de datos. Para contrastar la hipótesis de bondad de ajuste referida a una variable cuantitativa:

- ✓ Seleccionar la variable que le interesa comparar los grupos y trasladarla a Test variable list
- ✓ Seleccionar la variable que define los grupos (muestras) que interesa comparar y trasladarlo al cuadro de variable de agrupación.
- ✓ Hacer click en el botón definir grupos ... para acceder al subcuadro de dialogo Dos muestras independientes: definir grupos como muestra en el siguiente cuadro el cual permite indicar cuales son los códigos de la variable de agrupación que corresponde a los grupos (muestras) que interesan comparar.



- ✓ En el cuadro tipo de prueba, marcar la opción u opciones correspondientes a las pruebas que se desea obtener.

**PROBLEMA 4**

En este problema se aplicaran las siguientes pruebas para varias muestras independientes:

- La prueba H de Kruskal – Wallis
- Prueba de la mediana.

Se desea evaluar el ingreso familiar alcanzado por los jefes/as de hogares de San Salvador clasificado por el último nivel que aprobó. Lo que interesa es constatar si existe diferencia en los grupos, sobre el promedio de los ingresos familiares, bastará en comparar los promedios de los grupos con alguno de los procedimientos (paramétrico o no paramétricos) ya estudiados.

La siguiente tabla ofrece el tamaño de cada grupo (N) y los rangos promedio resultantes de la asignación de rangos al nivel de estudio aprobado para San Salvador:

Tabla 4.10: Rangos

Ranks			
	Ultimo nivel que aprobó	N	Mean Rank
Ingreso familiar mensual	Ninguno	471	1306.98
	Básica	2135	1676.70
	Media	656	2116.45
	Superior universitario	325	2791.52
	Superior no universitario	73	2858.23
	Total	3660	

La tabla 4.11 contiene el estadístico de Kruskal Wallis (ji-cuadrado), sus grados de libertad (gl) y su nivel crítico (sig. asintótica). Puesto que el nivel critico (0.000) es menor que 0.05, se puede rechazar la hipótesis de igualdad de promedios poblacionales y concluir que las poblaciones comparadas difieren en el ingreso familiar, es decir, según el nivel alcanzado así es el ingreso familiar.

Tabla 4.11: Prueba de Kruskal-Wallis

Test Statistics <sup>a,b</sup>	
	Ingreso familiar mensual
Chi-Square	546.739
df	4
Asymp. Sig.	.000

- a. Kruskal Wallis Test
- b. Grouping Variable: Ultimo nivel que aprobó

Las tablas 4.12 y 4.13 sostienen la información relacionada con la prueba de la mediana. La tabla 4.12 muestra el resultado de la dicotomización, es decir, el resultado de clasificar los sujetos de cada categoría de último nivel aprobado por debajo y por encima de la mediana.

## Capítulo IV

Como dato relevante puede observarse en la tabla 4.12 que en la muestra no hay jefes de hogares con educación parvularia, educación especial y ninguna otra educación por debajo y por encima de la mediana de la variable ingreso familiar mensual.

Tabla 4.12: Frecuencias

	Frecuencias							
	Ultimo nivel que aprobó							
	Ninguno	Parvularia	Básica	Media	Superior universitario	Superior no universitario	Educación especial	Otros
Ingreso familiar mens > Median	146	0	929	409	278	66	0	0
<= Median	325	0	1206	247	47	7	0	0

Los datos de esta aplicación son los mismos ocupados en la prueba de Kruskal – Wallis, cuyo objetivo es contrastar igualdad de medianas en las distintas muestras independientes.

Los resultados mostrados en la tabla 4.13 ofrece el tamaño de la muestra (N), el valor de la mediana (median), el estadístico  $\chi^2$  de Pearson (chi-cuadrado), sus grados de libertad (gl) y su nivel crítico asintótico (asimp. Sig.). Puesto que el nivel crítico es menor que 0.05, se puede rechazar la hipótesis de igualdad de promedios poblacionales y concluir que las poblaciones comparadas difieren en el ingreso familiar mensual.

Tabla 4.13: Prueba de la mediana.

Test Statistics <sup>b</sup>	
	Ingreso familiar mensual
N	3574
Median	360.00
Chi-Square	182.314 <sup>a</sup>
df	14
Asymp. Sig.	.000

a. 4 cells (12.5%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is 1.0.

b. Grouping Variable: Ultimo grado que aprobó

## Conclusión

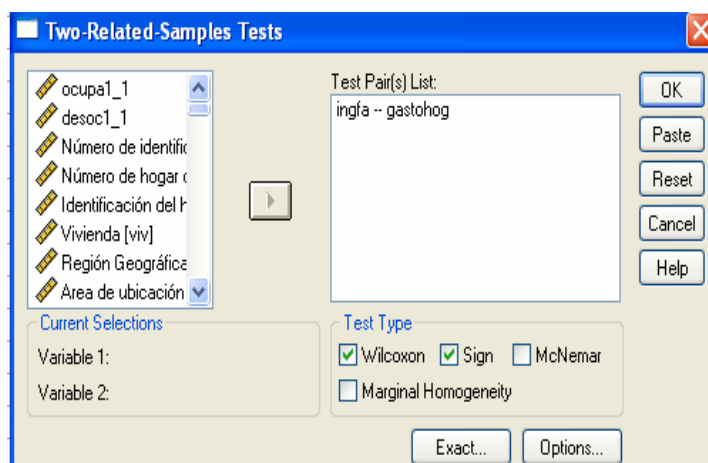
Se puede decir que existen diferencias significativas en cuanto al ingreso familiar para cada nivel aprobado.

### Caso 4. Pruebas para dos muestras relacionadas.

Las pruebas de este apartado permiten analizar datos provenientes de diseños con medidas repetidas. Las pruebas de Wilcoxon y de los Signos sirven para contrastar hipótesis sobre igualdad de medianas. Las pruebas antes mencionadas se ajustan a diseños del tipo antes-después; pero difieren del tipo de variables que permiten analizar.

Para obtener la prueba para varias muestras independientes, utilizando el SPSS:

- Abrir la base en SPSS
- Luego en el menú **Analizar**
- Dirigirse a la opción **test no paramétrica**
- Finalmente elija la opción **2 muestras relacionadas**, se encontrará con un cuadro de dialogo de esta manera.



La parte izquierda de la figura muestra una lista de variables de la base de datos. Para contrastar la hipótesis de bondad de ajuste referida a una variable cuantitativa:

- ✓ Seleccionar la variable que le interesa comparar los grupos y trasladarla a Test Pair(s) list
- ✓ Seleccionar el tipo de prueba que desea contrastar.

**PROBLEMA 5**

Se aplicará en este problema las pruebas para dos muestras relacionadas mencionadas anteriormente, y que a continuación se presentan.

● **Aplicación de la Prueba Wilcoxon y De Signos**

Se quiere conocer si existe relación entre las variables: Ingreso Familiar con Gasto del hogar para el departamento de San Salvador. La tabla 4.14 comienza ofreciendo algunos estadísticos descriptivos para las dos variables seleccionadas: el número de casos válidos en ambas variables (N), la media, la desviación típica, el valor más pequeño (minimum), el más grande (maximum) y los cuartiles.

Tabla 4.14: Estadísticos.

Descriptive Statistics								
	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum	Percentiles		
						25th	50th (Median)	75th
Ingreso familiar mensual	3743	483.26	447.732	1	5378	205.00	360.00	608.00
Gasto total del hogar	3743	348.35	280.358	10	3321	172.00	277.00	438.00

Las dos tablas siguientes contienen información relacionada con la prueba de Wilcoxon. La tabla 4.15 presenta el número, media y suma de los rangos negativos y de los rangos positivos. Las notas al pie de la tabla permiten conocer el significado de los rangos positivos y negativos. También ofrecen el número de empates (casos que no son incluidos en el análisis) y el número total de sujetos.

Tabla 4.15: Rangos

Ranks				
		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Gasto total del hogar - Ingreso familiar mensual	Negative Ranks	2592 <sup>a</sup>	2001.37	5187552.00
	Positive Ranks	1054 <sup>b</sup>	1386.08	1460929.00
	Ties	97 <sup>c</sup>		
	Total	3743		

a. Gasto total del hogar < Ingreso familiar mensual

b. Gasto total del hogar > Ingreso familiar mensual

c. Gasto total del hogar = Ingreso familiar mensual

La tabla 4.16 muestra el estadístico de Wilcoxon (Z) su nivel crítico bilateral (Asymp. Sig. Bilateral). Puesto que el valor del nivel crítico es (0.000) es menor que 0.05, se rechaza la hipótesis de igualdad entre promedios comparados.

Tabla 4.16: Prueba de Wilcoxon.

**Test Statistics<sup>b</sup>**

	Gasto total del hogar - Ingreso familiar mensual
Z	-29.313 <sup>a</sup>
Asymp. Sig. (2-tailed)	.000

a. Based on positive ranks.

b. Wilcoxon Signed Ranks Test

Las tablas 4.17 y 4.18 contienen la información relacionada con la prueba de los signos. La tabla 4.17 muestra las diferencias negativas, las positivas y los empates entre cada par de puntuaciones. Las notas al pie de tabla permiten saber que diferencias se están considerando negativas y cuáles positivas.

Tabla 4.17: Frecuencias.

**Frecuencias**

		N
Gasto total del hogar - Ingreso familiar mensual	Negative Differences <sup>a</sup>	2592
	Positive Differences <sup>b</sup>	1054
	Ties <sup>c</sup>	97
	Total	3743

a. Gasto total del hogar < Ingreso familiar mensual

b. Gasto total del hogar > Ingreso familiar mensual

c. Gasto total del hogar = Ingreso familiar mensual

La tabla 4.18 ofrece el estadístico Z (pues el tamaño de muestra es mayor de 25) y su correspondiente nivel crítico bilateral (asimp. sig. bilateral). Puesto que el valor del nivel crítico (0.000) es menor que 0.05, puede rechazarse la hipótesis de igualdad de promedios y concluir que las variables comparadas (gasto total familiar e ingreso familiar mensual) difieren significativamente.

Tabla 4.18: Prueba de los signos

**Test Statistics <sup>a</sup>**

	Gasto total del hogar - Ingreso familiar mensual
Z	-25.455
Asymp. Sig. (2-tailed)	.000

a. Sign Test

Como se puede observar en ambas pruebas (wilcoxon y signos) se ha llegado a la misma conclusión de que los promedios de ambas variables no son iguales, es decir, que el gasto total familiar difiere significativamente del ingreso familiar.

### 4.5.4 Aplicaciones del Método Bootstrap.

Se tiene que los procedimientos basados con Bootstrap implican obviar los supuestos sobre la distribución teórica que siguen los estadísticos. En su lugar, la distribución del estadístico se determina simulando un número elevado de muestras aleatorias construidas directamente a partir de los datos observados. Es decir, utilizamos la muestra original para generar a partir de ellas nuevas muestras que sirvan de base para estimar inductivamente la forma de la distribución muestral de los estadísticos, en lugar de partir de una distribución teórica asumida *a priori*.

El uso que se hace de las técnicas bootstrap en el ámbito de los estudios sobre aspectos sociales y particularmente en nuestro país, es escaso. Trataremos de realizar una simulación para las siguientes situaciones.

#### Caso 1. Para muestras pequeñas.

Si partimos de una muestra pequeña estaríamos suponiendo que los datos no determinan un tipo de distribución conocido. Lo que buscamos son muestras que podemos aplicar las técnicas bootstrap para estimar parámetros que no hayan partido de una distribución conocida, en esta oportunidad se hará para las variables ingreso familiar y gasto del hogar para el municipio que contenga una muestra pequeña según la tabla 4.1 corresponde al municipio el Paisnal, y así ilustrar la potencialidad que tiene dicho método que a continuación se presenta.

#### Municipio el Paisnal.

#### Variable: Ingreso Familiar

Se quiere realizar una estimación del promedio del ingreso familiar por hogar, para el municipio del Paisnal se tiene una muestra de 15 hogares  $n=15$ , la muestra es la siguiente.

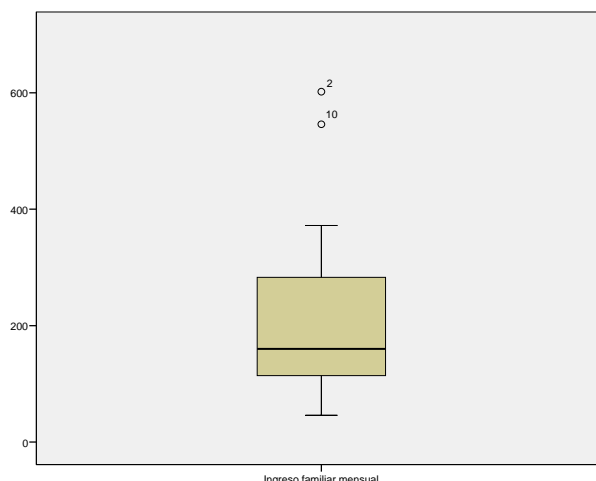
91 602 372 104 260 152 242 46 160 546 124 138 306 228 104.

Para poder aplicar con seguridad la información, determinemos si este conjunto de datos tiene algún dato atípico<sup>27</sup>. Gráficamente se ha detectado que existen datos atípicos y que no está de más verificar a través del método de la mediana.

---

<sup>27</sup> Sugerido en el tema 3.2 del capítulo 3 de esta investigación.

Gráfico 4.1. Caja y Bigote sobre variable ingreso familiar del municipio el Paisnal.



*Procedimiento.* Las observaciones ordenadas son:

$$X = \{46 \quad 91 \quad 104 \quad 104 \quad 124 \quad 138 \quad 152 \quad 160 \quad 228 \quad 242 \quad 260 \quad 306 \quad 372 \quad 546 \quad 602\}$$

La mediana de este conjunto de datos ya ordenados de forma ascendente es  $\tilde{x} = 160$ , en el siguiente cuadro se presenta la desviación absoluta de las observaciones con respecto a la mediana:

Observación $x_i$	$ x_i - med(\bar{x}) $	Resultado	Resultado ordenado
46	$ 46 - 160 $	114	0
91	$ 91 - 160 $	69	8
104	$ 104 - 160 $	56	22
104	$ 104 - 160 $	56	36
124	$ 124 - 160 $	36	56
138	$ 138 - 160 $	22	56
152	$ 152 - 160 $	8	68
160	$ 160 - 160 $	0	69
228	$ 228 - 160 $	68	82
242	$ 242 - 160 $	82	100
260	$ 260 - 160 $	100	114
306	$ 306 - 160 $	146	146
372	$ 372 - 160 $	212	212
546	$ 546 - 160 $	386	386
602	$ 602 - 160 $	442	442

Ordenando estos resultados en la última fila de la tabla encontramos fácilmente su mediana de las desviaciones absolutas, el MAD, es 69.

- Sea  $x^* = 662$ , nuestro estadístico es  $442/69 = 6.4$  para que clasifiquemos 662 como un dato atípico; según lo sugerido en tema 3.2.2, nuestro estadístico debe superar al valor crítico de 5, por ello es considerado dato atípico.
- Sea  $x^* = 546$  encontramos  $386/69 = 5.6$  así que también lo clasificamos como un dato atípico, porque supera el valor crítico a considerar que es 5, es decir que  $5.6 > 5$ .

El conjunto de datos contiene dos datos atípicos,  $x^* = 662$  y  $x^* = 546$  y también fueron verificados gráficamente.

Ante una muestra pequeña, la suposición de normalidad parece arriesgada. En tal situación, una solución no paramétrica adecuada sería tratar el problema a través del método Bootstrap, construyendo nuestro propio modelo para el valor de la media.

El procedimiento utilizado se describe a continuación:

1. Se parte de una muestra original y se obtiene la primer réplica seleccionando una muestra aleatoria con reemplazo de tamaño  $n=15$ .
2. Se obtiene la estimación del promedio.
3. Se regresa cada muestra seleccionada a su muestra original antes de seleccionar la siguiente.
4. Se aplican los tres pasos anteriores en forma sucesiva hasta tener las  $B = 1,000$  réplicas.
5. En este paso se calculará el promedio general de cada estimador resultado obtenido en los bootstrap
6. La varianza se obtiene restando cada estimador generado en cada bootstrap con el promedio general de los estimadores, la diferencia que resulte se eleva al cuadrado y de esta manera vamos a tener 1,000 diferencias de cuadrados, los cuales se suman y se dividen entre  $999(B-1)$ . Las fórmulas que se emplearon para este caso están dadas en el capítulo 3, se presentan los resultados de cada una de las 1,000 réplicas.

RESULTADOS

Tabla 4.19. Valores generados de cada una de las 1,000<sup>28</sup> réplicas, para el ingreso familiar.

Réplica	Estimación
1	285.20
2	282.20
3	254.00
4	213.33
5	246.93
6	203.27
7	278.47
8	213.47
9	266.47
10	223.53
⋮	⋮
991	238.73
992	242.27
993	217.87
994	201.93
995	244.80
996	216.47
997	229.73
998	287.73
999	187.87
1000	186.13
Promedio general	232.05

Desarrollo:

En la tabla 4.19, se presentan los resultados de cada una de las réplicas. El estimador  $\hat{\theta}^*(b) = S(X^{*b})$ ,  $b = 1, \dots, B$  se obtiene sumando los valores de cada una de los valores que han sido seleccionadas en esa réplica. Por ejemplo.

$$1. \hat{\theta}^*(b) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad b = 1, \dots, B.$$

Para la primer réplica se obtuvo que.

$$\hat{\theta}^*(1)_{ingfam} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i}{15} = 285.20$$

Y así se obtienen para las demás réplicas.

<sup>28</sup> Los valores fueron generados en Excel, explicación en anexos.

2. Cuando ya se tienen todas las 1,000 réplicas se calcula el promedio por:

$$\hat{\theta}^*(\bullet)_{ingfam} = \frac{\sum_{b=1}^{1000} \hat{\theta}^*(b)}{B}, \text{ continuando con el ejemplo podemos calcular:}$$

$$\hat{\theta}^*(\bullet)_{ingfam} = \frac{\sum_{b=1}^{1000} \hat{\theta}^*(b)_{ingfam}}{1000} = 232.05$$

3. Su error estándar se obtiene por:

$$se_B = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^B (\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\bullet))^2}{B - 1} \right\}^{1/2}$$

$$se_B = \left\{ \frac{657498.93}{1000 - 1} \right\}^{1/2}$$

$$se_B = 40.73$$

### Conclusión.

Usamos el programa Excel para generar las muestras con reemplazamiento. El promedio fue calculado para 1,000 muestras.

La estimación del error estándar bootstrap dado por la ecuación (3.4) fue 40.73. Y estimaremos un intervalo de confianza mediante el método de aproximación normal.

Veamos y ajustemos sus datos.

$$\begin{aligned} & \hat{\theta}^*(\bullet) \pm 2se_B \\ & 232.05 \pm 2(40.73) \\ & 232.05 \pm 81.46 \\ & [150.59, 313.51] \end{aligned}$$

### Municipio el Paisnal.

#### Variable: Gasto del Hogar

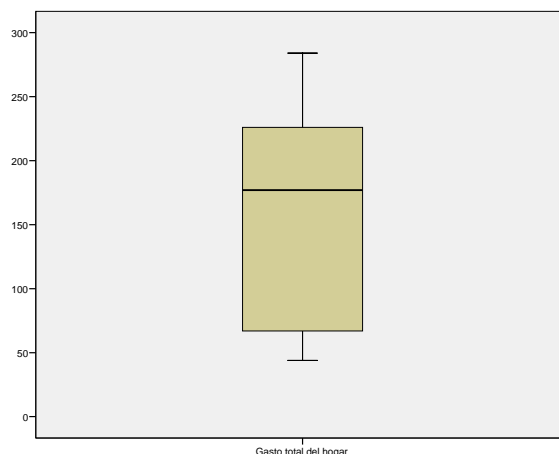
Se quiere realizar una estimación del promedio del gasto por hogar, para el municipio el Paisnal y se tiene una muestra de 15 hogares, n=15.

44 284 233 77 219 186 208 125 57 245 53 48 250 177 112

Determinemos si este conjunto de datos tendrá algún dato atípico.

Gráficamente no se ha detectado que existen datos atípicos, pero no está de más verificar a través del método de la mediana.

Gráfico 4.2. Caja y Bigote sobre la variable gasto del hogar del municipio el Paisnal.



*Procedimiento.* Las observaciones ordenadas son:

$X = \{44 \ 48 \ 53 \ 57 \ 77 \ 112 \ 125 \ 177 \ 186 \ 208 \ 219 \ 233 \ 245 \ 250 \ 284 \}$

La mediana de este conjunto de datos es  $\tilde{x} = 177$

En el siguiente cuadro se presentan las desviaciones absolutas con respecto a la mediana:

Observación $x_i$	$ x_i - med(x) $	Resultado	Resultado ordenado
44	$ 44 - 177 $	133	0
48	$ 48 - 177 $	129	9
53	$ 53 - 177 $	124	31
57	$ 57 - 177 $	120	42
77	$ 77 - 177 $	100	52
112	$ 112 - 177 $	65	56
125	$ 125 - 177 $	52	65
177	$ 177 - 177 $	0	68
186	$ 186 - 177 $	9	73
208	$ 208 - 177 $	31	100
219	$ 219 - 177 $	42	107
233	$ 233 - 177 $	56	120
245	$ 245 - 177 $	68	124
250	$ 250 - 177 $	73	129
284	$ 284 - 177 $	107	133

Ordenando estos resultados en la última fila de la tabla encontramos fácilmente su mediana de las desviaciones absolutas, el MAD, es 68.

- Sea  $x^* = 284$ , nuestro estadístico es  $133/68 = 1.95$  por lo tanto no clasificamos como un dato atípico. Recuerde que debe de ser mayor que el valor crítico a considerar.

*Conclusión.* El conjunto de datos no contiene datos atípicos.

RESULTADOS

Tabla 4.20. Valores generados de cada una de las 1,000<sup>29</sup> réplicas, para gasto del hogar.

Réplica	Estimación Promedio
1	147.60
2	125.27
3	156.07
4	156.67
5	182.07
6	137.53
7	193.33
8	165.47
9	149.20
10	185.47
⋮	⋮
991	184.67
992	174.67
993	170.47
994	184.87
995	151.47
996	127.80
997	173.33
998	141.80
999	137.20
1000	170.73
Promedio general	155.05

Desarrollo:

En la tabla 4.20, se presentan los resultados de cada una de las réplicas. El estimador  $\hat{\theta}^*(b) = S(X^{*B})$ ,  $b = 1, \dots, B$  se obtiene sumando los valores de cada una de los valores que han sido seleccionadas en esa réplica. Por ejemplo.

$$1. \hat{\theta}^*(b) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad b = 1, \dots, B.$$

Para la primer réplica se obtuvo que.

$$\hat{\theta}^*(1)_{gastoh} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i}{15} = 147.60$$

Y así se obtienen para las demás réplicas.

<sup>29</sup> Los valores fueron generados en Excel, explicación en anexos.

2. Cuando ya se tienen todas las 1,000 réplicas se calcula el promedio por:

$$\hat{\theta}^*(.)_{gastoh} = \frac{\sum_{b=1}^{1000} \hat{\theta}^*(b)}{B}, \text{ continuando con el ejemplo podemos ahora calcular:}$$

$$\hat{\theta}^*(.)_{gastoh} = \frac{\sum_{b=1}^{1000} \hat{\theta}^*(b)_{ingfam}}{1000} = 155.05$$

3. Su error estándar se obtiene por:

$$se_B = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^B (\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\bullet))^2}{B-1} \right\}^{1/2}$$

$$se_B = \left\{ \frac{463685.53}{1000-1} \right\}^{1/2}$$

$$se_B = 21.54$$

Conclusión.

Calculamos todas estas ecuaciones en Excel y también para generar los bootstrap usando el muestreo con reemplazo. El promedio fue calculado para 1,000 muestras y el rango fue desde 84.53 a 224.47.

La estimación del error estándar bootstrap dado por la ecuación (3.4) fue 21.54. Estimaremos un intervalo de confianza mediante el método de aproximación normal.

Veamos y ajustemos sus datos.

$$\begin{aligned} & \hat{\theta}^*(\bullet) \pm 2se_B \\ & 155.05 \pm 2(21.54) \\ & 155.05 \pm 43.08 \\ & [111.97, 198.13] \end{aligned}$$

Caso 2. Para estimación de varianza.

El conocimiento de las varianzas es un elemento de especial interés, tanto para los usuarios de estadísticas, como para los diseñadores. Las estadísticas obtenidas mediante encuestas probabilísticas permiten al usuario decidir acerca del grado de validez o confianza de los datos en relación con el uso que va a hacer de ellos, así como al diseñador le permite decidir entre varios procedimientos alternativos o en su caso mejorar un diseño ya establecido.

Cuando se estiman muchas características poblacionales con diseños complejos de muestreo, la aplicación de las fórmulas ordinarias de los estimadores de la varianza, puede ocasionar tediosos problemas de cálculo.

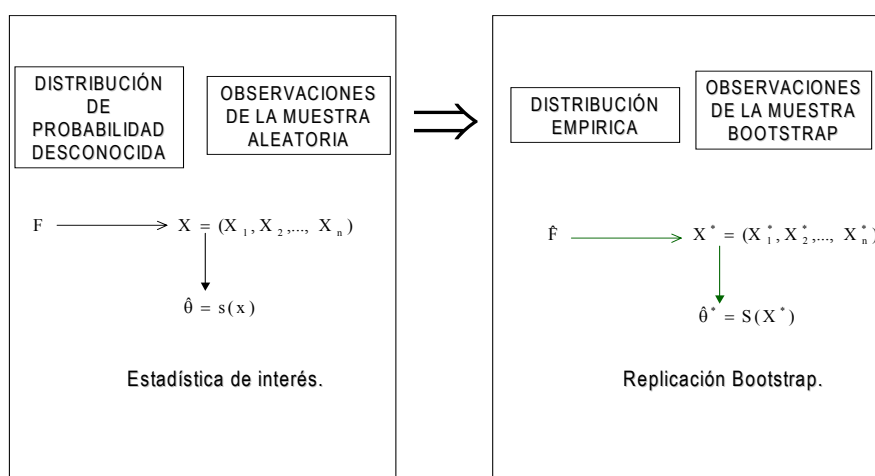
Para ilustrar el funcionamiento de este método para estimación de varianza, se emplea la información que corresponde a los jefes/as de hogares de la EHPM 2004 para el departamento de San Salvador.

Se estima el total por variable correspondientes a:

- Ingreso familiar
- Gasto por hogar
- Ingreso individual
- Número de miembros

El ejercicio es para  $B=1,000$  pero se hará primeramente para  $b=100$  y el procedimiento que se emplea se describe a continuación:

**BOSQUEJO DE UNA MUESTRA.**



1. La primer réplica se obtuvo seleccionando una muestra aleatoria con reemplazo de tamaño  $n=150$ .
2. Se obtuvieron las estimaciones del total por variable, sumando los totales de cada conglomerado último que cayeron en la primera réplica.
3. Se regresa cada muestra seleccionada a su muestra original antes de seleccionar la siguiente.
4. Se aplican los tres pasos anteriores en forma sucesiva hasta tener las 100 réplicas.
5. En este paso se suman todos los resultados obtenidos de cada réplica, para luego dividir ese total resultante entre el número de réplicas y así obtener un promedio de todas ellas.
6. La varianza se obtiene restando el promedio al total estimado de cada réplica, la diferencia que resulte se eleva al cuadrado y de esta manera vamos a tener 100 diferencias de cuadrados, los cuales se suman y se dividen entre  $99(B-1)$ . Las fórmulas que se emplearon para este ejercicio son las del capítulo 3, a continuación se presentan los resultados de cada una de las 100 réplicas.

Tabla 4.21. Tabla de réplicas para 100 bootstrap para cada una de las variables.

Réplicas	miemh	Ingfam	gastohog	ingre
1	610	72895	54649	39223
2	619	78732	48549	44428
3	586	67948	51747	35992
4	632	69894	50930	30881
5	610	73473	48387	33358
6	589	72240	47543	41594
7	589	73936	50429	35275
8	618	74676	49856	38372
9	622	74063	50557	46656
10	601	64479	51065	40824
11	578	67337	45316	33394
12	614	66429	53800	40764
13	611	74598	49878	32384
14	658	75110	49800	39390
15	563	71824	50083	36703
16	621	80628	52108	39421
17	629	67242	56965	36902

18	640	77848	57066	31898
19	644	68244	51787	40573
20	639	72892	50380	36356
21	597	66755	52857	28681
22	620	70670	49966	37902
23	620	69361	63335	39181
24	629	77132	54110	34359
25	638	72727	54486	47655
26	579	75046	52865	34507
27	624	73079	49645	38034
28	653	76919	53835	32965
29	612	68549	52496	42881
30	626	73163	53761	29622
31	590	66682	47483	39249
32	606	66693	50758	42129
33	617	58213	57799	33978
34	580	76215	49488	40437
35	646	75457	51365	42501
36	657	69159	55100	36953
37	677	63442	52496	43159
38	592	59440	49254	36723
39	626	64182	51040	39910
40	599	66196	50785	32612
41	626	74287	50627	35269
42	672	74608	50436	39664
43	599	71402	51397	38791
44	593	68939	51621	36393
45	600	77621	57206	44155
46	631	62396	56877	37419
47	639	61997	52567	40899
48	611	69728	59525	33300
49	552	71851	50415	41213
50	621	82543	51353	37784
51	608	75216	52385	40121
52	611	78435	47509	37068
53	608	73469	50681	30382
54	599	71211	51329	39948
55	580	69792	53625	35706
56	608	79973	50124	38787
57	662	72071	56301	40407
58	579	69471	49264	32254
59	622	74532	53974	40240
60	601	73424	55674	37611
61	627	70138	58006	40301
62	612	68685	48598	41346
63	578	71957	54265	35206
64	638	67546	44491	37403
65	623	76859	50747	35690
66	666	78540	49455	36423
67	607	70802	51199	44619
68	626	71465	47137	36866

69	580	72318	54414	37057
70	636	71302	56372	42493
71	594	64892	47177	41058
72	641	74453	57124	33786
73	653	75718	54663	37664
74	618	73153	51787	36969
75	652	76267	50526	39479
76	601	78275	55994	43309
77	601	72428	54303	39798
78	609	65106	51275	37253
79	623	73839	55108	43944
80	611	64599	49966	38983
81	662	71085	54589	40838
82	614	68896	51480	41579
83	598	78217	50480	45857
84	604	74604	54185	47669
85	636	68883	50494	32971
86	615	71678	49437	36104
87	626	72527	49798	34153
88	610	75874	49649	39369
89	555	68855	53024	38850
90	611	72917	49435	38534
91	636	64697	50844	30896
92	681	85012	57834	35737
93	620	72498	52373	35391
94	648	75059	51166	38717
95	613	74239	58489	37662
96	565	66681	45737	38098
97	593	71611	49554	35975
98	622	74687	51655	30881
99	624	76366	60789	38500
100	613	69018	52829	37061
<b>Total</b>	<b>61625</b>	<b>7178280</b>	<b>5213157</b>	<b>3799726</b>

Desarrollo

En la tabla 4.21, se presentan los resultados de cada una de las réplicas. El estimador  $\hat{\theta}^*(b) = S(X^{*B})$ ,  $b = 1, \dots, B$  se obtiene sumando los valores de cada una de los hogares que han sido seleccionadas en esa réplica. Por ejemplo.

1.  $\hat{\theta}^*(b) = \sum_{i=1}^n X_i$   $b = 1, \dots, B$ . Para la primer réplica se obtuvo que.

$$\hat{\theta}^*(1)_{ingfam} = \sum_{i=1}^{150} X_i = 72895$$

$$\hat{\theta}^*(1)_{gastoh} = \sum_{i=1}^{150} X_i = 54649$$

$$\hat{\theta}^*(1)_{ingre} = \sum_{i=1}^{150} X_i = 39223$$

$$\hat{\theta}^*(1)_{miemh} = \sum_{i=1}^{150} X_i = 610$$

2. Cuando ya se tienen todas las 100 réplicas se calcula el promedio por:

$$\hat{\theta}^*(\cdot)_{PT} = \frac{\sum_{b=1}^{100} \hat{\theta}^*(b)}{B}, \text{ continuando con el ejemplo podemos ahora calcular:}$$

$$\hat{\theta}^*(\cdot)_{ingfam} = \frac{\sum_{b=1}^{100} \hat{\theta}^*(b)_{ingfam}}{100} = \frac{7178280}{100} = 71782.8$$

$$\hat{\theta}^*(\cdot)_{gastoh} = \frac{\sum_{b=1}^{100} \hat{\theta}^*(b)_{gastoh}}{100} = \frac{5213157}{100} = 52131.57$$

$$\hat{\theta}^*(\cdot)_{ingre} = \frac{\sum_{b=1}^{100} \hat{\theta}^*(b)_{ingre}}{100} = \frac{3799726}{100} = 37997.26$$

$$\hat{\theta}^*(\cdot)_{miemh} = \frac{\sum_{b=1}^{100} \hat{\theta}^*(b)_{miemh}}{100} = \frac{61625}{100} = 616.25$$

3. Su error estándar se obtiene por:

$$se_B = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^B (\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\bullet))^2}{B-1} \right\}^{1/2}$$

El error estándar y el coeficiente de variación para el ingreso familiar son:

$$\hat{se}_{B_{ingfam}} = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^{100} (\hat{\theta}^*(b)_{ingfam} - \hat{\theta}^*(\bullet)_{ingfam})^2}{100-1} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^{100} (\hat{\theta}^*(b)_{ingfam} - 71782.80)^2}{99} \right\}^{1/2} = 4823.47$$

$$C.V = \frac{\widehat{se}}{\hat{\theta}^*(\bullet)_{ingfam}} = \frac{4823.47}{71782.8} = 0.0671$$

El error estándar y el coeficiente de variación para el gasto del hogar son:

$$\widehat{se}_{B_{gastoh}} = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^{100} (\hat{\theta}^*(b)_{gastoh} - \hat{\theta}^*(\bullet)_{gastoh})^2}{100-1} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^{100} (\hat{\theta}^*(b)_{gastoh} - 52131.57)^2}{99} \right\}^{1/2} = 3341.38$$

$$C.V = \frac{\widehat{se}_{B_{gastoh}}}{\hat{\theta}^*(\bullet)_{gastoh}} = \frac{3341.38}{52131.57} = 0.0640$$

El error estándar y el coeficiente de variación para el ingreso individual son:

$$\widehat{se}_{B_{ingre}} = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^{100} (\hat{\theta}^*(b)_{ingre} - \hat{\theta}^*(\bullet)_{ingre})^2}{100-1} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^{100} (\hat{\theta}^*(b)_{ingre} - 37997.26)^2}{99} \right\}^{1/2} = 3936.51$$

$$C.V = \frac{\widehat{se}_{B_{ingre}}}{\hat{\theta}^*(\bullet)_{ingre}} = \frac{3936.51}{37997.26} = 0.1036$$

El error estándar y el coeficiente de variación para el número de miembros son:

$$\widehat{se}_{B_{miemh}} = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^{100} (\hat{\theta}^*(b)_{miemh} - \hat{\theta}^*(\bullet)_{miemh})^2}{100-1} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^{100} (\hat{\theta}^*(b)_{miemh} - 616.25)^2}{99} \right\}^{1/2} = 25.775$$

$$C.V = \frac{\widehat{se}_{B_{miemh}}}{\hat{\theta}^*(\bullet)_{miemh}} = \frac{25.775}{616.25} = 0.0418$$

En la tabla 4.22 se presenta un resumen de varias corridas de réplicas, para cada una de las variables.

Tabla 4.22 Estimaciones por variable y sus respectivas precisiones, por intento de las B réplicas.

Variables	B réplicas			
	50	100	500	1000
<i>Ingfam</i>				
Estimación	70978.8	71782.8	72471.8	72610.77
D.E	5320.9678	4823.47	5456.5	5508.46
C.V	0.07496	0.067195	0.075291	0.075862
<i>Gastoh</i>				
Estimación	52116.86	52131.57	52294.72	52261.41
D.E	3291.93	3341.38	3504.78	3442
C.V	0.06316	0.06409	0.067019	0.06586
<i>ingre</i>				
Estimación	37854.26	37997.26	37536.57	37430.8
D.E	4230.61	3936.51	3911.66	3822.7
C.V	0.11176047	0.10359984	0.10422	0.102127
<i>miemh</i>				
Estimación	616	616.25	612.06	610.96
D.E	26.187	25.775	25.288	25.388
C.V	0.0425	0.04182	0.0413162	0.04155

En este último cuadro se ha calculado el error relativo, que comúnmente se conoce como Coeficientes de variación, es un indicador que muestra cuan confiables son las estimaciones de las variables investigadas, del cual, dado un nivel de significancia estadístico, se calcula el intervalo de confianza para el valor obtenido.

Coficiente de variación	Precisión
Hasta 10%	Buena
De 11% a 20%	Aceptable
Más de 20%	No confiable

En la mayoría de las estimaciones no superan el 20%, se encuentran en los criterios de Buena y aceptable, es decir que son confiables las estimaciones hechas en este apartado<sup>30</sup>.

<sup>30</sup> Este criterio esta disponible en Cochran W.G. Técnicas de Muestreo, métodos de estimación de la varianza de los conglomerados últimos.

## Capítulo IV

---

Un ejemplo sería que el total del ingreso familiar mensual para jefes de hogares a nivel del departamento de San Salvador es de 37,854.26. Con un coeficiente de variación de 11.10% Lo que implicaría que el verdadero valor estaría comprendido entre 29450.61 y 46257.91 (es decir,  $37854.26 \pm 37854.26 * 2 * 0.1110 = (29450.61, 46257.91)$ )

En general, toda variable cuyo coeficiente de variación sea superior al 20%, es necesario considerarla con precaución.

# Apéndice de Tablas

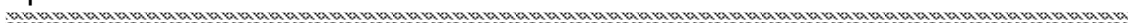


Tabla A *Distribución Normal*

Cada entrada de la tabla es la probabilidad acumulada  $P$ , en la cola derecha el valor de  $z$  para mas infinito, y también la cola derecha de menos infinito para  $-z$ , para todo  $P \leq 0.5$ , se lee hacia abajo la primera columna para el primer valor decimal de  $z$ , y encima de la columna correcta para el segundo valor decimal; el numero de intersección es  $P$ .

$z$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002

Fuente: Tabla A de Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition.



Tabla B Distribución Ji- cuadrada

Cada entrada de la tabla es el valor de la variable aleatoria Ji-cuadrada con  $\nu$  grados de libertad tal que la probabilidad de la cola derecha es el valor dado en la fila.

$\nu$	Right-tail probability								
	0.95	0.90	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
1	0.004	0.016	0.45	1.32	2.71	3.84	6.63	7.88	10.83
2	0.10	0.21	1.39	2.77	4.61	5.99	9.21	10.60	13.82
3	0.35	0.58	2.37	4.11	6.25	7.81	11.34	12.84	16.27
4	0.71	1.06	3.36	5.39	7.78	9.49	13.28	14.86	18.47
5	1.15	1.61	4.35	6.63	9.24	11.07	15.09	16.75	20.52
6	1.64	2.20	5.35	7.84	10.64	12.59	16.81	18.55	22.46
7	2.17	2.83	6.35	9.04	12.02	14.07	18.48	20.28	24.32
8	2.73	3.49	7.34	10.22	12.36	15.51	20.09	21.96	26.12
9	3.33	4.17	8.34	11.39	14.68	16.92	21.67	23.59	27.88
10	3.94	4.87	9.34	12.55	15.99	18.31	23.21	25.19	29.59
11	4.57	5.58	10.34	13.70	17.28	19.68	24.72	26.76	31.26
12	5.23	6.30	11.34	14.85	18.55	21.03	26.22	28.30	32.91
13	5.89	7.04	12.34	15.98	19.81	22.36	27.69	29.82	34.53
14	6.57	7.79	13.34	17.12	21.06	23.68	29.14	31.32	36.12
15	7.26	8.55	14.34	18.25	22.31	25.00	30.58	32.80	37.70
16	7.96	9.31	15.34	19.37	23.54	26.30	32.00	34.27	39.25
17	8.67	10.09	16.34	20.49	24.77	27.59	33.41	35.72	40.79
18	9.39	10.86	17.34	21.60	25.99	28.87	34.81	37.16	42.31
19	10.12	11.65	18.34	22.72	27.20	30.14	36.19	38.58	43.82
20	10.85	12.44	19.34	23.83	28.41	31.41	37.57	40.00	45.32
21	11.59	13.24	20.34	24.93	29.62	32.67	38.93	41.40	46.80
22	12.34	14.04	21.34	26.04	30.81	33.92	40.29	42.80	48.27
23	13.09	14.85	22.34	27.14	32.01	35.17	41.64	44.18	49.73
24	13.85	15.66	23.34	28.24	33.20	36.42	42.98	45.56	51.18
25	14.61	16.47	24.34	29.34	34.38	37.65	44.31	46.93	52.62
26	15.38	17.29	25.34	30.43	35.56	38.89	45.64	48.29	54.05
27	16.15	18.11	26.34	31.53	36.74	40.11	46.96	49.64	55.48
28	16.93	18.94	27.34	32.62	37.92	41.34	48.28	50.99	56.89
29	17.71	19.77	28.34	33.71	39.09	42.56	49.59	52.34	58.30
30	18.49	20.60	29.34	34.80	40.26	43.77	50.89	53.67	59.70

Fuente: Tabla B de Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition.

Para  $\nu > 30$ , la probabilidad de la cola derecha o la cola izquierda para  $Q$  una variable ji-cuadrada puede ser encontrada en la tabla A con  $Z = \sqrt{2Q} - \sqrt{2\nu - 1}$



Tabla C Estadísticos de una muestra de Kolmogorov-Smirnov

Cada entrada de la tabla es el valor del estadístico de Kolmogorov-Smirnov para un muestra  $D_n$ , para muestras de tamaño  $n$  tal que la probabilidad de su cola derecha es el valor dado en la fila.

$n$	.200	.100	.050	.020	.010	$n$	.200	.100	.050	.020	.010
1	.900	.950	.975	.990	.995	21	.226	.259	.287	.321	.344
2	.684	.776	.842	.900	.929	22	.221	.253	.281	.314	.337
3	.565	.636	.780	.785	.829	23	.216	.247	.275	.307	.330
4	.493	.565	.624	.689	.734	24	.212	.242	.269	.301	.323
5	.447	.509	.563	.627	.669	25	.208	.238	.264	.295	.317
6	.410	.468	.519	.577	.617	26	.204	.233	.259	.290	.311
7	.381	.436	.483	.538	.576	27	.200	.229	.254	.284	.305
8	.358	.410	.454	.507	.542	28	.197	.225	.250	.279	.300
9	.339	.387	.430	.480	.513	29	.193	.221	.246	.275	.295
10	.323	.369	.409	.457	.489	30	.190	.218	.242	.270	.290
11	.308	.352	.391	.437	.468	31	.187	.214	.238	.266	.285
12	.296	.338	.375	.419	.449	32	.184	.211	.234	.262	.281
13	.285	.325	.361	.404	.432	33	.182	.208	.231	.258	.277
14	.275	.314	.349	.390	.418	34	.179	.205	.227	.254	.273
15	.266	.304	.338	.377	.404	35	.177	.202	.224	.251	.269
16	.258	.295	.327	.366	.392	36	.174	.199	.221	.247	.265
17	.250	.286	.318	.355	.381	37	.172	.196	.218	.244	.262
18	.244	.279	.309	.346	.371	38	.170	.194	.215	.241	.258
19	.237	.271	.301	.337	.361	39	.168	.191	.213	.238	.255
20	.232	.265	.294	.329	.352	40	.165	.189	.210	.235	.252

Fuente: Tabla F de Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition.

Para  $n > 40$ , el valor crítico de la cola derecha basado en la distribución asintótica puede ser calculado como sigue:

0.200	0.100	0.050	0.020	0.010
$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$



Tabla D Estadístico de dos muestras para Kolmogorov-Smirnov

Cada entrada de la tabla etiquetada con  $P$  es la probabilidad de la cola derecha de  $mnD_{m,n}$ , el estadístico de dos muestras de Kolmogorov-Smirnov para muestras de tamaño  $m$  y  $n$  donde  $m \leq n$ . La segunda porción de la tabla es dada al valor de  $mnD_{m,n}$  tal que la probabilidad de la cola derecha es el valor dado en la fila.

$m$	$n$	$mnD$	$P$	$m$	$n$	$mnD$	$P$	$m$	$n$	$mnD$	$P$
2	2	4	.333	3	6	18	.024	4	5	20	.016
2	3	6	.200			15	.095			16	.079
2	4	8	.133			12	.333			15	.143
2	5	10	.095	3	7	21	.017	4	6	24	.010
		8	.286			18	.067			20	.048
2	6	12	.071			15	.167			18	.095
		10	.214	3	8	24	.012			16	.181
2	7	14	.056			21	.048	4	7	28	.006
		12	.167			18	.121			24	.030
2	8	16	.044	3	9	27	.009			21	.067
		14	.133			24	.036			20	.121
2	9	18	.036			21	.091	4	8	32	.004
		16	.109			18	.236			28	.020
2	10	20	.030	3	10	30	.007			24	.085
		18	.091			27	.028			20	.222
		16	.182			24	.070	4	9	36	.003
2	11	22	.026			21	.140			32	.014
		20	.077	3	11	33	.005			28	.042
		18	.154			30	.022			27	.062
2	12	24	.022			27	.055			24	.115
		22	.066			24	.110	4	10	40	.002
		20	.132	3	12	36	.004			36	.010
3	3	9	.100			33	.018			32	.030
3	4	12	.057			30	.044			30	.046
		9	.229			27	.088			28	.084
3	5	15	.036			24	.189			26	.126
		12	.143	4	4	16	.029				
						12	.229				

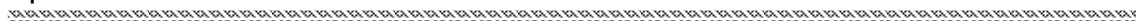


Tabla D Continuación

<i>m</i>	<i>n</i>	<i>mnD</i>	<i>P</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>mnD</i>	<i>P</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>mnD</i>	<i>P</i>		
4	11	44	.001	5	10	50	.001	6	10	60	.000		
		40	.007			45	.004			54	.002		
		36	.022			40	.019			50	.004		
		33	.035			35	.061			48	.009		
		32	.063			30	.166			44	.019		
		29	.098			5	11			55	.000	42	.031
		28	.144			50	.003			40	.042		
4	12	48	.001			45	.010			38	.066		
		44	.005			44	.014			36	.092		
		40	.016			40	.029			34	.125		
		36	.048			39	.044	7	7	49	.001		
		32	.112			35	.074			42	.008		
5	5	25	.008			34	.106			35	.053		
		20	.079	6	6	36	.002			28	.212		
		15	.357			30	.026	7	8	56	.000		
5	6	30	.004			24	.143			49	.002		
		25	.026	6	7	42	.001			48	.005		
		24	.048			36	.008			42	.013		
		20	.108			35	.015			41	.024		
5	7	35	.003			30	.038			40	.033		
		30	.015			29	.068			35	.056		
		28	.030			28	.091			34	.087		
		25	.066			24	.147			33	.118		
		23	.116	6	8	48	.001	7	9	63	.000		
5	8	40	.002			42	.005			56	.001		
		35	.009			40	.009			54	.003		
		32	.020			36	.023			49	.008		
		30	.042			34	.043			47	.015		
		27	.079			32	.061			45	.021		
		25	.126			30	.093			42	.034		
		45	.001			28	.139			40	.055		
5	9	40	.006	6	9	54	.000			38	.079		
		36	.014			48	.003			36	.098		
		35	.028			45	.006			35	.127		
		31	.056			42	.014	8	8	64	.000		
		30	.086			39	.028			56	.002		
		27	.119			36	.061			48	.019		
						33	.095			40	.087		
						30	.176			32	.283		



Tabla D Continuación

$m = n$	.200	.100	.050	.020	.010
9	45	54	54	63	63
10	50	60	70	70	80
11	66	66	77	88	88
12	72	72	84	96	96
13	78	91	91	104	117
14	84	98	112	112	126
15	90	105	120	135	135
16	112	112	128	144	160
17	119	136	136	153	170
18	126	144	162	180	180
19	133	152	171	190	190
20	140	160	180	200	220

Fuente: Tabla I de Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition.

Para  $m$  y  $n$  grande, los valores críticos de la cola derecha basados en la distribución asintótica pueden ser calculador de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
 0.200 & 0.100 & 0.050 & 0.020 & 0.010 \\
 \frac{1.07}{\sqrt{\frac{N}{mn}}} & \frac{1.22}{\sqrt{\frac{N}{mn}}} & \frac{1.36}{\sqrt{\frac{N}{mn}}} & \frac{1.52}{\sqrt{\frac{N}{mn}}} & \frac{1.63}{\sqrt{\frac{N}{mn}}}
 \end{array}$$

## Apéndice de Tablas

**Tabla E**      *Cuantiles del estadístico de Smirnov de  $k$ -muestras para una cola*

Los datos ingresados en esta tabla, divididos por  $n$ , son seleccionados cuantiles de una cola para  $k$ -muestras del estadístico  $T_2$  de Smirnov. Obtenemos el  $p$  cuantil, buscamos en la tabla el número de  $k$  muestras y la muestra de tamaño  $n$ . El valor obtenido de la tabla es entonces dividido por  $n$  para el cuantil conveniente de  $p$ . Rechazamos  $H_0$  si  $T_2$  excede al cuantil  $q$ . El cuantil aproximado dado en el final de la tabla requiere solo división por  $\sqrt{n}$  como indica.

$n$	$k = 2$					$k = 3$					$k = 4$				
	$p = .90$	$.95$	$.975$	$.99$	$.995$	$.90$	$.95$	$.975$	$.99$	$.995$	$.90$	$.95$	$.975$	$.99$	$.995$
3	2	2				2									
4	3	3	3			3	3				3	3			
5	3	3	4	4	4	3	4	4	4		4	4	4		
6	3	4	4	5	5	4	4	5	5	5	4	4	5	5	5
7	4	4	5	5	5	4	5	5	5	6	4	5	5	6	6
8	4	4	5	5	6	4	5	5	6	6	5	5	6	6	6
9	4	5	5	6	6	5	5	6	6	7	5	6	6	6	7
10	4	5	6	6	7	5	6	6	7	7	5	6	6	7	7
12	5	5	6	7	7	5	6	7	7	8	6	6	7	8	8
14	5	6	7	7	8	6	7	7	8	8	6	7	8	8	9
16	6	6	7	8	9	6	7	8	9	9	7	8	8	9	9
18	6	7	8	9	9	7	8	8	9	10	7	8	9	9	10
20	6	7	8	9	10	7	8	9	10	10	8	8	9	10	11
25	7	8	9	10	11	8	9	10	11	12	9	9	10	11	12
30	8	9	10	11	12	9	10	11	12	13	10	10	11	12	13
35	8	10	11	12	13	10	11	12	13	14	10	10	11	12	13
40	9	10	12	13	14	10	12	13	14	15	11	11	13	15	15
45	10	11	12	14	15	11	12	14	15	16	12	12	14	15	16
50	10	12	13	15	16	12	13	14	16	17	13	13	15	16	17
Approximation for $n > 50$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.73}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.92}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.15}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.30}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.73}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.92}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.09}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.30}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.45}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.85}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.02}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.19}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.39}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.53}{\sqrt{n}}$

$n$	$k = 5$					$k = 6$					$k = 7$				
	$p = .90$	$.95$	$.975$	$.99$	$.995$	$.90$	$.95$	$.975$	$.99$	$.995$	$.90$	$.95$	$.975$	$.99$	$.995$
3															
4	3					3					3				
5	4	4	4			4	4	4			4	4	4		
6	4	5	5	5	5	4	5	5	5		4	5	5	5	
7	5	5	5	6	6	5	5	5	6	6	5	5	5	6	6
8	5	5	6	6	6	5	5	6	6	7	5	6	6	6	7
9	5	6	6	7	7	5	6	6	7	7	5	6	6	7	7
10	6	6	6	7	7	6	6	7	7	8	6	6	7	7	8
12	6	7	7	8	8	6	7	7	8	8	6	7	7	8	8
14	7	7	8	8	9	7	7	8	9	9	7	8	8	9	9
16	7	8	8	9	10	7	8	9	9	10	8	8	9	9	10
18	8	8	9	10	10	8	9	9	10	10	8	9	9	10	11
20	8	9	9	10	11	8	9	10	10	11	8	9	10	11	11
25	9	10	11	12	12	9	10	11	12	12	10	10	11	12	13
30	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	11	11	12	13	14
35	11	12	13	14	15	11	12	13	14	15	11	12	13	14	15
40	12	13	14	15	16	12	13	14	15	16	12	13	14	15	16
45	12	13	15	16	17	13	14	15	16	17	13	14	15	16	17
50	13	14	15	17	18	13	15	16	17	18	14	15	16	17	18
Approximation for $n > 50$	$\frac{1.92}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.09}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.25}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.45}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.59}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.97}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.30}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.49}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.63}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.02}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.18}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.34}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.53}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.66}{\sqrt{n}}$

## Apéndice de Tablas

	$k = 8$					$k = 9$					$k = 10$				
	$p = .90$	$.95$	$.975$	$.99$	$.995$	$.90$	$.95$	$.975$	$.99$	$.995$	$.90$	$.95$	$.975$	$.99$	$.995$
$n = 2$															
3															
4	3														
5	4	4				4	4				4	4			
6	4	5	5	5		5	5	5	5		5	5	5	5	
7	5	5	6	6	6	5	5	6	6	6	5	5	6	6	6
8	5	6	6	6	7	5	6	6	6	7	5	6	6	7	7
9	6	6	6	7	7	6	6	6	7	7	6	6	7	7	7
10	6	6	7	7	8	6	6	7	7	8	6	7	7	7	8
12	7	7	8	8	9	7	7	8	8	9	7	7	8	8	9
14	7	8	8	9	9	7	8	8	9	9	7	8	8	9	9
16	8	8	9	10	10	8	8	9	10	10	8	8	9	10	10
18	8	9	9	10	11	8	9	10	10	11	8	9	10	10	11
20	9	9	10	11	11	9	9	10	11	11	9	10	10	11	12
25	10	11	11	12	13	10	11	11	12	13	10	11	12	12	13
30	11	12	12	13	14	11	12	13	14	14	11	12	13	14	14
35	12	13	13	15	15	12	13	14	15	15	12	13	14	15	16
40	12	13	14	16	16	13	14	15	16	17	13	14	15	16	17
45	13	14	15	17	17	13	15	16	17	18	14	15	16	17	18
50	14	15	16	17	18	14	15	16	18	19	14	16	17	18	19
Approximation for $n > 50$	$\frac{2.05}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.37}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.55}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.69}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.09}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.25}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.40}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.58}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.72}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.11}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.27}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.42}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.61}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.74}{\sqrt{n}}$

Fuente: Tabla 19 de Practical Nonparametric statistics. W. J. Conover.

Tabla F Cuantiles del estadístico de Smirnov de  $k$ -muestras para dos colas

Los datos ingresados en esta tabla, divididas por  $n$  seleccionan cuantiles de dos colas para  $k$ -muestras del estadístico  $T_3$  de Smirnov. Obtenemos el  $p$  cuantil, buscamos en la tabla  $n$ , el número de observaciones en cada una de las  $k$ -muestras y obtenemos el listado con el numero muestras  $k$  y bajo el  $p$  deseado. El valor obtenido de la tabla es entonces dividido por  $n$  para el cuantil conveniente de  $p$ . Rechazamos  $H_0$  si  $T_3$  excede al cuantil  $p$ . El cuantil aproximado dado en el final de la tabla requiere solo división por  $\sqrt{n}$  como indica y son validos para todos los valores de  $k$ .

	$p = .90$	$p = .95$	$p = .975$	$p = .99$	$p = .995$
$n = 3$	2 ( $k = 2$ )				
$n = 4$	3 ( $2 \leq k \leq 6$ )	3 ( $k = 2$ )			
$n = 5$	3 ( $k = 2$ )	4 ( $2 \leq k \leq 10$ )	4 ( $2 \leq k \leq 4$ )	4 ( $k = 2$ )	
	4 ( $3 \leq k \leq 10$ )				
$n = 6$	4 ( $2 \leq k \leq 8$ )	4 ( $k = 2, 3$ )	4 ( $k = 2$ )	5 ( $2 \leq k \leq 6$ )	5 ( $k = 2, 3$ )
	5 ( $k = 9, 10$ )	5 ( $4 \leq k \leq 10$ )	5 ( $3 \leq k \leq 10$ )		
$n = 7$	4 ( $2 \leq k \leq 4$ )	4 ( $k = 2$ )	5 ( $2 \leq k \leq 5$ )	5 ( $k = 2$ )	6 ( $2 \leq k \leq 10$ )
	5 ( $5 \leq k \leq 10$ )	5 ( $3 \leq k \leq 10$ )	6 ( $6 \leq k \leq 10$ )	6 ( $3 \leq k \leq 10$ )	
$n = 8$	4 ( $k = 2$ )	5 ( $2 \leq k \leq 6$ )	5 ( $k = 2$ )	6 ( $2 \leq k \leq 7$ )	6 ( $k = 2, 3$ )
	5 ( $3 \leq k \leq 10$ )	6 ( $7 \leq k \leq 10$ )	6 ( $3 \leq k \leq 10$ )	7 ( $8 \leq k \leq 10$ )	7 ( $4 \leq k \leq 10$ )
$n = 9$	4 ( $k = 2$ )	5 ( $k = 2, 3$ )	6 ( $2 \leq k \leq 9$ )	6 ( $k = 2, 3$ )	7 ( $2 \leq k \leq 10$ )
	5 ( $3 \leq k \leq 10$ )	6 ( $4 \leq k \leq 10$ )	7 ( $k = 10$ )	7 ( $4 \leq k \leq 10$ )	
$n = 10$	5 ( $2 \leq k \leq 6$ )	5 ( $k = 2$ )	6 ( $2 \leq k \leq 5$ )	7 ( $2 \leq k \leq 10$ )	7 ( $2 \leq k \leq 4$ )
	6 ( $7 \leq k \leq 10$ )	6 ( $3 \leq k \leq 10$ )	7 ( $6 \leq k \leq 10$ )		8 ( $5 \leq k \leq 10$ )
$n = 12$	5 ( $k = 2, 3$ )	6 ( $2 \leq k \leq 4$ )	6 ( $k = 2$ )	7 ( $k = 2, 3$ )	8 ( $2 \leq k \leq 7$ )
	6 ( $4 \leq k \leq 10$ )	7 ( $5 \leq k \leq 10$ )	7 ( $3 \leq k \leq 10$ )	8 ( $4 \leq k \leq 10$ )	9 ( $8 \leq k \leq 10$ )
$n = 14$	6 ( $2 \leq k \leq 7$ )	6 ( $k = 2$ )	7 ( $k = 2, 3$ )	8 ( $2 \leq k \leq 5$ )	8 ( $k = 2$ )
	7 ( $8 \leq k \leq 10$ )	7 ( $3 \leq k \leq 10$ )	8 ( $4 \leq k \leq 10$ )	9 ( $6 \leq k \leq 10$ )	9 ( $3 \leq k \leq 10$ )
$n = 16$	6 ( $k = 2, 3$ )	7 ( $2 \leq k \leq 5$ )	8 ( $2 \leq k \leq 8$ )	8 ( $k = 2$ )	9 ( $2 \leq k \leq 4$ )
	7 ( $4 \leq k \leq 10$ )	8 ( $6 \leq k \leq 10$ )	9 ( $k = 9, 10$ )	9 ( $3 \leq k \leq 10$ )	10 ( $5 \leq k \leq 10$ )

Tabla F Continuación

	$p = .90$	$p = .95$	$p = .975$	$p = .99$	$p = .995$
$n = 18$	6 ( $k = 2$ ) 7 ( $3 \leq k \leq 10$ )	7 ( $k = 2$ ) 8 ( $3 \leq k \leq 10$ )	8 ( $2 \leq k \leq 4$ ) 9 ( $5 \leq k \leq 10$ )	9 ( $2 \leq k \leq 4$ ) 10 ( $5 \leq k \leq 10$ )	10 ( $2 \leq k \leq 9$ ) 11 ( $k = 10$ )
$n = 20$	7 ( $2 \leq k \leq 6$ ) 8 ( $7 \leq k \leq 10$ )	8 ( $2 \leq k \leq 7$ ) 9 ( $8 \leq k \leq 10$ )	8 ( $k = 2$ ) 9 ( $3 \leq k \leq 10$ )	9 ( $k = 2$ ) 10 ( $3 \leq k \leq 10$ )	10 ( $k = 2, 3$ ) 11 ( $4 \leq k \leq 10$ )
$n = 25$	8 ( $2 \leq k \leq 8$ )	9 ( $2 \leq k \leq 8$ )	9 ( $k = 2$ ) 10 ( $3 \leq k \leq 9$ )	11 ( $2 \leq k \leq 8$ )	11 ( $k = 2$ )
$n = 30$	9 ( $k = 9, 10$ ) 8 ( $k = 2$ ) 9 ( $3 \leq k \leq 10$ )	10 ( $k = 9, 10$ ) 9 ( $k = 2$ ) 10 ( $3 \leq k \leq 10$ )	11 ( $k = 10$ ) 10 ( $k = 2$ ) 11 ( $3 \leq k \leq 10$ )	12 ( $k = 9, 10$ ) 12 ( $2 \leq k \leq 8$ ) 13 ( $k = 9, 10$ )	12 ( $3 \leq k \leq 10$ ) 12 ( $k = 2$ ) 13 ( $3 \leq k \leq 10$ )
$n = 35$	9 ( $2 \leq k \leq 4$ ) 10 ( $5 \leq k \leq 10$ )	10 ( $k = 2, 3$ ) 11 ( $4 \leq k \leq 10$ )	11 ( $k = 2$ ) 12 ( $3 \leq k \leq 10$ )	13 ( $2 \leq k \leq 8$ ) 14 ( $k = 9, 10$ )	13 ( $k = 2$ ) 14 ( $3 \leq k \leq 10$ )
$n = 40$	10 ( $2 \leq k \leq 8$ ) 11 ( $k = 9, 10$ )	11 ( $2 \leq k \leq 5$ ) 12 ( $6 \leq k \leq 10$ )	12 ( $k = 2, 3$ ) 13 ( $4 \leq k \leq 10$ )	13 ( $k = 2$ ) 14 ( $3 \leq k \leq 10$ )	14 ( $k = 2$ ) 15 ( $3 \leq k \leq 10$ )
$n = 45$	10 ( $k = 2, 3$ ) 11 ( $4 \leq k \leq 10$ )	12 ( $2 \leq k \leq 8$ ) 13 ( $k = 9, 10$ )	13 ( $2 \leq k \leq 5$ ) 14 ( $6 \leq k \leq 10$ )	14 ( $k = 2$ ) 15 ( $3 \leq k \leq 10$ )	15 ( $k = 2$ ) 16 ( $3 \leq k \leq 10$ )
$n = 50$	11 ( $2 \leq k \leq 6$ ) 12 ( $7 \leq k \leq 10$ )	12 ( $k = 2, 3$ ) 13 ( $4 \leq k \leq 10$ )	14 ( $2 \leq k \leq 9$ ) 15 ( $k = 10$ )	15 ( $k = 2, 3$ ) 16 ( $4 \leq k \leq 10$ )	16 ( $k = 2, 3$ ) 17 ( $4 \leq k \leq 10$ )
Approximation for $n > 50$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.73/\sqrt{n}$	$1.92/\sqrt{n}$	$2.15/\sqrt{n}$	$2.30/\sqrt{n}$

Fuente: Tabla 20 de Practical Nonparametric statistics. W. J. Conover.

Tabla G      Cuantiles de la prueba estadística de Kendall

Las entradas de esta se seleccionan cuantiles  $w_p$  del estadístico de prueba  $T$  de Kendall, para seleccionar valores de  $p$ . Solo cuantiles superiores son dados aquí, pero los cuantiles inferiores pueden ser obtenidos de la relación

$$w_p = -w_{1-p}$$

la región crítica correspondiente para valores de  $T$  mayores que (o menores que) peor no incluyendo el cuantil apropiado. Note que la mediana  $T$  de es cero.

$n$	$p = .900$	.950	.975	.990	.995
4	4	4	6	6	6
5	6	6	8	8	10
6	7	9	11	11	13
7	9	11	13	15	17
8	10	14	16	18	20
9	12	16	18	22	24
10	15	19	21	25	27
11	17	21	25	29	31
12	18	24	28	34	36
13	22	26	32	38	42
14	23	31	35	41	45
15	27	33	39	47	51
16	28	36	44	50	56
17	32	40	48	56	62
18	35	43	51	61	67
19	37	47	55	65	73
20	40	50	60	70	78
21	42	54	64	76	84
22	45	59	69	81	89
23	49	63	73	87	97
24	52	66	78	92	102
25	56	70	84	98	108
26	59	75	89	105	115
27	61	79	93	111	123
28	66	84	98	116	128
29	68	88	104	124	136
30	73	93	109	129	143

Tabla G Continuación

<i>n</i>	<i>p</i> = .900	.950	.975	.990	.995
31	75	97	115	135	149
32	80	102	120	142	158
33	84	106	126	150	164
34	87	111	131	155	173
35	91	115	137	163	179
36	94	120	144	170	188
37	98	126	150	176	196
38	103	131	155	183	203
39	107	137	161	191	211
40	110	142	168	198	220

Fuente: Tabla 11 de Practical Nonparametric statistics. W. J. Conover.

Para *n* mayores que 40, el cuantil aproximado de *T* puede ser obtenido de

$$w_p \cong x_p \sqrt{\frac{n(n-1)(2n+5)}{18}}$$

donde  $x_p$  es de la distribución normal estándar dado en tabla A.

Tabla H Cuantiles del número total de rachas del estadístico de Wald-Wolfowitz

Para  $n$  o  $m$  mayores que 20, el cuantil  $w_p$  de  $T$  puede ser aproximado por

$$w_p = \frac{2mn}{m+n} + 1 + x_p \sqrt{\frac{2mn(2mn - m - n)}{(m+n)^2(m+n-1)}}$$

donde  $x_p$  es el cuantil  $p$  de la variable aleatoria normal estándar, obtenido de tabla A.

$N_1$	$N_2$	$w_{.005}$	$w_{.01}$	$w_{.025}$	$w_{.05}$	$w_{.10}$	$w_{.90}$	$w_{.95}$	$w_{.975}$	$w_{.99}$	$w_{.995}$
2	5	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—
	8	—	—	—	3	3	—	—	—	—	—
	11	—	—	—	3	3	—	—	—	—	—
	14	—	—	3	3	3	—	—	—	—	—
	17	—	—	3	3	3	—	—	—	—	—
	20	—	3	3	3	4	—	—	—	—	—
5	5	—	3	3	4	4	8	8	9	9	—
	8	3	3	4	4	5	9	10	10	—	—
	11	4	4	5	5	6	10	—	—	—	—
	14	4	4	5	6	6	—	—	—	—	—
	17	4	5	5	6	7	—	—	—	—	—
	20	5	5	6	6	7	—	—	—	—	—
8	8	4	5	5	6	6	12	12	13	13	14
	11	5	6	6	7	8	13	14	14	15	15
	14	6	6	7	8	8	14	15	15	16	16
	17	6	7	8	8	9	15	15	16	—	—
	20	7	7	8	9	10	15	16	16	—	—
11	11	6	7	8	8	9	15	16	16	17	18
	14	7	8	9	9	10	16	17	18	19	19
	17	8	9	10	10	11	17	18	19	20	21
	20	9	9	10	11	12	18	19	20	21	21
14	14	8	9	10	11	12	18	19	20	21	22
	17	9	10	11	12	13	20	21	22	23	23
	20	10	11	12	13	14	21	22	23	24	24
17	17	11	11	12	13	14	22	23	24	25	25
	20	12	12	14	14	16	23	24	25	26	27
20	20	13	14	15	16	17	25	26	27	28	29

Fuente: Tabla 23 de Practical Nonparametric statistics. W. J. Conover.

## Apéndice de Tablas

Tabla I Coeficiente de correlación de rango de Spearman

Cada entrada de la tabla etiquetado con  $P$  es la probabilidad de la cola derecha para  $R$ , el coeficiente de correlación de rango de Spearman para muestras de tamaño  $n$ , y también la probabilidad de para  $-R$ . La segunda porción de la tabla es dada para valores de  $R$  ( $-R$ ) tal que la probabilidad de la cola derecha (cola izquierda) es el valor que mas sobresale en cada fila.

$n$	$R$	$P$	$n$	$R$	$P$	$n$	$R$	$P$	$n$	$R$	$P$
3	1.000	.167	7	1.000	.000	8	.810	.011	9	1.000	.000
	.500	.500		.964	.001		.786	.014		.983	.000
4	1.000	.042	7	.929	.003	8	.762	.018	9	.967	.000
	.800	.167		.893	.006		.738	.023		.950	.000
	.600	.208		.857	.012		.714	.029		.933	.000
	.400	.375		.821	.017		.690	.035		.917	.001
	.200	.458		.786	.024		.667	.042		.900	.001
	.000	.542		.750	.033		.643	.048		.883	.002
5	1.000	.008	7	.714	.044	8	.619	.057	9	.867	.002
	.900	.042		.679	.055		.595	.066		.850	.003
	.800	.067		.643	.069		.571	.076		.833	.004
	.700	.117		.607	.083		.548	.085		.817	.005
	.600	.175		.571	.100		.524	.098		.800	.007
	.500	.225		.536	.118		.500	.108		.783	.009
	.400	.258		.500	.133		.476	.122		.767	.011
	.300	.342		.464	.151		.452	.134		.750	.013
	.200	.392		.429	.177		.429	.150		.733	.016
	.100	.475		.393	.198		.405	.163		.717	.018
.000	.525	.357	.222	.381	.180	.700	.022				
6	1.000	.001	8	.321	.249	8	.357	.195	9	.683	.025
	.943	.008		.286	.278		.333	.214		.667	.029
	.886	.017		.250	.297		.310	.231		.650	.033
	.829	.029		.214	.331		.286	.250		.633	.038
	.771	.051		.179	.357		.262	.268		.617	.043
	.714	.069		.143	.391		.238	.291		.600	.048
	.657	.083		.107	.420		.214	.310		.583	.054
	.600	.121		.071	.453		.190	.332		.567	.060
	.543	.149		.036	.482		.167	.352		.550	.066
	.486	.178		.000	.518		.143	.376		.533	.074
	.429	.210		1.000	.000		.119	.397		.517	.081
	.371	.249		.976	.000		.095	.420		.500	.089
	.314	.282		.952	.001		.071	.441		.483	.097
	.257	.329		.929	.001		.048	.467		.467	.106
.200	.357	.905	.002	.024	.488	.450	.115				
.143	.401	.881	.004	.000	.512	.433	.125				
.086	.460	.857	.005			.417	.135				
.029	.500	.833	.008			.400	.146				

Tabla I Continuación

APPENDIX OF TABLES 507

**Table M (continued)**

<i>n</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>n</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>n</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>n</i>	<i>R</i>	<i>P</i>
9	.383	.156	10	.964	.000	10	.636	.027	10	.309	.193
	.367	.168		.952	.000		.624	.030		.297	.203
	.350	.179		.939	.000		.612	.033		.285	.214
	.333	.193		.927	.000		.600	.037		.273	.224
	.317	.205		.915	.000		.588	.040		.261	.235
	.300	.218		.903	.000		.576	.044		.248	.246
	.283	.231		.891	.001		.564	.048		.236	.257
	.267	.247		.879	.001		.552	.052		.224	.268
	.250	.260		.867	.001		.539	.057		.212	.280
	.233	.276		.855	.001		.527	.062		.200	.292
	.217	.290		.842	.002		.515	.067		.188	.304
	.200	.307		.830	.002		.503	.072		.176	.316
	.183	.322		.818	.003		.491	.077		.164	.328
	.167	.339		.806	.004		.479	.083		.152	.341
	.150	.354		.794	.004		.467	.089		.139	.354
	.133	.372		.782	.005		.455	.096		.127	.367
	.117	.388		.770	.007		.442	.102		.115	.379
	.100	.405		.758	.008		.430	.109		.103	.393
	.083	.422		.745	.009		.418	.116		.091	.406
	.067	.440		.733	.010		.406	.124		.079	.419
	.050	.456		.721	.012		.394	.132		.067	.433
	.033	.474		.709	.013		.382	.139		.055	.446
	.017	.491		.697	.015		.370	.148		.042	.459
	.000	.509		.685	.017		.358	.156		.030	.473
10	1.000	.000		.673	.019		.345	.165		.018	.486
	.988	.000		.661	.022		.333	.174		.006	.500
	.976	.000		.648	.025		.321	.184			

Fuente: Tabla M de Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition.

Tabla J Estadístico de Rachas de von Neumann

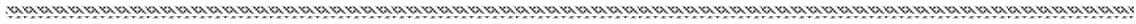
Cada entrada de la tabla para  $n \leq 10$  es el valor  $P$  exacto de la cola derecha o cola izquierda del correspondiente valor del listado  $NM$ . Solo estos valores  $NM$  que son cerrados para los valores típicos de  $\alpha = 0.005, 0.01, 0.025, 0.05$  y  $0.10$  son incluidos. La entrada de la tabla para  $n > 10$  son los valores críticos de la cola derecha de RVN para los mismos valores típicos de  $\alpha$ . Dado que estas entradas son basadas en la aproximación beta con simetría sobre 2, correspondientes a los valores críticos de la cola derecha son fácilmente encontrados. Por ejemplo si  $n = 40$ ,  $\alpha = 0.005$ , el valor crítico de la cola izquierda de RVN es 1.22 y el valor crítico de la cola derecha es 2.78.

<i>P values for selected values of NM</i>					<i>P values for selected values of NM</i>				
n	NM	Left-tail P	NM	Right-tail P	n	NM	Left-tail P	NM	Right-tail P
4	3	0.0833	17	0.0833	9	34	0.0045	208	0.0046
	6	0.2500	14	0.2500		35	0.0055	207	0.0053
5	4	0.0167	35	0.0333		40	0.0096	202	0.0091
	7	0.0500	33	0.0667		41	0.0109	201	0.0104
	10	0.1333	30	0.1333		49	0.0236	191	0.0245
6	5	0.0028	65	0.0028		50	0.0255	190	0.0262
	8	0.0083	63	0.0083		59	0.0486	181	0.0499
	11	0.0250	62	0.0139		60	0.0516	180	0.0528
	14	0.0472	60	0.0194		71	0.0961	169	0.0978
	16	0.0750	59	0.0306		72	0.1010	168	0.1030
	17	0.0806	56	0.0361	10	51	0.0050	282	0.0046
	19	0.1306	55	0.0694		59	0.0100	281	0.0051
		52	0.0972	72		0.0242	273	0.0097	
		51	0.1139	73		0.0260	272	0.0103	
				85		0.0493	259	0.0240	
7	14	0.0048	101	0.0040		86	0.0517	258	0.0252
	15	0.0079	100	0.0056		101	0.0985	246	0.0475
	17	0.0119	98	0.0087		102	0.1017	245	0.0504
	18	0.0151	97	0.0103			229	0.0990	
	20	0.0262	93	0.0206			228	0.1023	
	24	0.0444	92	0.0254					
	25	0.0563	88	0.0464					
	31	0.0988	87	0.0536					
	32	0.1155	81	0.0988					
8			80	0.1115					
	23	0.0049	149	0.0043					
	24	0.0073	148	0.0052					
	26	0.0095	144	0.0084					
	27	0.0111	143	0.0105					
	32	0.0221	136	0.0249					
	33	0.0264	135	0.0286					
	39	0.0481	129	0.0481					
	40	0.0529	128	0.0530					
	48	0.0978	120	0.0997					
	49	0.1049	119	0.1074					

Tabla J Continuación

n	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	n	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100
10	0.62	0.72	0.89	1.04	1.23	80	1.44	1.49	1.57	1.64	1.71
11	0.67	0.77	0.93	1.08	1.26	85	1.45	1.50	1.58	1.65	1.72
						90	1.47	1.52	1.59	1.66	1.73
12	0.71	0.81	0.96	1.11	1.29	95	1.48	1.53	1.60	1.66	1.74
13	0.74	0.84	1.00	1.14	1.32	100	1.49	1.54	1.61	1.67	1.74
14	0.78	0.87	1.03	1.17	1.34						
						100 <sup>a</sup>	1.48	1.53	1.61	1.67	1.74
15	0.81	0.90	1.05	1.19	1.36	100 <sup>b</sup>	1.49	1.54	1.61	1.67	1.74
16	0.84	0.93	1.08	1.21	1.38						
17	0.87	0.96	1.10	1.24	1.40						
18	0.89	0.98	1.13	1.26	1.41						
19	0.92	1.01	1.15	1.27	1.43						
20	0.94	1.03	1.17	1.29	1.44						
21	0.96	1.05	1.18	1.31	1.45						
22	0.98	1.07	1.20	1.32	1.46						
23	1.00	1.09	1.22	1.33	1.48						
24	1.02	1.10	1.23	1.35	1.49						
25	1.04	1.12	1.25	1.36	1.50						
26	1.05	1.13	1.26	1.37	1.51						
27	1.07	1.15	1.27	1.38	1.51						
28	1.08	1.16	1.28	1.39	1.52						
29	1.10	1.18	1.30	1.40	1.53						
30	1.11	1.19	1.31	1.41	1.54						
32	1.13	1.21	1.33	1.43	1.55						
34	1.16	1.23	1.35	1.45	1.57						
36	1.18	1.25	1.36	1.46	1.58						
38	1.20	1.27	1.38	1.48	1.59						
40	1.22	1.29	1.39	1.49	1.60						
42	1.24	1.30	1.41	1.50	1.61						
44	1.25	1.32	1.42	1.51	1.62						
46	1.27	1.33	1.43	1.52	1.63						
48	1.28	1.35	1.45	1.53	1.63						
50	1.29	1.36	1.46	1.54	1.64						
55	1.33	1.39	1.48	1.56	1.66						
60	1.35	1.41	1.50	1.58	1.67						
65	1.38	1.43	1.52	1.60	1.68						
70	1.40	1.45	1.54	1.61	1.70						
75	1.42	1.47	1.55	1.62	1.71						

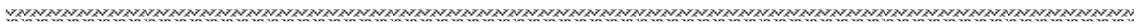
Fuente: Tabla S de Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition.



*Tabla K      Distribución Binomial Acumulada*

Cada entrada de la tabla es la probabilidad de la cola izquierda de  $x$  o éxitos menores en  $n$  evento de Bernoulli donde  $\theta$  es la probabilidad de un suceso en cada evento.

$n$	$x$	$\theta$								
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025
	1	.9975	.9900	.9775	.9600	.9375	.9100	.8775	.8400	.7975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664
	1	.9928	.9720	.9392	.8960	.8438	.7840	.7182	.6480	.5748
	2	.9999	.9990	.9966	.9920	.9844	.9730	.9571	.9360	.9089
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915
	1	.9860	.9477	.8905	.8192	.7383	.6517	.5630	.4752	.3910
	2	.9995	.9963	.9880	.9728	.9492	.9163	.8735	.8208	.7585
	3	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9961	.9919	.9850	.9744	.9590
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503
	1	.9774	.9185	.8352	.7373	.6328	.5282	.4284	.3370	.2562
	2	.9988	.9914	.9734	.9421	.8965	.8369	.7648	.6826	.5931
	3	1.0000	.9995	.9978	.9933	.9844	.9692	.9460	.9130	.8688
	4	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9976	.9947	.9898	.9815
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277
	1	.9672	.8857	.7765	.6554	.5339	.4202	.3191	.2333	.1636
	2	.9978	.9842	.9527	.9011	.8306	.7443	.6471	.5443	.4415
	3	.9999	.9987	.9941	.9830	.9624	.9295	.8826	.8208	.7447
	4	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9954	.9891	.9777	.9590	.9308
	5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9982	.9959	.9917
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152
	1	.9556	.8503	.7166	.5767	.4449	.3294	.2338	.1586	.1024
	2	.9962	.9743	.9262	.8520	.7564	.6471	.5323	.4199	.3164
	3	.9998	.9973	.9879	.9667	.9294	.8740	.8002	.7102	.6083
	4	1.0000	.9998	.9988	.9953	.9871	.9712	.9444	.9037	.8471
	5	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9987	.9962	.9910	.9812	.9643
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9984	.9963
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000



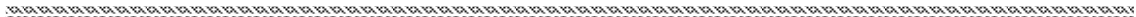


Tabla K Continuación

n	x	$\theta$									
		.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
1	0	.5000	.4500	.4000	.3500	.3000	.2500	.2000	.1500	.1000	.0500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.2500	.2025	.1600	.1225	.0900	.0625	.0400	.0225	.0100	.0025
	1	.7500	.6975	.6400	.5775	.5100	.4375	.3600	.2775	.1900	.0975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.1250	.0911	.0640	.0429	.0270	.0156	.0080	.0034	.0010	.0001
	1	.5000	.4252	.3520	.2818	.2160	.1562	.1040	.0608	.0280	.0072
	2	.8750	.8336	.7840	.7254	.6570	.5781	.4880	.3859	.2710	.1426
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.0625	.0410	.0256	.0150	.0081	.0039	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.3125	.2415	.1792	.1265	.0837	.0508	.0272	.0120	.0037	.0005
	2	.6875	.6090	.5248	.4370	.3483	.2617	.1808	.1095	.0523	.0140
	3	.9375	.9085	.8704	.8215	.7599	.6836	.5904	.4780	.3439	.1855
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.0312	.0185	.0102	.0053	.0024	.0010	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.1875	.1312	.0870	.0540	.0308	.0156	.0067	.0022	.0005	.0000
	2	.5000	.4069	.3174	.2352	.1631	.1035	.0579	.0266	.0086	.0012
	3	.8125	.7438	.6630	.5716	.4718	.3672	.2627	.1648	.0815	.0226
	4	.9688	.9497	.9222	.8840	.8319	.7627	.6723	.5563	.4095	.2262
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.0156	.0083	.0041	.0018	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000
	1	.1094	.0692	.0410	.0223	.0109	.0046	.0016	.0004	.0001	.0000
	2	.3438	.2553	.1792	.1174	.0705	.0376	.0170	.0059	.0013	.0001
	3	.6562	.5585	.4557	.3529	.2557	.1694	.0989	.0473	.0158	.0022
	4	.8906	.8364	.7667	.6809	.5798	.4661	.3446	.2235	.1143	.0328
	5	.9844	.9723	.9533	.9246	.8824	.8220	.7379	.6229	.4686	.2649
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	.0078	.0037	.0016	.0006	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0625	.0357	.0188	.0090	.0038	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000
	2	.2266	.1529	.0963	.0556	.0288	.0129	.0047	.0012	.0002	.0000
	3	.5000	.3917	.2898	.1998	.1260	.0706	.0333	.0121	.0027	.0002
	4	.7734	.6836	.5801	.4677	.3529	.2436	.1480	.0738	.0257	.0038
	5	.9375	.8976	.8414	.7662	.6706	.5551	.4233	.2834	.1497	.0444
	6	.9922	.9848	.9720	.9510	.9176	.8665	.7903	.6794	.5217	.3017
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000



Tabla K Continuación

		$\theta$								
$n$	$x$	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084
	1	.9428	.8131	.6572	.5033	.3671	.2553	.1691	.1064	.0632
	2	.9942	.9619	.8948	.7969	.6785	.5518	.4278	.3154	.2201
	3	.9996	.9950	.9786	.9437	.8862	.8059	.7064	.5941	.4770
	4	1.0000	.9996	.9971	.9896	.9727	.9420	.8939	.8263	.7396
	5	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9958	.9887	.9747	.9502	.9115
	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9987	.9964	.9915	.9819
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9983
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046
	1	.9288	.7748	.5995	.4362	.3003	.1960	.1211	.0705	.0385
	2	.9916	.9470	.8591	.7382	.6007	.4628	.3373	.2318	.1495
	3	.9994	.9917	.9661	.9144	.8343	.7297	.6089	.4826	.3614
	4	1.0000	.9991	.9944	.9804	.9511	.9012	.8283	.7334	.6214
	5	1.0000	.9999	.9994	.9969	.9900	.9747	.9464	.9006	.8342
	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9957	.9888	.9750	.9502
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9986	.9962	.9909
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9992
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025
	1	.9139	.7361	.5443	.3758	.2440	.1493	.0860	.0464	.0233
	2	.9885	.9298	.8202	.6778	.5256	.3828	.2616	.1673	.0996
	3	.9990	.9872	.9500	.8791	.7759	.6496	.5138	.3823	.2660
	4	.9999	.9984	.9901	.9672	.9219	.8497	.7515	.6331	.5044
	5	1.0000	.9999	.9986	.9936	.9803	.9527	.9051	.8338	.7384
	6	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9965	.9894	.9740	.9452	.8980
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9952	.9877	.9726
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9983	.9955
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014
	1	.8981	.6974	.4922	.3221	.1971	.1130	.0606	.0302	.0139
	2	.9848	.9104	.7788	.6174	.4552	.3127	.2001	.1189	.0652
	3	.9984	.9815	.9306	.8389	.7133	.5696	.4256	.2963	.1911
	4	.9999	.9972	.9841	.9496	.8854	.7897	.6683	.5328	.3971
	5	1.0000	.9997	.9973	.9883	.9657	.9218	.8513	.7535	.6331
	6	1.0000	1.0000	.9997	.9980	.9924	.9784	.9499	.9006	.8262
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9957	.9878	.9707	.9390
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9980	.9941	.9852
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9978
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

Tabla K Continuación

n	x	$\theta$									
		.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
8	0	.0039	.0017	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0352	.0181	.0085	.0036	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	2	.1445	.0885	.0498	.0253	.0113	.0042	.0012	.0002	.0000	.0000
	3	.3633	.2604	.1737	.1061	.0580	.0273	.0104	.0029	.0004	.0000
	4	.6367	.5230	.4059	.2936	.1941	.1138	.0563	.0214	.0050	.0004
	5	.8555	.7799	.6846	.5722	.4482	.3215	.2031	.1052	.0381	.0058
	6	.9648	.9368	.8936	.8309	.7447	.6329	.4967	.3428	.1869	.0572
	7	.9961	.9916	.9832	.9681	.9424	.8999	.8322	.7275	.5695	.3366
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	.0020	.0008	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0195	.0091	.0038	.0014	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0898	.0498	.0250	.0112	.0043	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000
	3	.2539	.1658	.0994	.0536	.0253	.0100	.0031	.0006	.0001	.0000
	4	.5000	.3786	.2666	.1717	.0988	.0489	.0196	.0056	.0009	.0000
	5	.7461	.6386	.5174	.3911	.2703	.1657	.0856	.0339	.0083	.0006
	6	.9102	.8505	.7682	.6627	.5372	.3993	.2618	.1409	.0530	.0084
	7	.9805	.9615	.9295	.8789	.8040	.6997	.5638	.4005	.2252	.0712
	8	.9980	.9954	.9899	.9793	.9596	.9249	.8658	.7684	.6126	.3698
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	.0010	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0107	.0045	.0017	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0547	.0274	.0123	.0048	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	3	.1719	.1020	.0548	.0260	.0106	.0035	.0009	.0001	.0000	.0000
	4	.3770	.2616	.1662	.0949	.0473	.0197	.0064	.0014	.0001	.0000
	5	.6230	.4956	.3669	.2485	.1503	.0781	.0328	.0099	.0016	.0001
	6	.8281	.7340	.6177	.4862	.3504	.2241	.1209	.0500	.0128	.0010
	7	.9453	.9004	.8327	.7384	.6172	.4744	.3222	.1798	.0702	.0115
	8	.9893	.9767	.9536	.9140	.8507	.7560	.6242	.4557	.2639	.0861
	9	.9990	.9975	.9940	.9865	.9718	.9437	.8926	.8031	.6513	.4013
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	.0005	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0059	.0022	.0007	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0327	.0148	.0059	.0020	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.1133	.0610	.0293	.0122	.0043	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000
	4	.2744	.1738	.0994	.0501	.0216	.0076	.0020	.0003	.0000	.0000
	5	.5000	.3669	.2465	.1487	.0782	.0343	.0117	.0027	.0003	.0000
	6	.7256	.6029	.4672	.3317	.2103	.1146	.0504	.0159	.0028	.0001
	7	.8867	.8089	.7037	.5744	.4304	.2867	.1611	.0694	.0185	.0016
	8	.9673	.9348	.8811	.7999	.6873	.5448	.3826	.2212	.0896	.0152
	9	.9941	.9861	.9698	.9394	.8870	.8029	.6779	.5078	.3026	.1019
	10	.9995	.9986	.9964	.9912	.9802	.9578	.9141	.8327	.6862	.4312
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla K Continuación

n	x	$\theta$								
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008
	1	.8816	.6590	.4435	.2749	.1584	.0850	.0424	.0196	.0083
	2	.9804	.8891	.7358	.5583	.3907	.2528	.1513	.0834	.0421
	3	.9978	.9744	.9078	.7946	.6488	.4925	.3467	.2253	.1345
	4	.9998	.9957	.9761	.9274	.8424	.7237	.5833	.4382	.3044
	5	1.0000	.9995	.9954	.9806	.9456	.8822	.7873	.6652	.5269
	6	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9857	.9614	.9154	.8418	.7393
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9905	.9745	.9427	.8883
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9983	.9944	.9847	.9644
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9972	.9921
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004
	1	.8646	.6213	.3983	.2336	.1267	.0637	.0296	.0126	.0049
	2	.9755	.8661	.7296	.5017	.3326	.2025	.1132	.0579	.0269
	3	.9969	.9658	.9033	.7473	.5843	.4206	.2783	.1686	.0929
	4	.9997	.9935	.9740	.9009	.7940	.6543	.5005	.3530	.2279
	5	1.0000	.9991	.9947	.9700	.9198	.8346	.7159	.5744	.4268
	6	1.0000	.9999	.9987	.9930	.9757	.9376	.8705	.7712	.6437
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9944	.9818	.9538	.9023	.8212
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9960	.9874	.9679	.9302
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9975	.9922	.9797
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9987	.9959
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002
	1	.8470	.5846	.3567	.1979	.1010	.0475	.0205	.0081	.0029
	2	.9699	.8416	.6479	.4481	.2811	.1608	.0839	.0398	.0170
	3	.9958	.9559	.8535	.6982	.5213	.3552	.2205	.1243	.0632
	4	.9996	.9908	.9533	.8702	.7415	.5842	.4227	.2793	.1672
	5	1.0000	.9985	.9885	.9561	.8883	.7805	.6405	.4859	.3373
	6	1.0000	.9998	.9978	.9884	.9617	.9067	.8164	.6925	.5461
	7	1.0000	1.0000	.9997	.9976	.9897	.9685	.9247	.8499	.7414
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9978	.9917	.9757	.9417	.8811
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9983	.9940	.9825	.9574
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9989	.9961	.9886
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9978
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

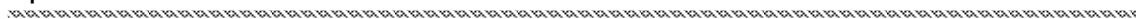


Tabla K Continuación

n	x	$\theta$									
		.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
12	0	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0032	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0193	.0079	.0028	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0730	.0356	.0153	.0056	.0017	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	4	.1938	.1117	.0573	.0255	.0095	.0028	.0006	.0001	.0000	.0000
	5	.3872	.2607	.1582	.0846	.0386	.0143	.0039	.0007	.0001	.0000
	6	.6128	.4731	.3348	.2127	.1178	.0544	.0194	.0046	.0005	.0000
	7	.8062	.6956	.5618	.4167	.2763	.1576	.0726	.0239	.0043	.0002
	8	.9270	.8655	.7747	.6533	.5075	.3512	.2054	.0922	.0256	.0022
	9	.9807	.9579	.9166	.8487	.7472	.6093	.4417	.2642	.1109	.0196
	10	.9968	.9917	.9804	.9576	.9150	.8416	.7251	.5565	.3410	.1184
	11	.9998	.9992	.9978	.9943	.9862	.9683	.9313	.8578	.7176	.4596
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
13	0	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0017	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0112	.0041	.0013	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0461	.0203	.0078	.0025	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.1334	.0698	.0321	.0126	.0040	.0010	.0002	.0000	.0000	.0000
	5	.2905	.1788	.0977	.0462	.0182	.0056	.0012	.0002	.0000	.0000
	6	.5000	.3563	.2288	.1295	.0624	.0243	.0070	.0013	.0001	.0000
	7	.7095	.5732	.4256	.2841	.1654	.0802	.0300	.0053	.0009	.0000
	8	.8666	.7721	.6470	.4995	.3457	.2060	.0991	.0260	.0065	.0003
	9	.9539	.9071	.8314	.7217	.5794	.4157	.2527	.0967	.0342	.0031
	10	.9888	.9731	.9421	.8868	.7975	.6674	.4983	.2704	.1339	.0245
	11	.9983	.9951	.9874	.9704	.9363	.8733	.7664	.6017	.3787	.1354
	12	.9999	.9996	.9987	.9963	.9903	.9762	.9450	.8791	.7458	.4867
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
14	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0009	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0065	.0022	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0287	.0114	.0039	.0011	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0898	.0462	.0175	.0060	.0017	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.2120	.1189	.0583	.0243	.0083	.0022	.0004	.0000	.0000	.0000
	6	.3953	.2586	.1501	.0753	.0315	.0103	.0024	.0003	.0000	.0000
	7	.6047	.4539	.3075	.1836	.0933	.0383	.0116	.0022	.0002	.0000
	8	.7880	.6627	.5141	.3595	.2195	.1117	.0439	.0115	.0015	.0000
	9	.9102	.8328	.7207	.5773	.4158	.2585	.1298	.0467	.0092	.0004
	10	.9713	.9368	.8757	.7795	.6448	.4787	.3018	.1465	.0441	.0042
	11	.9935	.9830	.9602	.9161	.8392	.7189	.5519	.3521	.1584	.0301
	12	.9991	.9971	.9919	.9795	.9525	.8990	.8021	.6433	.4154	.1530
	13	.9999	.9998	.9992	.9976	.9932	.9822	.9560	.8972	.7712	.5123
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	



Tabla K Continuación

n	x	$\theta$								
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001
	1	.8290	.5490	.3186	.1671	.0802	.0353	.0142	.0052	.0017
	2	.9638	.8159	.6042	.3980	.2361	.1268	.0617	.0271	.0107
	3	.9945	.9444	.8227	.6482	.4613	.2969	.1727	.0905	.0424
	4	.9994	.9873	.9383	.8358	.6865	.5155	.3519	.2173	.1204
	5	.9999	.9978	.9832	.9389	.8516	.7216	.5643	.4032	.2608
	6	1.0000	.9997	.9964	.9819	.9434	.8689	.7548	.6098	.4522
	7	1.0000	1.0000	.9994	.9958	.9927	.9500	.8868	.7869	.6535
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9958	.9848	.9578	.9050	.8182
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9963	.9876	.9662	.9231
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9972	.9907	.9745
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981	.9937
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001
	1	.8108	.5147	.2839	.1407	.0635	.0261	.0098	.0033	.0010
	2	.9571	.7892	.5614	.3518	.1971	.0994	.0451	.0183	.0066
	3	.9930	.9316	.7899	.5981	.4050	.2459	.1339	.0651	.0281
	4	.9991	.9830	.9209	.7982	.6302	.4499	.2892	.1666	.0853
	5	.9999	.9967	.9765	.9183	.8103	.6598	.4900	.3288	.1976
	6	1.0000	.9995	.9944	.9733	.9204	.8247	.6881	.5272	.3660
	7	1.0000	.9999	.9989	.9930	.9729	.9256	.8406	.7161	.5629
	8	1.0000	1.0000	.9998	.9985	.9925	.9743	.9329	.8577	.7441
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9984	.9929	.9771	.9417	.8759
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9984	.9938	.9809	.9514
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9951	.9851
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9991	.9965
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla K Continuación

n	x	$\theta$									
		.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
15	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0037	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0176	.0063	.0019	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0592	.0255	.0093	.0028	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.1509	.0769	.0338	.0124	.0037	.0008	.0001	.0000	.0000	.0000
	6	.3036	.1818	.0950	.0422	.0152	.0042	.0008	.0001	.0000	.0000
	7	.5000	.3465	.2131	.1132	.0500	.0173	.0042	.0006	.0000	.0000
	8	.6964	.5478	.3902	.2452	.1311	.0566	.0181	.0036	.0003	.0000
	9	.8491	.7392	.5968	.4357	.2784	.1484	.0611	.0168	.0022	.0001
	10	.9408	.8796	.7827	.6481	.4845	.3135	.1642	.0617	.0127	.0006
	11	.9824	.9576	.9095	.8273	.7031	.5387	.3518	.1773	.0556	.0055
	12	.9963	.9893	.9729	.9383	.8732	.7639	.6020	.3958	.1841	.0362
	13	.9995	.9983	.9948	.9858	.9647	.9198	.8329	.6814	.4510	.1710
	14	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9953	.9866	.9648	.9126	.7941	.5367
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0021	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0106	.0035	.0009	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0384	.0149	.0049	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.1051	.0486	.0191	.0062	.0016	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.2272	.1241	.0583	.0229	.0071	.0016	.0002	.0000	.0000	.0000
	7	.4018	.2559	.1423	.0671	.0257	.0075	.0015	.0002	.0000	.0000
	8	.5982	.4371	.2839	.1594	.0744	.0271	.0070	.0011	.0001	.0000
	9	.7728	.6340	.4728	.3119	.1753	.0796	.0267	.0056	.0005	.0000
	10	.8949	.8024	.6712	.5100	.3402	.1897	.0817	.0235	.0033	.0001
	11	.9616	.9147	.8334	.7108	.5501	.3698	.2018	.0791	.0170	.0009
	12	.9894	.9719	.9349	.8661	.7541	.5950	.4019	.2101	.0684	.0070
	13	.9979	.9934	.9817	.9549	.9006	.8729	.6482	.4386	.2108	.0429
	14	.9997	.9990	.9967	.9902	.9739	.9365	.8593	.7161	.4853	.1892
	15	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9967	.9900	.9719	.9257	.8147	.5599
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla K Continuación

n	x	$\theta$								
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000
	1	.7922	.4818	.2525	.1182	.0501	.0193	.0067	.0021	.0006
	2	.9497	.7618	.5198	.3096	.1637	.0774	.0327	.0123	.0041
	3	.9912	.9174	.7556	.5489	.3530	.2019	.1028	.0464	.0184
	4	.9988	.9779	.9013	.7582	.5739	.3887	.2348	.1260	.0596
	5	.9999	.9953	.9681	.8943	.7653	.5968	.4197	.2639	.1471
	6	1.0000	.9992	.9917	.9623	.8929	.7752	.6188	.4478	.2902
	7	1.0000	.9999	.9983	.9891	.9598	.8954	.7872	.6405	.4743
	8	1.0000	1.0000	.9997	.9974	.9876	.9597	.9006	.8011	.6626
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9969	.9873	.9617	.9081	.8166
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9968	.9880	.9652	.9174
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9970	.9894	.9699
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9975	.9914
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000
	1	.7735	.4503	.2241	.0991	.0395	.0142	.0046	.0013	.0003
	2	.9419	.7338	.4797	.2713	.1353	.0600	.0236	.0082	.0025
	3	.9891	.9018	.7202	.5010	.3057	.1646	.0783	.0328	.0120
	4	.9985	.9718	.8794	.7164	.5187	.3327	.1886	.0942	.0411
	5	.9998	.9936	.9581	.8671	.7175	.5344	.3550	.2088	.1077
	6	1.0000	.9988	.9882	.9487	.8610	.7217	.5491	.3743	.2258
	7	1.0000	.9998	.9973	.9837	.9431	.8593	.7283	.5634	.3915
	8	1.0000	1.0000	.9995	.9957	.9807	.9404	.8609	.7368	.5778
	9	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9946	.9790	.9403	.8653	.7473
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9939	.9788	.9424	.8720
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9986	.9938	.9797	.9463
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9986	.9942	.9817
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9951
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

Tabla K Continuación

n	x	$\theta$									
		.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
17	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0012	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0064	.0019	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0245	.0086	.0025	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0717	.0301	.0106	.0030	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.1662	.0826	.0348	.0120	.0032	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000
	7	.3145	.1834	.0919	.0383	.0127	.0031	.0005	.0000	.0000	.0000
	8	.5000	.3374	.1989	.0994	.0403	.0124	.0026	.0003	.0000	.0000
	9	.6855	.5257	.3595	.2128	.1046	.0402	.0109	.0017	.0001	.0000
	10	.8338	.7098	.5522	.3812	.2248	.1071	.0377	.0083	.0008	.0000
	11	.9283	.8529	.7361	.5803	.4032	.2347	.1057	.0319	.0047	.0001
	12	.9755	.9404	.8740	.7652	.6113	.4261	.2418	.0987	.0221	.0012
	13	.9936	.9816	.9536	.8972	.7981	.6470	.4511	.2444	.0826	.0088
	14	.9988	.9959	.9877	.9673	.9226	.8363	.6904	.4802	.2382	.0503
	15	.9999	.9994	.9979	.9933	.9807	.9499	.8818	.7475	.5182	.2078
	16	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9977	.9925	.9775	.9369	.8332	.5819
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
18	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0038	.0010	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0154	.0049	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0481	.0183	.0058	.0014	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.1189	.0537	.0203	.0062	.0014	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.2403	.1280	.0576	.0212	.0061	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000
	8	.4073	.2527	.1347	.0597	.0210	.0054	.0009	.0001	.0000	.0000
	9	.5927	.4222	.2632	.1391	.0596	.0193	.0043	.0005	.0000	.0000
	10	.7597	.6085	.4366	.2717	.1407	.0569	.0163	.0027	.0002	.0000
	11	.8811	.7742	.6257	.4509	.2783	.1390	.0513	.0118	.0012	.0000
	12	.9519	.8923	.7912	.6450	.4656	.2825	.1329	.0419	.0064	.0002
	13	.9846	.9589	.9058	.8114	.6673	.4813	.2836	.1206	.0282	.0015
	14	.9962	.9880	.9672	.9217	.8354	.6943	.4990	.2798	.0982	.0109
	15	.9993	.9975	.9918	.9764	.9400	.8647	.7287	.5203	.2662	.0581
	16	.9999	.9997	.9987	.9954	.9858	.9605	.9009	.7759	.5497	.2265
	17	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9944	.9820	.9464	.8499	.6028
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

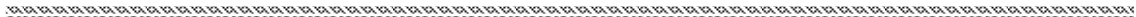


Tabla K Continuación

n	x	$\theta$								
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000
	1	.7547	.4203	.1985	.0829	.0310	.0104	.0031	.0008	.0002
	2	.9335	.7054	.4413	.2369	.1113	.0462	.0170	.0055	.0015
	3	.9868	.8850	.6841	.4551	.2631	.1332	.0591	.0230	.0077
	4	.9980	.9648	.8556	.6733	.4654	.2822	.1500	.0696	.0280
	5	.9998	.9914	.9463	.8369	.6678	.4739	.2968	.1629	.0777
	6	1.0000	.9983	.9837	.9324	.8251	.6655	.4812	.3081	.1727
	7	1.0000	.9997	.9959	.9767	.9225	.8180	.6656	.4878	.3169
	8	1.0000	1.0000	.9992	.9933	.9713	.9161	.8145	.6675	.4940
	9	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9911	.9674	.9125	.8139	.6710
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9977	.9895	.9653	.9115	.8159
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9972	.9886	.9648	.9129
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9969	.9884	.9658
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9969	.9891
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000
	1	.7358	.3917	.1756	.0692	.0243	.0076	.0021	.0005	.0001
	2	.9245	.6769	.4049	.2061	.0913	.0355	.0121	.0036	.0009
	3	.9841	.8670	.6477	.4114	.2252	.1071	.0444	.0160	.0049
	4	.9974	.9568	.8298	.6296	.4148	.2375	.1182	.0510	.0189
	5	.9997	.9887	.9327	.8042	.6172	.4164	.2454	.1256	.0553
	6	1.0000	.9976	.9781	.9133	.7858	.6080	.4166	.2500	.1299
	7	1.0000	.9996	.9941	.9679	.8982	.7723	.6010	.4159	.2520
	8	1.0000	.9999	.9987	.9900	.9591	.8867	.7624	.5956	.4143
	9	1.0000	1.0000	.9998	.9974	.9861	.9520	.8782	.7553	.5914
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9961	.9829	.9468	.8725	.7507
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9949	.9804	.9435	.8692
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9987	.9940	.9790	.9420
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9985	.9935	.9786
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9984	.9936
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9985
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	



Tabla K Continuación

n	x	$\theta$									
		.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
19	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0022	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0096	.0028	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0318	.0109	.0031	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0835	.0342	.0116	.0031	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.1796	.0871	.0352	.0114	.0028	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	.3238	.1841	.0885	.0347	.0105	.0023	.0003	.0000	.0000	.0000
	9	.5000	.3290	.1861	.0875	.0326	.0089	.0016	.0001	.0000	.0000
	10	.6762	.5060	.3325	.1855	.0839	.0287	.0067	.0008	.0000	.0000
	11	.8204	.6831	.5122	.3344	.1820	.0775	.0233	.0041	.0003	.0000
	12	.9165	.8273	.6919	.5188	.3345	.1749	.0676	.0163	.0017	.0000
	13	.9682	.9223	.8371	.7032	.5261	.3322	.1631	.0537	.0086	.0002
	14	.9904	.9720	.9304	.8500	.7178	.5346	.3267	.1444	.0352	.0020
	15	.9978	.9923	.9770	.9409	.8668	.7369	.5449	.3159	.1150	.0132
	16	.9996	.9985	.9945	.9830	.9538	.8887	.7631	.5587	.2946	.0665
	17	1.0000	.9998	.9992	.9969	.9896	.9690	.9171	.8015	.5797	.2453
	18	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9958	.9856	.9544	.8649	.6226
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0059	.0015	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0207	.0064	.0016	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0577	.0214	.0065	.0015	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.1316	.0580	.0210	.0060	.0013	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	.2517	.1308	.0565	.0196	.0051	.0009	.0001	.0000	.0000	.0000
	9	.4119	.2493	.1275	.0532	.0171	.0039	.0006	.0000	.0000	.0000
	10	.5881	.4086	.2447	.1218	.0480	.0139	.0026	.0002	.0000	.0000
	11	.7483	.5857	.4044	.2376	.1133	.0409	.0100	.0013	.0001	.0000
	12	.8684	.7480	.5841	.3990	.2277	.1018	.0321	.0059	.0004	.0000
	13	.9423	.8701	.7500	.5834	.3920	.2142	.0867	.0219	.0024	.0000
	14	.9793	.9447	.8744	.7546	.5836	.3828	.1958	.0673	.0113	.0003
	15	.9941	.9811	.9490	.8818	.7625	.5852	.3704	.1702	.0432	.0026
	16	.9987	.9951	.9840	.9556	.8929	.7748	.5886	.3523	.1330	.0159
	17	.9998	.9991	.9964	.9879	.9645	.9087	.7939	.5951	.3231	.0755
	18	1.0000	.9999	.9995	.9979	.9924	.9757	.9308	.8244	.6083	.2642
	19	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9968	.9885	.9612	.8784	.6415
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Fuente: Tabla C de Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition.

Apéndice de Tablas

Tabla L Distribución Binomio para  $\theta = 0.5$  en cada evento

Cada entrada de la tabla etiquetada con  $P$  es la probabilidad de cola de cada extremo para los valores de  $K$ , el numero de éxito en  $N$  eventos de Bernoulli con probabilidad de éxito de  $\theta = 0.5$ .

$N$	Left tail	$P$	Right tail	$N$	Left tail	$P$	Right tail	$N$	Left tail	$P$	Right tail
1	0	.5000	1	12	0	.0002	12	17	0	.0000	17
2	0	.2500	2		1	.0032	11		1	.0001	16
	1	.7500	1		2	.0193	10		2	.0012	15
3	0	.1250	3		3	.0730	9		3	.0064	14
	1	.5000	2		4	.1938	8		4	.0245	13
4	0	.0625	4		5	.3872	7		5	.0717	12
	1	.3125	3		6	.6128	6		6	.1662	11
	2	.6875	2	13	0	.0001	13		7	.3145	10
5	0	.0312	5		1	.0017	12		8	.5000	9
	1	.1875	4		2	.0112	11	18	0	.0000	18
	2	.5000	3		3	.0461	10		1	.0001	17
6	0	.0156	6		4	.1334	9		2	.0007	16
	1	.1094	5		5	.2905	8		3	.0038	15
	2	.3438	4		6	.5000	7		4	.0154	14
	3	.6562	3	14	0	.0000	14		5	.0481	13
7	0	.0078	7		1	.0009	13		6	.1189	12
	1	.0625	6		2	.0065	12		7	.2403	11
	2	.2266	5		3	.0287	11		8	.4073	10
	3	.5000	4		4	.0898	10		9	.5927	9
8	0	.0039	8		5	.2120	9	19	0	.0000	19
	1	.0352	7		6	.3953	8		1	.0000	18
	2	.1445	6		7	.6047	7		2	.0004	17
	3	.3633	5	15	0	.0000	15		3	.0022	16
	4	.6367	4		1	.0005	14		4	.0096	15
9	0	.0020	9		2	.0037	13		5	.0318	14
	1	.0195	8		3	.0176	12		6	.0835	13
	2	.0898	7		4	.0592	11		7	.1796	12
	3	.2539	6		5	.1509	10		8	.3238	11
	4	.5000	5		6	.3036	9		9	.5000	10
10	0	.0010	10		7	.5000	8	20	0	.0000	20
	1	.0107	9	16	0	.0000	16		1	.0000	19
	2	.0547	8		1	.0003	15		2	.0002	18
	3	.1719	7		2	.0021	14		3	.0013	17
	4	.3770	6		3	.0106	13		4	.0059	16
	5	.6230	5		4	.0384	12		5	.0207	15
11	0	.0005	11		5	.1051	11		6	.0577	14
	1	.0059	10		6	.2272	10		7	.1316	13
	2	.0327	9		7	.4018	9		8	.2517	12
	3	.1133	8		8	.5982	8		9	.4119	11
	4	.2744	7						10	.5881	10
	5	.5000	6								

Fuente: Tabla G de Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition.

*Tabla M Probabilidades para el estadístico de rango con signo de Wilcoxon*

Cada entrada de la tabla etiquetada con  $P$  es la probabilidad de cola de cada extremo para los valores de  $T$ , el estadístico de rango con signo de Wilcoxon para muestras de tamaño  $N$ , donde  $T$  es interpretado como  $T^+$  o  $T^-$ .

$N$	Left tail	$P$	Right tail	$N$	Left tail	$P$	Right tail	$N$	Left tail	$P$	Right tail
2	0	.250	3	7	0	.008	28	9	0	.002	45
	1	.500	2		1	.016	27		1	.004	44
3	0	.125	6		2	.023	26		2	.006	43
	1	.250	5		3	.039	25		3	.010	42
	2	.375	4		4	.055	24		4	.014	41
	3	.625	3		5	.078	23		5	.020	40
4	0	.062	10		6	.109	22		6	.027	39
	1	.125	9		7	.148	21		7	.037	38
	2	.188	8		8	.188	20		8	.049	37
	3	.312	7		9	.234	19		9	.064	36
	4	.438	6		10	.289	18		10	.082	35
	5	.562	5		11	.344	17		11	.102	34
5	0	.031	15		12	.406	16		12	.125	33
	1	.062	14		13	.469	15		13	.150	32
	2	.094	13		14	.531	14		14	.180	31
	3	.156	12	8	0	.004	36		15	.213	30
	4	.219	11		1	.008	35		16	.248	29
	5	.312	10		2	.012	34		17	.285	28
	6	.406	9		3	.020	33		18	.326	27
	7	.500	8		4	.027	32		19	.367	26
6	0	.016	21		5	.039	31		20	.410	25
	1	.031	20		6	.055	30		21	.455	24
	2	.047	19		7	.074	29		22	.500	23
	3	.078	18		8	.098	28	10	0	.001	55
	4	.109	17		9	.125	27		1	.002	54
	5	.156	16		10	.156	26		2	.003	53
	6	.219	15		11	.191	25		3	.005	52
	7	.281	14		12	.230	24		4	.007	51
	8	.344	13		13	.273	23		5	.010	50
	9	.422	12		14	.320	22		6	.014	49
	10	.500	11		15	.371	21		7	.019	48
					16	.422	20		8	.024	47
					17	.473	19		9	.032	46
					18	.527	18		10	.042	45

Tabla M Continuación

N	Left tail	P	Right tail	N	Left tail	P	Right tail	N	Left tail	P	Right tail
10	11	.053	44	12	0	.000	78	13	11	.007	80
	12	.065	43		1	.000	77		12	.009	79
	13	.080	42		2	.001	76		13	.011	78
	14	.097	41		3	.001	75		14	.013	77
	15	.116	40		4	.002	74		15	.016	76
	16	.138	39		5	.002	73		16	.020	75
	17	.161	38		6	.003	72		17	.024	74
	18	.188	37		7	.005	71		18	.029	73
	19	.216	36		8	.006	70		19	.034	72
	20	.246	35		9	.008	69		20	.040	71
	21	.278	34		10	.010	68		21	.047	70
	22	.312	33		11	.013	67		22	.055	69
	23	.348	32		12	.017	66		23	.064	68
	24	.385	31		13	.021	65		24	.073	67
	25	.423	30		14	.026	64		25	.084	66
	26	.461	29		15	.032	63		26	.095	65
	27	.500	28		16	.039	62		27	.108	64
11	0	.000	66		17	.046	61		28	.122	63
	1	.001	65		18	.055	60		29	.137	62
	2	.001	64		19	.065	59		30	.153	61
	3	.002	63		20	.076	58		31	.170	60
	4	.003	62		21	.088	57		32	.188	59
	5	.005	61		22	.102	56		33	.207	58
	6	.007	60		23	.117	55		34	.227	57
	7	.009	59		24	.133	54		35	.249	56
	8	.012	58		25	.151	53		36	.271	55
	9	.016	57		26	.170	52		37	.294	54
	10	.021	56		27	.190	51		38	.318	53
	11	.027	55		28	.212	50		39	.342	52
	12	.034	54		29	.235	49		40	.368	51
	13	.042	53		30	.259	48		41	.393	50
	14	.051	52		31	.285	47		42	.420	49
	15	.062	51		32	.311	46		43	.446	48
	16	.074	50		33	.339	45		44	.473	47
	17	.087	49		34	.367	44		45	.500	46
	18	.103	48		35	.396	43	14	0	.000	105
	19	.120	47		36	.425	42		1	.000	104
	20	.139	46		37	.455	41		2	.000	103
	21	.160	45		38	.485	40		3	.000	102
	22	.183	44		39	.515	39		4	.000	101
	23	.207	43	13	0	.000	91		5	.001	100
	24	.232	42		1	.000	90		6	.001	99
	25	.260	41		2	.000	89		7	.001	98
	26	.289	40		3	.001	88		8	.002	97
	27	.319	39		4	.001	87		9	.002	96
	28	.350	38		5	.001	86		10	.003	95
	29	.382	37		6	.002	85		11	.003	94
	30	.416	36		7	.002	84		12	.004	93
	31	.449	35		8	.003	83		13	.005	92
	32	.483	34		9	.004	82		14	.007	91
	33	.517	33		10	.005	81		15	.008	90

Tabla M Continuación

<i>N</i>	<i>Left tail</i>	<i>P</i>	<i>Right tail</i>	<i>N</i>	<i>Left tail</i>	<i>P</i>	<i>Right tail</i>	<i>N</i>	<i>Left tail</i>	<i>P</i>	<i>Right tail</i>
14	16	.010	89	15	0	.000	120	15	31	.053	89
	17	.012	88		1	.000	119		32	.060	88
	18	.015	87		2	.000	118		33	.068	87
	19	.018	86		3	.000	117		34	.076	86
	20	.021	85		4	.000	116		35	.084	85
	21	.025	84		5	.000	115		36	.094	84
	22	.029	83		6	.000	114		37	.104	83
	23	.034	82		7	.001	113		38	.115	82
	24	.039	81		8	.001	112		39	.126	81
	25	.045	80		9	.001	111		40	.138	80
	26	.052	79		10	.001	110		41	.151	79
	27	.059	78		11	.002	109		42	.165	78
	28	.068	77		12	.002	108		43	.180	77
	29	.077	76		13	.003	107		44	.195	76
	30	.086	75		14	.003	106		45	.211	75
	31	.097	74		15	.004	105		46	.227	74
	32	.108	73		16	.005	104		47	.244	73
	33	.121	72		17	.006	103		48	.262	72
	34	.134	71		18	.008	102		49	.281	71
	35	.148	70		19	.009	101		50	.300	70
	36	.163	69		20	.011	100		51	.319	69
	37	.179	68		21	.013	99		52	.339	68
	38	.196	67		22	.015	98		53	.360	67
	39	.213	66		23	.018	97		54	.381	66
	40	.232	65		24	.021	96		55	.402	65
	41	.251	64		25	.024	95		56	.423	64
	42	.271	63		26	.028	94		57	.445	63
	43	.292	62		27	.032	93		58	.467	62
	44	.313	61		28	.036	92		59	.489	61
	45	.335	60		29	.042	91		60	.511	60
	46	.357	59		30	.047	90				
	47	.380	58								
	48	.404	57								
	49	.428	56								
	50	.452	55								
	51	.476	54								
	52	.500	53								

Fuente: Tabla H de Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition.

Tabla N Cuantiles de la prueba estadística de Wilcoxon de rango con signo.

Los datos ingresados en esta tabla son cuantiles  $w_p$  del estadístico de prueba  $T$ , para valores seleccionados de  $n$  puede ser calculado usando la siguiente ecuación

$$w_p = \frac{n(n+1)}{2} - w_{1-p}$$

donde  $\frac{n(n+1)}{2}$  es dado en el lado de la columna derecha. Note que  $P(T < w_p) \leq p$  y

$P(T > w_p) \leq 1 - p$  si  $H_0$  es verdadero.

	$w_{.005}$	$w_{.01}$	$w_{.025}$	$w_{.05}$	$w_{.10}$	$w_{.20}$	$w_{.30}$	$w_{.40}$	$w_{.50}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$n = 4$	0	0	0	0	1	3	3	4	5	10
5	0	0	0	1	3	4	5	6	7.5	15
6	0	0	1	3	4	6	8	9	10.5	21
7	0	1	3	4	6	9	11	12	14	28
8	1	2	4	6	9	12	14	16	18	36
9	2	4	6	9	11	15	18	20	22.5	45
10	4	6	9	11	15	19	22	25	27.5	55
11	6	8	11	14	18	23	27	30	33	66
12	8	10	14	18	22	28	32	36	39	78
13	10	13	18	22	27	33	38	42	45.5	91
14	13	16	22	26	32	39	44	48	52.5	105
15	16	20	26	31	37	45	51	55	60	120
16	20	24	30	36	43	51	58	63	68	136
17	24	28	35	42	49	58	65	71	76.5	153
18	28	33	41	48	56	66	73	80	85.5	171
19	33	38	47	54	63	74	82	89	95	190
20	38	44	53	61	70	82	91	98	105	210

Fuente: Tabla 7 de Practical Nonparametric statistics. W. J. Conover.

Para  $n$  mayor que 20, el  $p$ -ésimo cuantil  $w_p$  puede ser aproximado por

$$w_p = \frac{n(n+1)}{4} + x_p \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

de la distribución normal standard.

Tabla O Estadístico de prueba de Kruskal-Wallis

Cada entrada de la tabla son los valores pequeños de  $H$  de Krukal-Wallis tal que la probabilidad de la cola derecha es menor o igual que el valor dado en la fila para  $k = 3$ , cada tamaño de la muestra menor o igual que cinco.

$n_1, n_2, n_3$	0.100	0.050	0.020	0.010	0.001
2, 2, 2	4.571	—	—	—	—
3, 2, 1	4.286	—	—	—	—
3, 2, 2	4.500	4.714	—	—	—
3, 3, 1	4.571	5.143	—	—	—
3, 3, 2	4.556	5.361	6.250	—	—
3, 3, 3	4.622	5.600	6.489	7.200	—
4, 2, 1	4.500	—	—	—	—
4, 2, 2	4.458	5.333	6.000	—	—
4, 3, 1	4.056	5.208	—	—	—
4, 3, 2	4.511	5.444	6.144	6.444	—
4, 3, 3	4.709	5.791	6.564	6.745	—
4, 4, 1	4.167	4.967	6.667	6.667	—
4, 4, 2	4.555	5.455	6.600	7.036	—
4, 4, 3	4.545	5.598	6.712	7.144	8.909
4, 4, 4	4.654	5.692	6.962	7.654	9.269
5, 2, 1	4.200	5.000	—	—	—
5, 2, 2	4.373	5.160	6.000	6.533	—
5, 3, 1	4.018	4.960	6.044	—	—
5, 3, 2	4.651	5.251	6.124	6.909	—
5, 3, 3	4.533	5.648	6.533	7.079	8.727
5, 4, 1	3.987	4.985	6.431	6.955	—
5, 4, 2	4.541	5.273	6.505	7.205	8.591
5, 4, 3	4.549	5.656	6.676	7.445	8.795
5, 4, 4	4.668	5.657	6.953	7.760	9.168
5, 5, 1	4.109	5.127	6.145	7.309	—
5, 5, 2	4.623	5.338	6.446	7.338	8.938
5, 5, 3	4.545	5.705	6.866	7.578	9.284
5, 5, 4	4.523	5.666	7.000	7.823	9.606
5, 5, 5	4.560	5.780	7.220	8.000	9.920

Fuente: Tabla K de Nonparametric statistical inference. Jean Dickinson Gibbons y Subarata Chakranorti. Third edition.

Para  $k > 3$ , las probabilidades de la cola derecha en  $H$  son encontradas en la tabla B con  $k - 1$  grados de libertad.

Tabla P Gráfico que provee límites de confianza para  $p$  en muestras binomiales, dada una fracción de muestra  $\frac{Y}{n}$ . Coeficiente de confianza,  $1 - 2\alpha = 0.95$ .

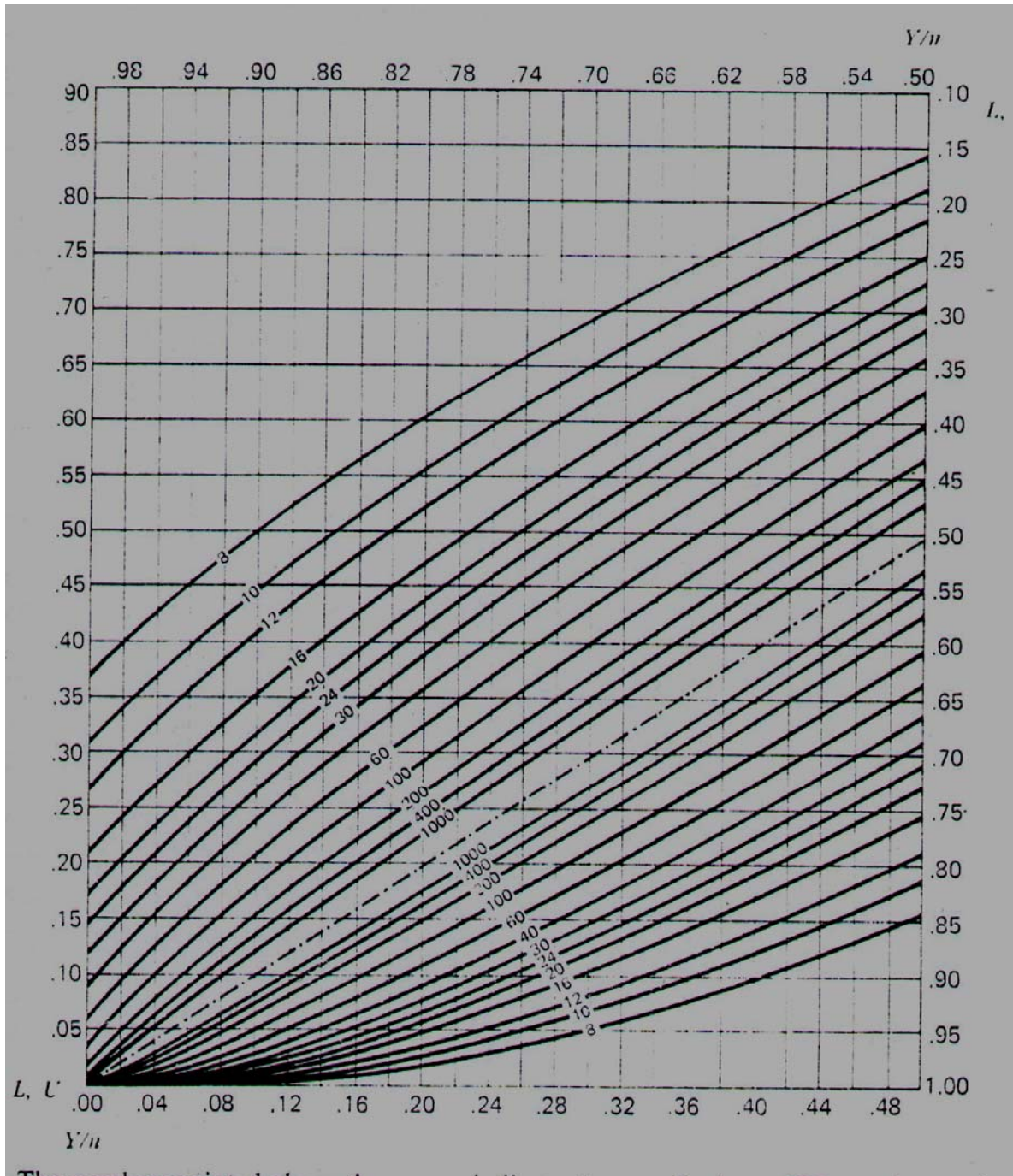
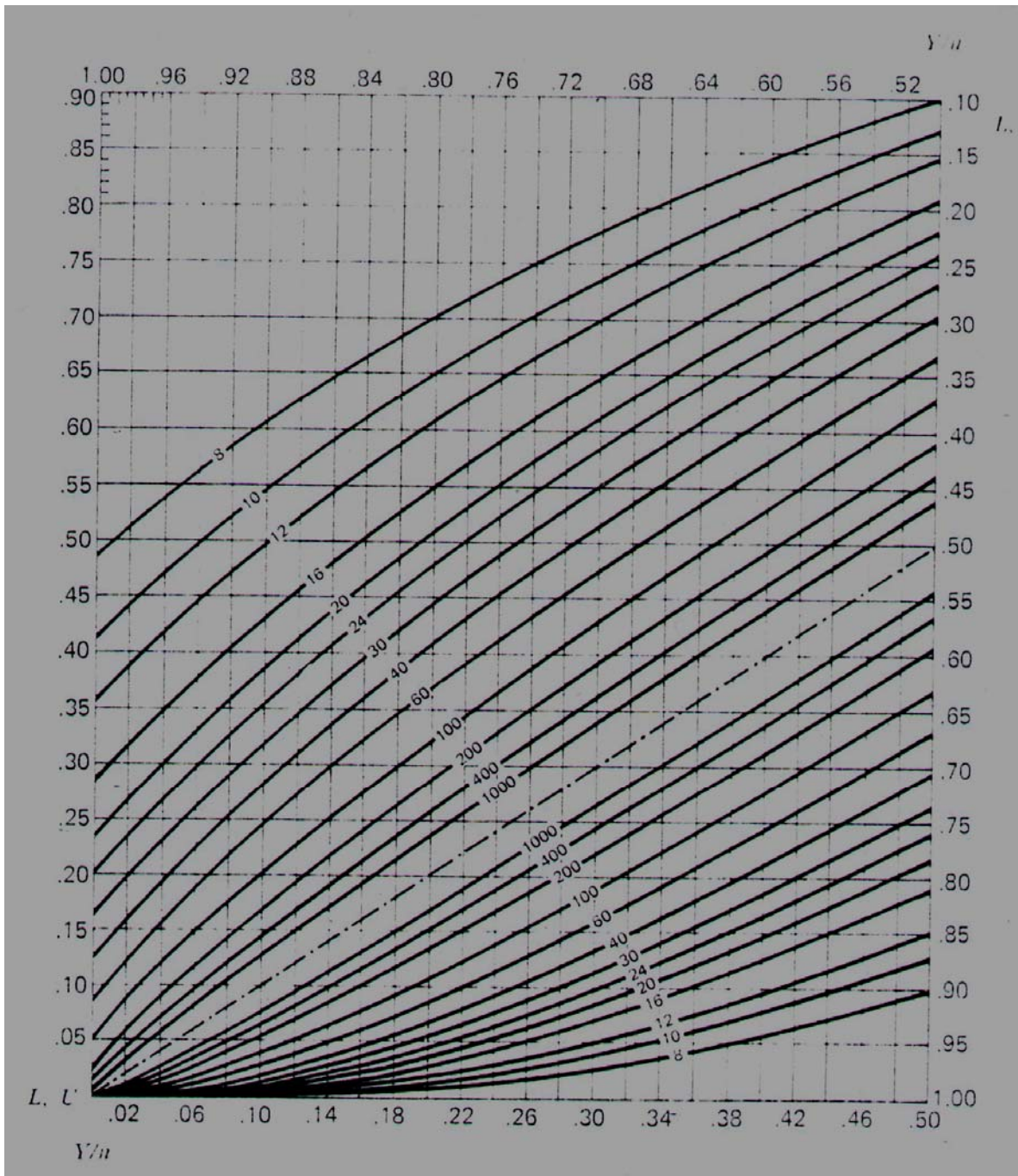


Tabla P Continuación



Fuente: Tabla 4 de Practical Nonparametric statistics. W. J. Conover

*REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS*

1. Canavos G.C. (1989). Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos. Editorial Mc Graw Hill.
2. Conover W. J. (1971). Practical Nonparametric Statistics. Editorial John Wiley & Sons.
3. Dickinson Gibbons, Jean and Chakraborti, Subhabrata (1992). Nonparametric Statistical Inference. Third Edition. Editorial Marcel Dekker, Inc.
4. Fernández Loureiro de Pérez, Emma (2004). Estadística no paramétrica: a modo de introducción. Ediciones Cooperativas.
5. Fernández, Pita; S. (2001), "Análisis de supervivencia" <http://www.fisterra.com/mbe/investiga/supervivencia/supervivencia.htm#Kaplan-Meier>.
6. González Otero, Dr. Alejandro; Machín García, Dr. Sergio; Castañeda Guillot, Dr. Carlos; G. Svarch, Dra. Eva y Roque Acosta, Dra. María del C. (1997). "Estudio de las alteraciones hepáticas en un grupo de pacientes con leucemia aguda linfoblástica". [http://www.bvs.sld.cu/revistas/hih/vol12\\_1\\_96/hih02196.htm](http://www.bvs.sld.cu/revistas/hih/vol12_1_96/hih02196.htm).
7. Guerra Bustillo, Caridad Valkiria; Pereira de Calzadilla, Josefina y Fernández Chuairey, Lucia (2002). "Propuesta de Sistema de Superación Profesional sobre métodos estadísticos para especialistas agropecuarios y de otras ramas". [http://intranet.dict.uh.cu/Revistas/CM2002\\_2003/CM02202b.doc](http://intranet.dict.uh.cu/Revistas/CM2002_2003/CM02202b.doc).
8. Hernández, Bernardo; Langer, Ana; Romero, Minerva, Chirinos, Jesús; (2004). "Factores asociados a la muerte materna hospitalaria en el estado de Morelos, México". <http://www.insp.mx/salud/36/365-12s.html>
9. Hines, William, W. and C. Montgomery, Douglas (1993). Probabilidad y estadística para ingenieros y administración. segunda edición. Editorial Continental, S.A. de C.V. México.
10. Manuel Gómez-Gómez, Cecilia Danglot-Banck, Leopoldo Vega-Franco, Sinopsis de pruebas estadísticas no paramétricas: Cuándo usarlas (Non parametric statistical tests synopsis. When are they used?)
11. Mendenhall William (1990). Estadística para administradores, Grupo Editorial Iberoamérica.
12. Mendenhall William, L. Scheaffer Richard, D. Wackerly Dennis (1986). Estadística Matemática con aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica. Pág. 618.
13. P. Sprent and N. C. Smeeton Applied Nonparametric Statistical Methods. Third Edition (Paperback). Editorial Chapman & Hall/CRC.

## Referencias Bibliográficas

---

14. Peix González, Amalia; Felizardo Ponce, Vicente; López Díaz, Adlin; Prohías Martínez, Juan; Cruz, José Abreu; Barrera Sarduy, José D.; Cárdenas Castillo, Reinaldo y Maltas Pineda, Ana Ma. (1999). "comparación entre el grado de regurgitación mitral detectada por ventriculografía nuclear y por ecocardiograma doppler", [http://www.bvs.sld.cu/revistas/car/vol13\\_2\\_99/car06299.htm](http://www.bvs.sld.cu/revistas/car/vol13_2_99/car06299.htm).
15. Pereira Velásquez, Claudia y Martínez Barrientos, Alejandra (2003). "programa para disminuir indicadores de depresión mediante el desarrollo de estrategias de afrontamiento (un estudio adolescentes institucionalizados)", <http://www.ucb.edu.bo/Publicaciones/>
16. Siegel, Sidney (1991). Estadística no paramétrica. México: Editorial Trillas.