UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICAS

INFORME FINAL DEL CURSO DE ESPECIALIZACIÓN:
CURSO DE ESPECIALIZACIÓN EN 3-VARIEDADES Y NUDOS TOPOLÓGICOS

TITULO DEL INFORME FINAL:
NUDOS SATELITE EN 3-VARIEDADES

PARA OPTAR POR EL TITULO DE:
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

PRESENTADO POR:
KEISY VANESSA VASQUEZ REQUENO
Nº CARNET VR16004

DOCENTE ASESOR:
MTRO. JOSÉ JOAQUÍN APARICIO RAMÍREZ

SEPTIEMBRE 2024
SAN MIGUEL, EL SALVADOR, CENTROAMERICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
AUTORIDADES

MSC. JUAN ROSA QUINTANILLA
RECTOR

DRA. EVELYN BEATRIZ FARFÁN
VICERRECTORA ACADÉMICA

MSC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO
VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

LIC. PEDRO ROSALÍO ESCOBAR CASTANEDA
SECRETARIO GENERAL

LIC. CARLOS AMILCAR SERRANO RIVERA
FISCAL GENERAL

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
AUTORIDADES

MSC. CARLOS IVÁN HERNÁNDEZ FRANCO
DECANO

DRA. NORMA AZUCENA FLORES RETANA
VICEDECANA

LIC. CARLOS DE JESÚS SÁNCHEZ
SECRETARIO

ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA MARTÍNEZ
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

M.SC. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ
COORDINADORA DEL PROCESO DE GRADO DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Índice general

Resumen

Este informe aborda el estudio de los nudos satélite en 3-variedades, explorando su definición, construcción, propiedades topológicas e importancia dentro de la teoría de nudos. A través de un análisis exhaustivo, se presentan conceptos fundamentales como el nudo patrón, el nudo compañero y el toro sólido, los cuales son esenciales para entender la estructura y clasificación de estos nudos. Se describe la metodología empleada para su construcción y se analizan los invariantes topológicos que permiten su clasificación. Los resultados obtenidos destacan la complejidad de los nudos satélite y su relevancia en aplicaciones prácticas, como la biología molecular y la física. Finalmente, se presentan conclusiones que resaltan la importancia de estos nudos en el estudio de las 3-variedades y su potencial para futuras investigaciones.

Palabras Clave: Nudos satélite; 3-variedades; teoría de nudos; nudo patrón; nudo compañero; toro sólido.

Abstrac

This report explores the study of satellite knots in 3-manifolds, examining their definition, construction, topological properties, and importance within knot theory. Through a comprehensive analysis, fundamental concepts such as the pattern knot, companion knot, and solid torus are presented, which are essential for understanding the structure and classification of these knots. The methodology used for their construction is described, and the topological invariants that allow their classification are analyzed. The results obtained highlight the complexity of satellite knots and their relevance in practical applications, such as molecular biology and physics. Finally, conclusions are presented that emphasize the importance of these knots in the study of 3-manifolds and their potential for future research.

Keywords: Satellite knots; 3-manifolds; knot theory; pattern knot; companion knot; solid torus

Introducción

La teoría de nudos, una rama intrigante y profundamente visual de la topología, explora las propiedades y comportamientos de los nudos y enlaces dentro de espacios tridimensionales, específicamente en 3-variedades. Dentro de este fascinante campo, los nudos satélites representan una categoría especialmente compleja y rica, donde las interacciones entre diferentes tipos de nudos generan estructuras con propiedades topológicas únicas y aplicaciones tanto teóricas como prácticas. Este informe se sumerge en el estudio de los nudos satélites en 3-variedades, abordando desde su definición y clasificación hasta sus métodos de construcción y representación, revelando así su significancia en áreas tan variadas como la física, la biología molecular y la matemática pura.

Motivación

Los nudos satélites no son solo estructuras matemáticas abstractas; su estudio ofrece compresion profunda de fenómenos físicos y biológicos, como la configuración del ADN y las líneas del campo magnético. Además, la capacidad de descomponer y analizar estos nudos en términos de sus componentes, el nudo patrón y el compañero, provee un marco poderoso para explorar y clasificar otras estructuras complejas dentro de la matemática y la ciencia.

Objetivos

Este informe tiene como objetivo principal proporcionar un análisis exhaustivo de los nudos satélites en 3-variedades, con un enfoque particular en:

- Definir y diferenciar los nudos satélites de otros tipos de nudos, como los primarios y compuestos.
- Explorar métodos de construcción que permitan visualizar cómo se pueden formar y manipular estos nudos en práctica.
- Analizar las propiedades topológicas de los nudos satélites, utilizando invariantes topológicos y estudios de su estructura interna.
- Comparar y clasificar los nudos satélites en base a sus características estructurales y topológicas, proporcionando un sistema de clasificación detallado que ayude en el estudio y la aplicación de estos nudos.

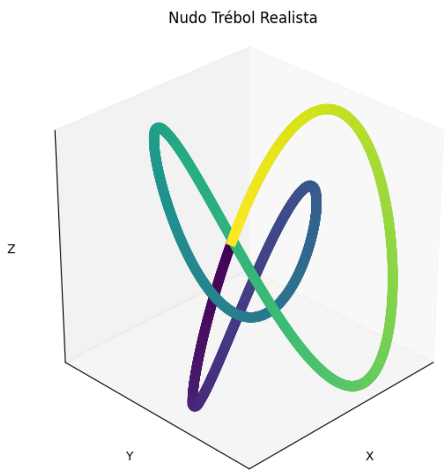
Estructura del Informe El informe está estructurado para guiar al lector a través de una exploración comprensiva de los nudos satélites, comenzando con una introducción a sus definiciones y significado, seguido de una discusión detallada sobre los métodos de construcción y visualización, y culminando con un análisis profundo de sus propiedades topológicas y esquemas de clasificación. Cada capítulo está diseñado para construir sobre el conocimiento presentado en los anteriores, facilitando así una comprensión integral de la materia.

Capítulo 1

Preliminares

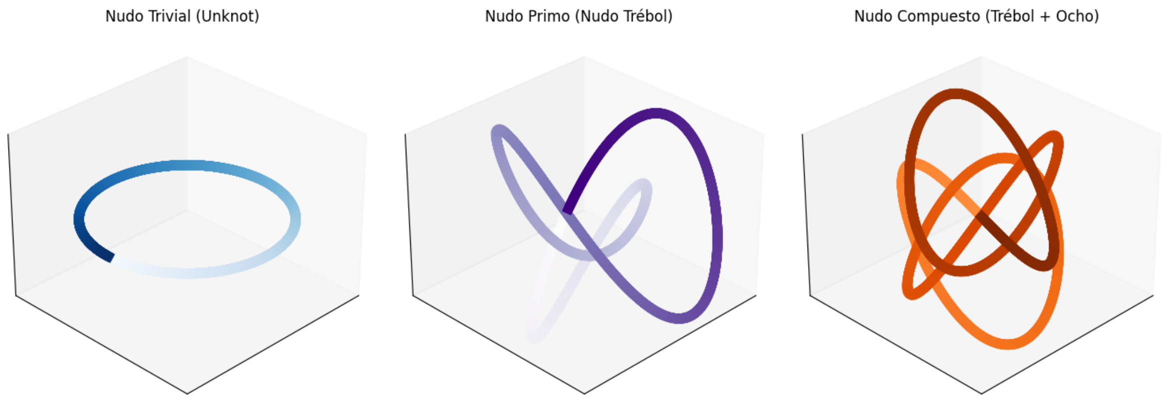
1.1. Conceptos Básicos de la Teoría de Nudos

La **teoría de nudos** es una rama de la topología que se encarga del estudio de los nudos y enlaces en espacios tridimensionales, como la 3-esfera S^3. Formalmente, un **nudo** es una curva cerrada, simple y continua en S^3. Dos nudos se consideran equivalentes si pueden transformarse uno en el otro mediante deformaciones continuas sin cortar ni cruzar el nudo (isotopía ambiental).



1.1.1. Definiciones Clave

- **Nudo trivial (unknot)**: Un nudo que es equivalente a un simple lazo sin enredos.
- **Enlace**: Un conjunto de curvas cerradas disjuntas en S^3, cada una de las cuales es un nudo.
- **Nudo primo**: Un nudo que no puede descomponerse en la suma conectada de dos nudos no triviales.
- **Nudo compuesto**: Un nudo que es la suma conectada de dos o más nudos no triviales.



1.1.2. Presentaciones de Nudos

Los nudos y enlaces suelen representarse mediante **diagramas de nudos**, que son proyecciones planas en $\mathbb{R}^2$ con indicaciones de sobrecruces y subcruces en cada intersección. Estas representaciones permiten calcular **invariantes** asociados al nudo.

1.2. Introducción a las 3-Variedades

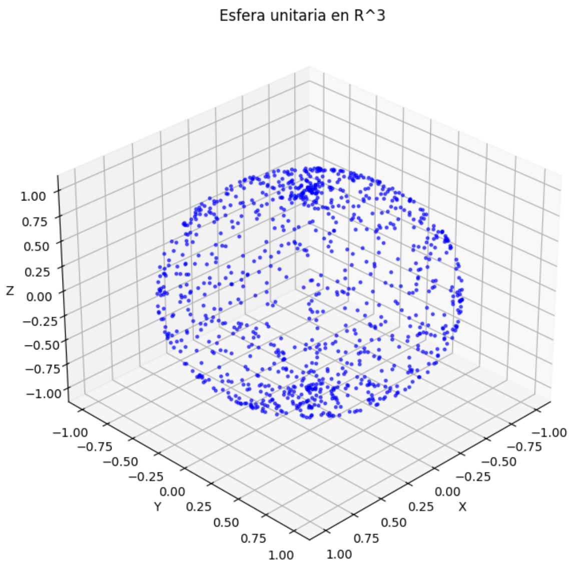
Una **3-variedad** es un espacio topológico tridimensional que, localmente, se comporta como el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Las 3-variedades juegan un papel crucial en la teoría de nudos, ya que los nudos se consideran embebidos dentro de estas variedades.

1.2.1. La 3-Esfera S^3

La 3-esfera S^3 es la 3-variedad más común en la teoría de nudos. Se define como el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^4$ que están a una distancia unitaria del origen, es decir:

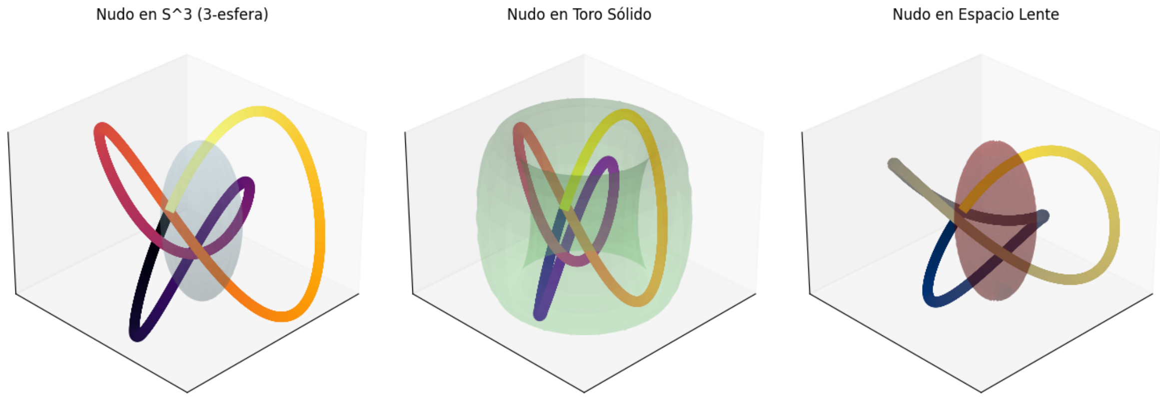
$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

En el estudio de los nudos, S^3 es el espacio que contiene el nudo.



1.2.2. Otras 3-Variedades

Además de S^3, existen otras 3-variedades de interés, como los **espacios lente** $L(p, q)$, que son cocientes de S^3 mediante acciones de grupos cíclicos. También son importantes las 3-variedades obtenidas por **cirugía de Dehn**, donde se eliminan toros sólidos de la variedad y se pegan de nuevo mediante homeomorfismos.



1.3. Grupo Fundamental y Complemento del Nudo

El **grupo fundamental** de una variedad es una herramienta topológica esencial que describe las clases de homotopía de bucles basados en un punto. Para un nudo K en S^3, el grupo fundamental del complemento del nudo, $\pi_1(S^3 - K)$, es un invariante clave que permite diferenciar nudos. El **complemento del nudo** se define como el espacio tridimensional que queda al eliminar el nudo de S^3.

1.3.1. Presentaciones del Grupo Fundamental

El grupo fundamental de un nudo puede describirse mediante una presentación de generadores y relaciones obtenida a partir de un diagrama del nudo, utilizando la construcción de Wirtinger.

1.3.2. Ejemplo: Grupo Fundamental del Nudo Trébol

Consideremos el nudo trébol, un nudo primo simple. El grupo fundamental de su complemento se presenta como:

$$\pi_1(S^3 - K) = \langle a, b \mid aba = bab \rangle.$$

Este grupo no es abeliano, lo que refleja la estructura más compleja del trébol en comparación con el unknot.

1.4. Invariantes de Nudos

Los **invariantes de nudos** son herramientas fundamentales que permiten clasificar y estudiar nudos. Son cantidades que no cambian bajo isotopías, y proporcionan información clave sobre las propiedades topológicas del nudo.

1.4.1. Polinomio de Alexander

El **polinomio de Alexander**, $\Delta(t)$, es un invariante clásico que se calcula a partir de la matriz de Seifert asociada a un nudo. Por ejemplo, para el nudo trivial $\Delta(t) = 1$, mientras que para el nudo trébol se obtiene $\Delta(t) = t - 1 + t^{-1}$.

1.4.2. Polinomio de Jones

El **polinomio de Jones** es un invariante más reciente que surge de la teoría de trenzas y la teoría cuántica de campos. Este invariante es más sensible que el polinomio de Alexander para distinguir nudos.

1.4.3. Superficie de Seifert

Para cualquier nudo, existe una superficie orientable cuyo borde es el nudo. El **género** de esta superficie es un invariante que mide la complejidad del nudo. El nudo trivial tiene género 0, mientras que el trébol tiene género 1.

1.5. Cirugía de Dehn y Construcción de 3-Variedades

La **cirugía de Dehn** es un procedimiento topológico que modifica una 3-variedad eliminando un toro sólido alrededor de un nudo y pegando otro toro sólido mediante un homeomorfismo. Esta técnica es crucial para generar nuevas 3-variedades a partir de nudos.

1.5.1. Cirugía en el Nudo Trivial

Realizar una cirugía de Dehn en el nudo trivial $K \subset S^3$ puede producir un espacio lente $L(p, q)$, dependiendo del parámetro de la cirugía.

1.5.2. Ejemplos de Cirugía en Nudos Satélites

En el caso de nudos satélites, la cirugía de Dehn puede generar 3-variedades más complejas, que son de gran interés en la topología de baja dimensión.

1.6. Conclusión

En este capítulo, hemos introducido los conceptos básicos de la teoría de nudos y 3-variedades, que son esenciales para comprender el estudio de los nudos satélites en los siguientes capítulos. La comprensión de la teoría de nudos, los invariantes topológicos y las técnicas de cirugía será clave para abordar los problemas más avanzados que se presentarán más adelante.

Capítulo 2

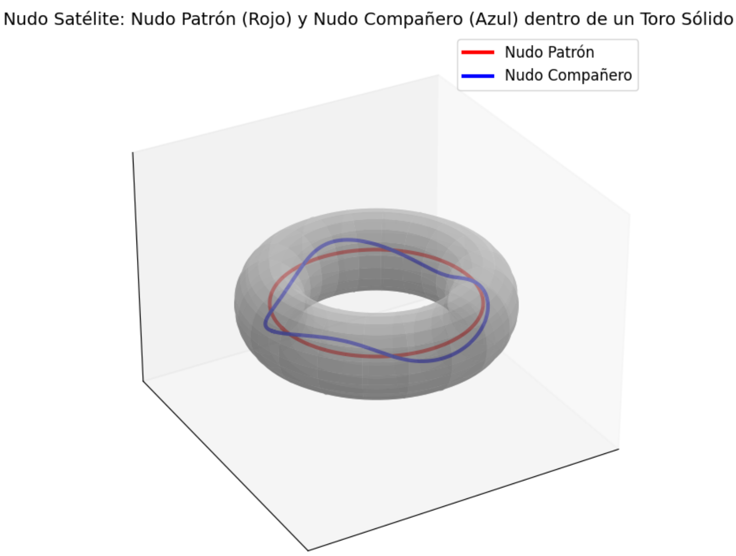
Definición y Propiedades de los Nudos Satélites

2.1. Introducción a los Nudos Satélites

La categoría de los nudos satélites se distingue dentro de la teoría de nudos por su estructura compuesta y su construcción única, que implica la interacción de componentes múltiples dentro de un espacio confinado. Esta sección introduce los conceptos fundamentales que definen a los nudos satélites, subrayando su relevancia tanto en el ámbito teórico como en aplicaciones prácticas.

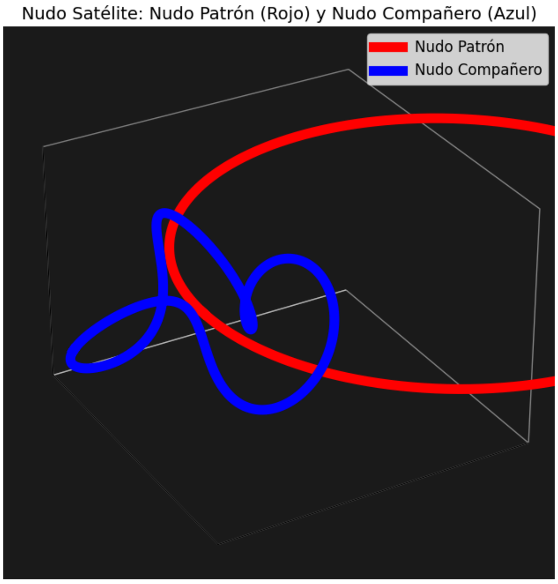
2.1.1. Concepto de Nudo Satélite

Un nudo satélite K en S^3 (la 3-esfera) es un nudo que puede ser descrito como el resultado de insertar un nudo patrón P dentro de un toro sólido T, donde T está incrustado en S^3 de tal manera que contiene un nudo compañero C. Primero veamos las definiciones clave.



Definition 1. *Un nudo patrón P es un nudo que se coloca dentro de un toro sólido T de manera que P está contenido en el toro pero no es contractible en el toro. En la construcción de un nudo satélite, el nudo patrón sigue una trayectoria dentro del toro*

sólido, y cuando se empareja con un nudo compañero, contribuye a la estructura del nudo satélite final.



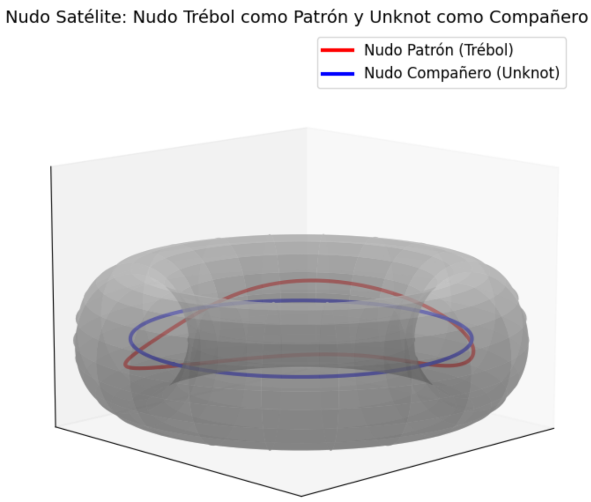
Características clave:

- **No contractible:** El nudo patrón debe ser geométricamente esencial, lo que significa que no puede simplificarse dentro del toro sólido.
- **Enreda el toro sólido:** Se coloca dentro del toro sólido, siguiendo una trayectoria específica y enredándose sin salir de él.
- **Interacción con el nudo compañero:** La forma en que el nudo patrón se enreda dentro del toro afecta directamente la complejidad del nudo satélite.

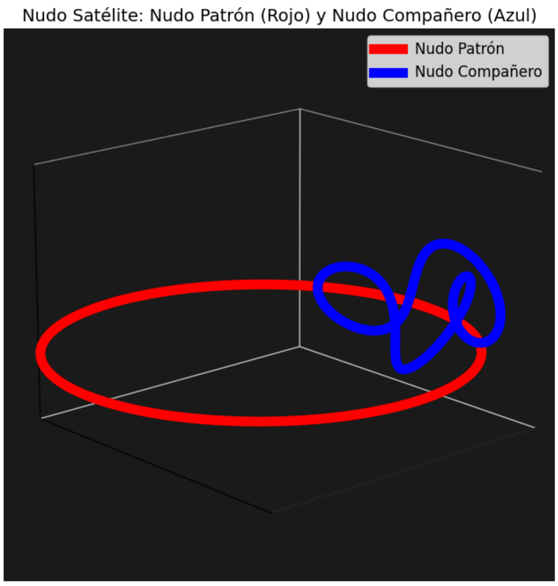
Relación con el Nudo Satélite:

- El nudo patrón aporta la mayor parte de la complejidad al nudo satélite, y sus propiedades topológicas, como su grupo fundamental, se reflejan en la estructura del nudo final.

Ejemplo: Si el nudo patrón es un **nudo trébol**, se enreda dentro del toro sólido alrededor de un nudo compañero trivial, como un **unknot**.



Definition 2. *Un nudo compañero C es un nudo en la 3-esfera S^3 tal que existe un toro sólido $T \subset S^3$ que contiene a C. Este toro sólido T tiene la propiedad de que el nudo C es no trivial en T y forma parte del espacio complementario en el cual se incrusta el nudo patrón para generar un nudo satélite.*



Características clave:

- **Posición fija en el centro del toro sólido:** El nudo compañero nunca sale del toro, sino que está encapsulado por él.

- **No interactúa directamente con el patrón:** Aunque el patrón se enreda dentro del toro, el nudo compañero permanece separado físicamente del nudo patrón.

- **Afecta la estructura global:** La elección del nudo compañero influye en la complejidad del nudo satélite. Si el nudo compañero es más complicado, el nudo satélite tendrá una estructura más intrincada.

Relación con el Nudo Satélite:

- Aunque el nudo compañero no se cruza con el patrón, su presencia y complejidad afectan directamente la estructura y los invariantes topológicos del nudo satélite.

Definition 3. *Un toro sólido T es una 3-variedad que es homeomorfa al producto $S^1 \times D^2$, donde S^1 es un círculo y D^2 es un disco bidimensional. Específicamente, un toro sólido es un subconjunto de la 3-esfera S^3 que tiene la topología de un espacio tubular alrededor de un nudo compañero. El toro sólido sirve como el entorno dentro del cual se coloca un nudo patrón P, de manera que la estructura combinada del nudo patrón en el toro sólido define un nudo satélite.*

Definition 4. *Un nudo satélite en S^3 se compone de un nudo patrón P que está enlazado dentro de un toro sólido T, el cual a su vez está anclado por un nudo compañero C. Este arreglo crea una estructura donde las propiedades del nudo satélite K son una función de las interacciones entre P y C.*

El nudo satélite K puede exhibir características únicas no presentes en P o C individualmente, como cambios en sus invariantes topológicos y clasificaciones dentro de la teoría de nudos.

Propiedades de los Nudos Satélites

1. No Trivialidad

- Un nudo satélite nunca es trivial si su nudo patrón es no trivial. Esto significa que la estructura compleja formada por el nudo patrón dentro del toro sólido siempre dará lugar a un nudo no trivial.
- Si el nudo patrón tiene cruces y una estructura compleja, el nudo satélite reflejará esas características y no podrá reducirse a un simple lazo (unknot).

2. Estructura en Capas

- Un nudo satélite tiene una estructura en capas, donde el nudo compañero está en el centro, rodeado por un toro sólido, y el nudo patrón se enreda dentro de ese toro. Esta estructura añade complejidad al nudo en comparación con los nudos simples.
- Esta construcción encapsula el nudo compañero en el interior y utiliza el nudo patrón para añadir complejidad exterior.

3. Dependencia del Nudo Compañero

- La elección del nudo compañero afecta la estructura global del nudo satélite. Si el nudo compañero es trivial, el nudo satélite dependerá más del nudo patrón. Si el nudo compañero es complejo, la interacción entre el patrón y el compañero añadirá complejidad adicional al nudo satélite.
- Esta propiedad hace que los nudos satélites sean altamente versátiles, ya que puedes ajustar la complejidad del nudo resultante cambiando el nudo compañero.

4. Resistencia a la Descomposición

- A diferencia de los nudos compuestos, que pueden descomponerse en nudos primos mediante la suma conectada inversa, los nudos satélites no pueden descomponerse de manera trivial en sus componentes. Esto se debe a la manera en que el nudo patrón se enreda dentro del toro que encapsula al nudo compañero.
- Este enredo dentro del toro sólido crea una estructura que no puede separarse fácilmente en nudos más simples.

5. Sensibilidad a Deformaciones

- Los nudos satélites son más sensibles a las deformaciones topológicas que los nudos simples. Esto significa que pequeños cambios en la forma del nudo patrón o en cómo se ajusta dentro del toro sólido pueden afectar significativamente las propiedades topológicas del nudo satélite.
- Esta sensibilidad puede observarse a través de cambios en los invariantes como el polinomio de Alexander o el polinomio de Jones, los cuales varían cuando se modifica la estructura interna del nudo satélite.

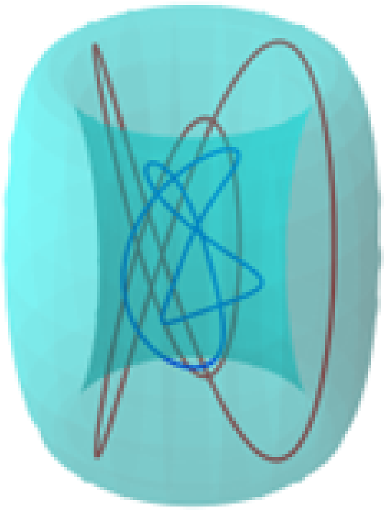
6. Relación con los nudos primos y compuestos

- Un nudo satélite no es primo, ya que se construye a partir de la combinación de dos nudos, pero tampoco es estrictamente un nudo compuesto, ya que no es una simple suma conectada de nudos. Los nudos satélites son una categoría aparte, donde se mezclan los conceptos de nudos compuestos y enlazados.
- El Teorema de No Cancelación asegura que si un nudo satélite tiene un nudo patrón no trivial, el nudo satélite resultante también será no trivial.

7. Invariantes de nudos satélites

- Los invariantes topológicos de un nudo satélite, como el polinomio de Alexander o el polinomio de Jones, cambian en comparación con los de los nudos patrón y compañero por separado. La interacción entre ambos nudos modifica estos invariantes, reflejando la estructura más compleja del nudo satélite.
- Estos invariantes son sensibles a cómo el nudo patrón se enreda dentro del toro y cómo interactúa con el nudo compañero.

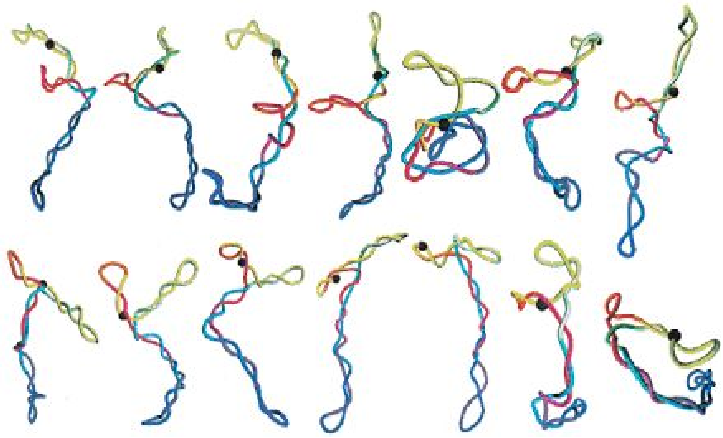
Ejemplo: Nudo Satélite Construido con un Trébol como Patrón y un Nudo Toral como Compañero:
Imagine un nudo trébol que se retuerce a lo largo del interior de un toro, el cual rodea un simple nudo toral. La configuración resultante muestra cómo el trébol modifica su forma estándar para adaptarse al espacio restringido del toro, mientras interactúa con el nudo toral.



2.1.2. Importancia de los Nudos Satélites

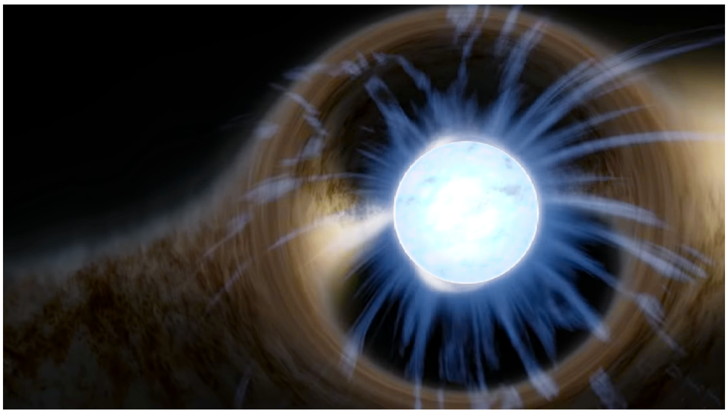
Relevancia en la Teoría de Nudos: Los nudos satélites no solo enriquecen la teoría de nudos con ejemplos complejos y polifacéticos, sino que también ofrecen un terreno fértil para explorar ideas en topología de baja dimensión, invariantes de nudos, y dinámicas de entrelazado.
Aplicaciones Generales: En campos como la biología molecular y la física cuántica, los nudos satélites ofrecen modelos para entender estructuras enlazadas como cadenas de ADN o líneas de campo en plasmas. Su capacidad para modelar la complejidad de los enlaces en tres dimensiones los hace infalible en muchas aplicaciones científicas y técnicas.
En Quimica y Biología:

- Los nudos satélites tienen aplicaciones en biología molecular, donde modelan el **superenrollamiento del ADN**.
- Compactación del ADN: El superenrollamiento es clave para compactar el ADN en el núcleo de la célula.
- Acceso a la Información Genética: El ADN debe desenrollares o relajarse durante la replicación y transcripción para que las enzimas accedan a la información genética. Las herramientas matemáticas basadas en la teoría de nudos ayudan a modelar este proceso.
- Prevención de Daños: Un superenrollamiento excesivo o incorrecto puede llevar a rupturas en el ADN, lo que puede causar errores genéticos. Las enzimas reguladoras, como las topoisomerasas, son esenciales para evitar este tipo de daños, y la teoría de nudos permite estudiar cómo se desenredan estos nudos.



Un nudo satélite que imita estructuras de enredo de ADN.

- En física, se utilizan para estudiar configuraciones de **líneas de campo magnético** en plasmas.
- En física de plasmas, las líneas de campo magnético son trayectorias que describen la dirección y el flujo del campo magnético en una región de espacio. En un plasma, que es un gas ionizado formado por partículas cargadas, estas líneas de campo pueden comportarse de manera muy compleja: enrollarse, enredarse y reconectarse. Aquí es donde la teoría de nudos entra en juego, proporcionando un marco para entender y clasificar estos enredos.
- Las líneas de campo magnético en un plasma son dinámicas y pueden formar configuraciones muy complicadas que se asemejan a nudos. En condiciones de plasma, estas líneas pueden moverse y deformarse, generando patrones similares a nudos trenzados y enlaces. A medida que el plasma evoluciona, las líneas de campo pueden enredarse, lo que afecta la estabilidad y el comportamiento del plasma.



2.2. Construcción de Nudos Satélites

La construcción de nudos satélites es un proceso que ilustra de manera impresionante la interacción entre dos nudos distintos. La construcción de nudos satélites involucra técnicas específicas que permiten combinar un nudo patrón con un nudo compañero dentro de un toro sólido, creando estructuras complejas que son centrales en estudios avanzados de topología.

2.2.1. Método de la Esfera Satélite

El método de la esfera satélite es una técnica esencial para la construcción de nudos satélites y se fundamenta en la inserción de un nudo patrón dentro de un toro sólido que encapsula un nudo compañero. Este método destaca la relación simbiótica entre el nudo patrón y el compañero dentro de un espacio confinado.

Definition 5. *El método de la esfera satélite es un enfoque estándar para construir un nudo satélite, donde un nudo patrón P se incrusta dentro de un toro sólido T que está enlazado alrededor de un nudo compañero C. Este proceso implica el uso de técnicas topológicas para asegurar que P se ajuste adecuadamente dentro de T, respetando las restricciones impuestas por C.*

Pasos del Método:

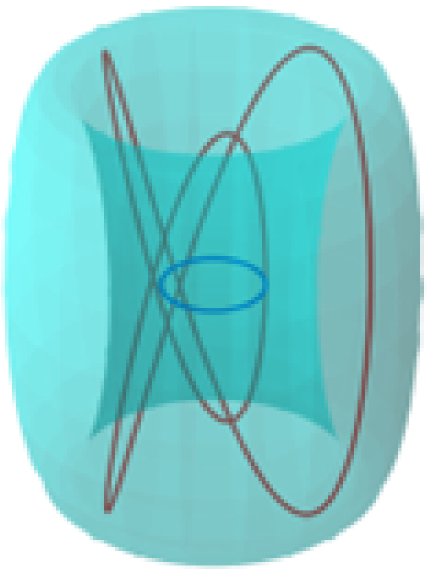
1. Selección y Preparación del Nudo Compañero C: Elija un nudo C que actuará como el centro alrededor del cual se construirá el toro T.

2. Formación del Toro Sólido T: Construya un toro sólido alrededor de C, garantizando que el espacio sea suficiente para incorporar el nudo patrón.

3. Incorporación del Nudo Patrón P: Inserte el nudo patrón dentro de T configurándolo para que interactúe con C de manera específica, generalmente a través de técnicas de anudado o trenzado.

Ejemplo: Consideremos la construcción de un nudo satélite utilizando un nudo trivial como nudo compañero y un trébol como nudo patrón:

- Nudo Compañero: Un nudo trivial que forma el núcleo central.
- Toro Sólido: Un toro se construye alrededor del nudo trivial.
- Nudo Patrón: Se coloca un nudo trébol dentro del toro, configurado para seguir una trayectoria que envuelve el unknot en una formación intrincada.



Vista Frontal y desde arriba.

2.2.2. Representación mediante Diagramas

Los diagramas de nudos son herramientas esenciales para la visualización y el análisis en la teoría de nudos. En el contexto de los nudos satélites, estos diagramas no solo ayudan a entender la estructura entrelazada del nudo, sino que también proporcionan una plataforma visual para explorar las interacciones complejas entre el nudo patrón y el nudo compañero.
La representación gráfica de nudos satélites debe manejar eficazmente la complejidad de mostrar tanto el toro sólido como los nudos incrustados dentro de este. Los diagramas deben ser claros y precisos, usando diferenciación visual como colores o estilos de línea para distinguir entre el nudo patrón y el compañero.
Pasos para Dibujar un Diagrama de Nudos Satélites:

1. Selección de la Vista Adecuada: Opte por una proyección que claramente muestre las interacciones P y C dentro de T.

2. Delineación de P y C: Use diferentes colores o estilos de líneas para distinguir entre P y C, asegurando que las intersecciones y los cruces sean claramente visibles y comprensibles.

Interpretación de Diagramas
La interpretación correcta de estos diagramas es crucial para analizar las propiedades topológicas y las características de los nudos satélites.

- Analizar las Interacciones: Examina cómo el nudo patrón se enreda alrededor del nudo compañero y las implicaciones de estos enredos en las propiedades del nudo satélite final.

- Estudio de la Topología: Considera cómo los cambios en la configuración del nudo patrón o compañero afectan el diagrama y, por extensión, la estructura del nudo satélite.

Ejemplo:
Diagrama de un Nudo Satélite con un Nudo trivial como Patrón y un nudo trebol como Compañero:

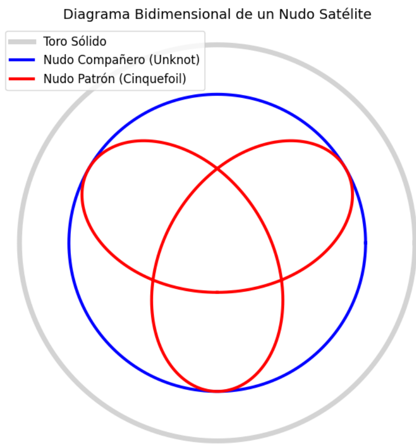


Diagrama 2D

2.3. Propiedades Topológicas de Nudos Satélites

Los nudos satélites, debido a su estructura única derivada de la combinación de nudos patrón y compañero, exhiben una serie de propiedades topológicas interesantes y complejas. Esta sección explora estas propiedades, destacando cómo contribuyen a la clasificación y el entendimiento profundo de los nudos satélites.

2.3.1. Invariantes de Nudos Satélites

Definition 6. *Los **invariantes topológicos** son herramientas matemáticas esenciales utilizadas para clasificar y estudiar nudos y sus propiedades sin cambiar su estructura esencial.*

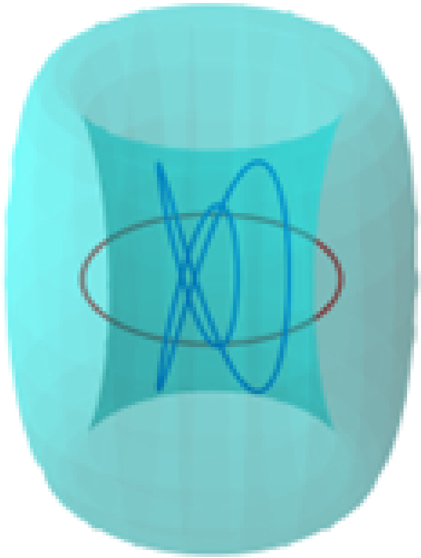
Los invariantes topológicos son herramientas cruciales en la teoría de nudos, ya que proporcionan una forma de clasificar nudos basada en características que no cambian bajo deformaciones isotópicas (transformaciones que no implican cortar el nudo ni permitir que pase a través de sí mismo). En el caso de los nudos satélites, estos invariantes son particularmente valiosos para descubrir cómo las estructuras del nudo patrón y del compañero interactúan para formar una configuración más compleja. En el contexto de nudos satélites, los invariantes como el polinomio de Alexander, el polinomio de Jones, y el género de las superficies de Seifert son de particular interés.

Polinomio de Alexander y Jones

El Polinomio de Alexander es un invariante que se calcula a partir de un determinante de una matriz obtenida del grupo fundamental del complemento del nudo, asociado con un cierto recubrimiento abeliano. Proporciona información sobre la estructura del nudo en relación con estos recubrimientos, lo que es especialmente útil para entender cómo los nudos se entrelazan y conectan.

Definition 7. *El **Polinomio de Alexander** $\Delta(t)$ se calculado a partir del recubrimiento abeliano del complemento del nudo, el polinomio de Alexander proporciona una medida de cómo el nudo se comporta bajo ciertas deformaciones y su estructura algebraica.*

Ejemplo: Para un nudo satélite formado por un nudo trebol como patrón enlazado dentro de un toro que contiene un nudo trivial, se analiza cómo la incorporación del trebol afecta el polinomio de Alexander en comparación con el nudo trivial solo.



Vista frontal
El Polinomio de Jones, por otro lado, surge de consideraciones más relacionadas con la mecánica estadística y teorías de campo cuántico, ofreciendo perspectivas sobre las propiedades de trenzado y enlace del nudo.

Definition 8. *El* ***Polinomio de Jones*** $V(t)$ *es un invariante más moderno derivado de consideraciones de teoría de representación y teoría cuántica. Ofrece comprension profunda sobre la estructura de trenzado del nudo.*

Ejemplo.
Considere un nudo satélite formado por un nudo trebol como patrón y un nudo trivial como compañero. Al calcular el polinomio de Alexander y el polinomio de Jones para esta configuración, se puede observar cómo la inclusión del trebol afecta los invariantes en comparación con los del unknot solo. La combinación resultante presenta características de enlace más complejas que se reflejan en las variaciones de los polinomios.

Género de las Superficies de Seifert

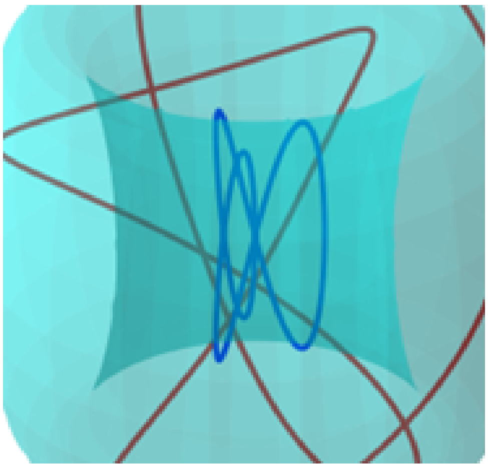
El género de una superficie de Seifert asociada a un nudo es un invariante que describe la mínima complejidad de una superficie que se puede extender en el espacio tridimensional y que tiene el nudo como su borde. El género de esta superficie es una medida clave de la complejidad del nudo.
Ejemplo.
Para el mismo nudo satélite compuesto por un trefoil y un unknot, examinemos el género de la superficie de Seifert. El unknot tiene un género de superficie de cero, mientras que el trefoil tiene un género de uno. La superficie de Seifert del nudo satélite podría tener un género que refleje una combinación más complicada, dependiendo de cómo el trefoil interactúa con el unknot dentro del toro sólido.

2.3.2. Interacciones Topológicas y Estructurales

Podemos enfocarnos en las interacciones entre el nudo patrón y el nudo compañero dentro del toro sólido y cómo estas interacciones afectan las propiedades topológicas globales del nudo satélite. Se utiliza una combinación de teoría de nudos y topología algebraica para describir y analizar estas relaciones.

Análisis Matemático de Interacciones

Modelado Matemático de las Interacciones:
Considera la disposición espacial del nudo patrón P y del nudo compañero C dentro del toro T. El modelo debe tener en cuenta cómo P se enreda alrededor de C, incluyendo la dirección y el número de vueltas, y cómo estas características influyen en las propiedades topológicas del nudo satélite K.
Las **Herramientas Utilizadas** son la teoría de grupos fundamentales para analizar las interacciones. El grupo fundamental del complemento del nudo, $\pi_1(S^3$
K)*, ofreceinformaciónsobrelaestructuradelnudosatéliteycómo*P*y*C*contribuyenaestegrupo.*
Efecto de la Configuración del Toro en las Propiedades del Nudo.
Examinación de la Topología del Toro: Analiza cómo la elección del toro T (por ejemplo, su grosor y la curvatura del tubo) afecta la forma en que P puede ser anudado alrededor de C. Esto incluye estudiar las deformaciones del toro que alteran las interacciones entre P y C.
Ejemplo. Considera un nudo satélite donde P es un nudo ocho y C es un nudo toral. Describe cómo modificar la posición del nudo ocho dentro de un toro estrecho versus un toro amplio altera las interacciones y, por ende, las propiedades topológicas del nudo satélite resultante.



Vista frontal cercana

2.4. Clasificación de Nudos Satélites

La clasificación de nudos satélites es crucial para entender su diversidad y las sutilezas en sus estructuras. Esta sección aborda cómo los nudos satélites son clasificados según diversos criterios basados en sus propiedades topológicas y geométricas.

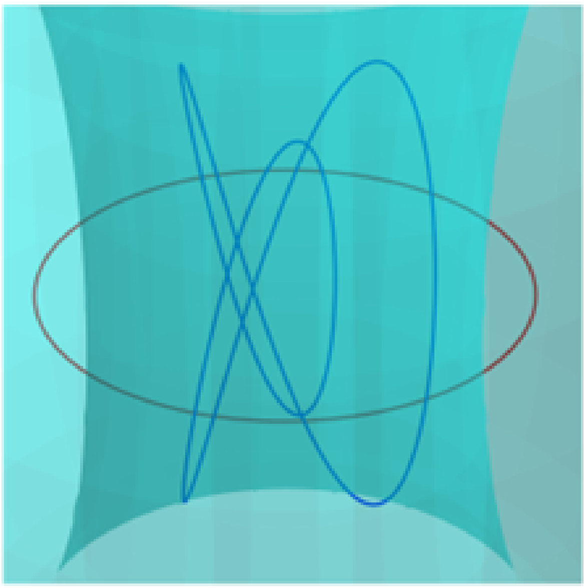
2.4.1. Criterios de Clasificación

Los invariantes topológicos de un nudo son cantidades matemáticas calculadas a partir de la estructura del nudo que permanecen invariantes bajo isotópicas ambientales

(deformaciones continuas del espacio que no involucran cortar el nudo ni pasar una parte del nudo a través de otra)
Estos invariantes incluyen:

Polinomio de Alexander ($\Delta(t)$)

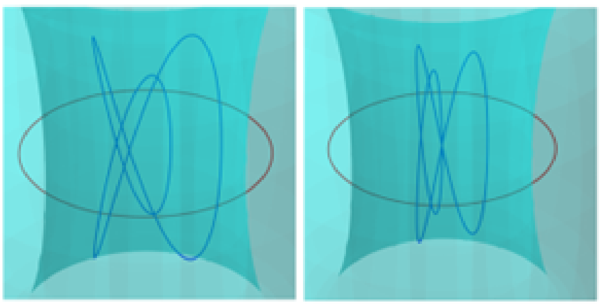
El polinomio de Alexander de un nudo K se define como el determinante de una matriz obtenida al considerar un recubrimiento abeliano infinito del complemento del nudo. Este invariante puede ser expresado en términos de la presentación del grupo fundamental del complemento del nudo.
Ejemplo. Para un nudo satélite formado por un nudo trébol como patrón y un nudo trivial como compañero, el cálculo del polinomio de Alexander puede reflejar la complejidad añadida por el trefoil.



Nudo Satélite con un nudo trebol como patrón y un nudo trivial como compañero

Polinomio de Jones ($V(t)$)

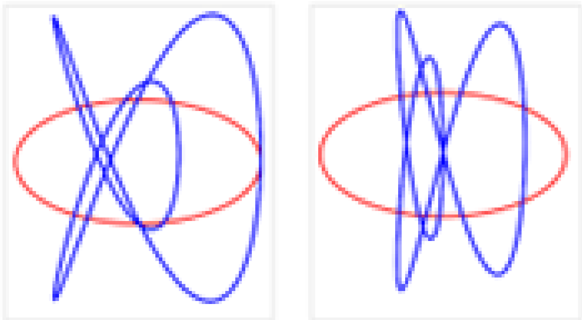
El polinomio de Jones es un invariante de nudo que se calcula utilizando un enfoque de teoría de trenzas y evalúa la mínima cantidad de cruces en un diagrama de nudo.
Ejemplo. Analizar cómo el polinomio de Jones cambia cuando el nudo patrón varía de un trebol a un nudo figura-ocho, mientras que el compañero permanece como un nudo trivial.



Nudos Satelite con nudo patron un nudo trebol y nudo patron figura-8, ambos con nudo compañero a un un nudo trivial.

Criterios Basados en la Configuración del Nudo Patrón y del Compañero

La clasificación basada en la configuración se refiere a cómo la disposición espacial y la conexión entre el nudo patrón y el compañero pueden influir en las características topológicas del nudo satélite.
Ejemplo.
Considera dos nudos satélites donde ambos utilizan un nudo trivial como compañero:
El primero tiene un nudo trebol como patrón enrollado dos veces alrededor del nudo trivial.
El segundo tiene un nudo figura-ocho como patrón enrollado de manera similar.
Aunque ambos tienen el mismo compañero, sus clasificaciones difieren debido a las diferencias en los nudos patrones y sus enrollamientos.



Nudos satélites con su nudos patrones enrrollados sobre el nudo compañero

2.5. Comparación con Otros Tipos de Nudos

Esta sección aborda cómo los nudos satélites se comparan con otros tipos de nudos, específicamente nudos primarios y nudos compuestos, desde una perspectiva topológica y matemática. Estas comparaciones son cruciales para entender la posición única de los nudos satélites dentro de la teoría de nudos y sus aplicaciones.
Diferencias con Nudos Primarios

Definition 9. *Un **nudo primario** es un nudo que no se puede descomponer en nudos más simples mediante la operación de suma conectada. Matemáticamente, se considera indecomponible si no existe una esfera S^2 en S^3 que interseque el nudo en exactamente dos puntos sin dividir el nudo en dos nudos no triviales.*

Comparación: A diferencia de los nudos satélites, un nudo trébol no se forma por la interacción de un nudo patrón dentro de un toro rodeando un nudo compañero, sino que es una entidad única e indecomponible.
Relación con Nudos Compuestos

Definition 10. *Un nudo compuesto se forma por la suma conectada de dos o más nudos no triviales. En términos topológicos, esto significa que existe una esfera S^2 en S^3 que interseca el nudo en exactamente dos puntos y divide el nudo en dos o más nudos no triviales.*

Comparación: Aunque un nudo compuesto como este también involucra múltiples componentes de nudo, su formación difiere de la de un nudo satélite en que los componentes de un nudo compuesto no interactúan dentro de un toro cerrado, sino que están unidos en una línea continua.

Capítulo 3

Construcción y Representación de Nudos Satélites

3.1. Métodos de Construcción

Esta sección describe los métodos utilizados para construir nudos satélites, enfocándose en las técnicas matemáticas que subyacen a estos procesos y cómo se aplican en contextos prácticos.

3.1.1. Construcción a partir de Nudos Primarios

La construcción de nudos satélites a partir de nudos primarios implica seleccionar un nudo primario como nudo compañero y un nudo primario o compuesto como nudo patrón, incrustándolo en un toro sólido que encapsula el nudo compañero.

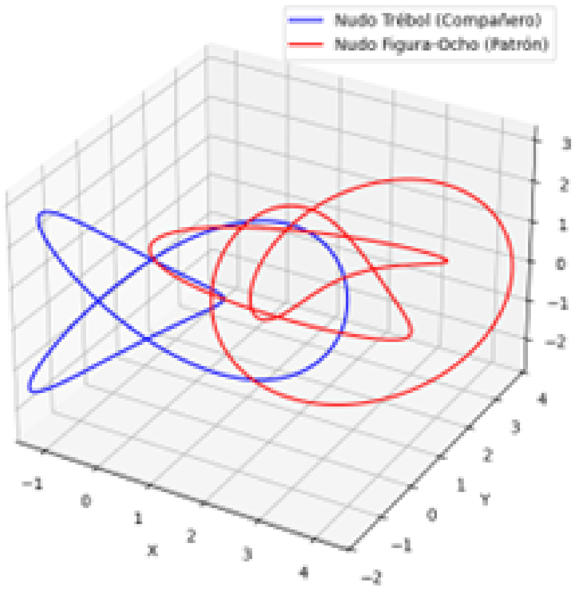
Proceso de Construcción:

- Paso 1: Selección del Nudo Compañero: Selecciona un nudo primario, que actuará como el nudo compañero en la construcción del nudo satélite.
- Paso 2: Formación del Toro Sólido: Construye un toro sólido alrededor del nudo compañero. Matemáticamente, esto implica definir un embedding del toro en S^3 que contenga al nudo.
- Paso 3: Incorporación del Nudo Patrón: Elige otro nudo primario o un nudo compuesto y modifícalo para que se ajuste dentro del toro sólido, enredándose alrededor del nudo compañero de una manera que refleje las características deseadas del nudo satélite final.

Ejemplo.
Si tenemos

- Nudo Compañero: Un nudo trébol.
- Nudo Patrón: Un nudo figura-ocho.

Construcción: El nudo figura-ocho se adapta dentro de un toro que rodea el nudo trébol, configurado para interactuar con el trébol en puntos específicos que maximizan la interacción topológica entre ellos.



Nudo Satelite resultante.

3.1.2. Construcción a partir de Toros

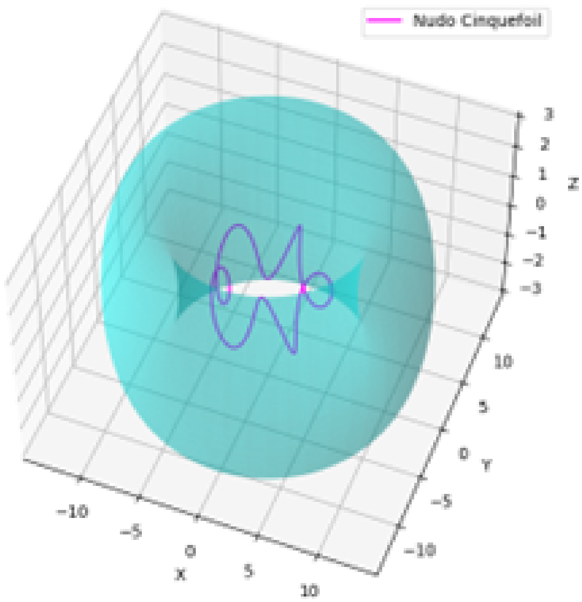
Este método utiliza la técnica de modelar el nudo patrón directamente dentro de un toro sólido predefinido que actúa como un "molde"para el nudo. La elección del toro y su orientación respecto al nudo compañero es crucial para la forma final del nudo satélite.
Proceso de Construcción:

- Definición del Toro Sólido: Define un toro sólido en S^3 que servirá como la estructura base para el nudo patrón.
- Inserción del Nudo Patrón: Inserta un nudo patrón, que puede ser un nudo primario o un diseño más complejo, en el toro, asegurándote de que el patrón adopte la forma del toro y mantenga sus características topológicas.

Ejemplo.

- Toro Sólido: Un toro con un radio mayor que proporciona un espacio amplio para el nudo patrón.
- Nudo Patrón: Un nudo cinquefoil.

Descripción de la Construcción: El nudo cinquefoil se modifica para adaptarse al interior del toro, creando un nudo satélite que refleja la forma y la orientación del toro mientras mantiene la esencia del cinquefoil.



Nudo cinquefoil

3.2. Representaciones Gráficas y Diagramas

Esta sección se exploran las técnicas y métodos para representar visualmente los nudos satélites, destacando la importancia de los diagramas en la comprensión y análisis de estas complejas estructuras topológicas.

3.2.1. Diagramas de Nudos Satélites

Definition 11. *Los **diagramas de nudos** son representaciones bidimensionales de nudos tridimensionales, que se utilizan ampliamente en la teoría de nudos para estudiar y clasificar diferentes tipos de nudos. En el contexto de nudos satélites, los diagramas deben capturar no solo la estructura del nudo sino también las interacciones entre el nudo patrón y el compañero.*

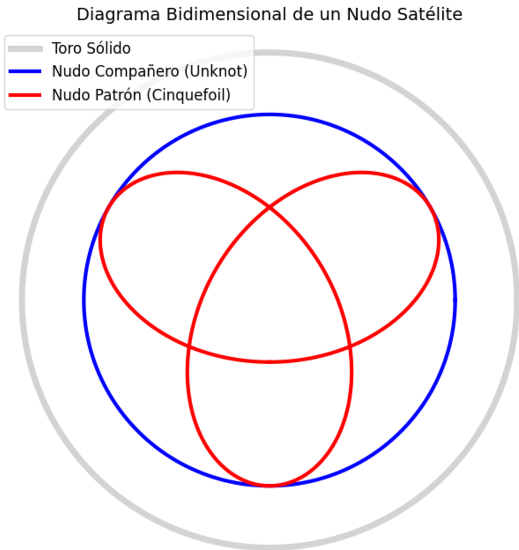
Proceso de Dibujo:

1. Proyección del Nudo: Elige una proyección adecuada que minimice las intersecciones mientras mantiene las características esenciales del nudo.

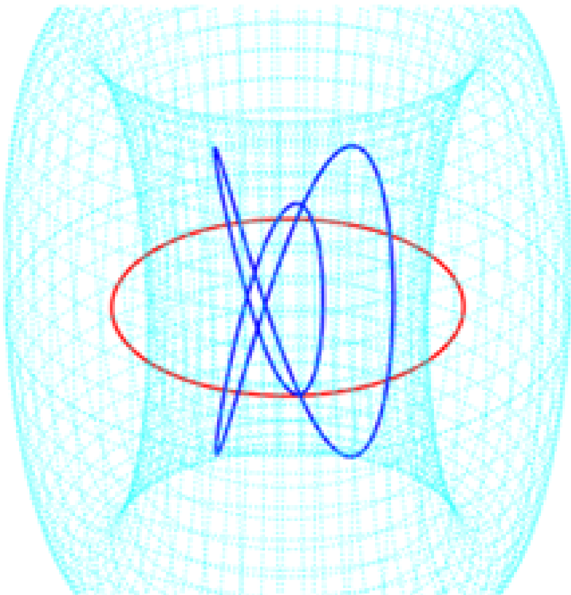
2. Representación del Toro Sólido: A menudo se utiliza una elipse o un círculo para simbolizar el toro sólido, dentro del cual el nudo patrón se representa mediante curvas que tienen una intersección o se enlazan con el nudo compañero.

3. Identificación de Cruces: Marca claramente los cruces, indicando la sobre y bajo posición en cada intersección, lo cual es crucial para entender la topología del nudo.

Ejemplo. Nudo Satélite de Trébol y nudo trivial: Ilustra un nudo treboll como patrón dentro de un toro que rodea un nudo trivial. Se muestra cómo el trebol se entrelaza alrededor del nudo trivial, usando colores o líneas diferenciadas para destacar las interacciones.



Resultado 2D



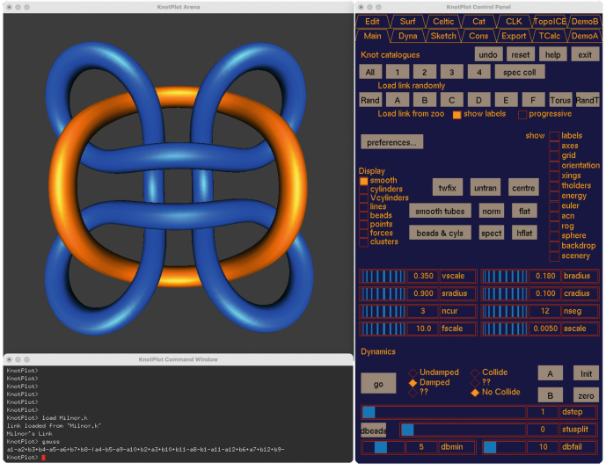
Resultado 3D

3.2.2. Representaciones en 3D

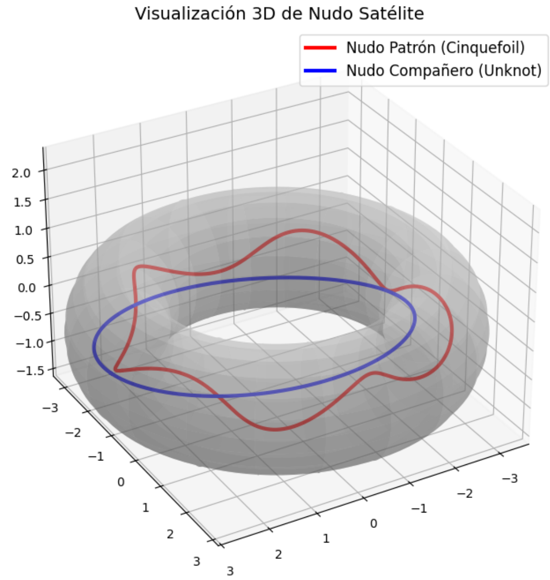
Técnicas de Visualización Tridimensional

La visualización en 3D de nudos satélites es fundamental para apreciar completamente su estructura y dinámica espacial. Estas representaciones pueden realizarse mediante software especializado que permite manipular y examinar el nudo desde diferentes ángulos.

Herramientas y Software:
Utiliza programas como KnotPlot o software CAD para crear modelos 3D de nudos satélites. Estos programas permiten rotar, escalar y explorar los nudos en un entorno tridimensional, ofreciendo una perspectiva más completa que los diagramas bidimensionales.



Simulacion en KnotPlot



Simulacion en PyCharm

3.3. Conclusiones

El estudio de los nudos satélite, tal como se presenta en este documento, resalta la importancia de esta clase de nudos en la teoría topológica y su relación con las 3-variedades. Los nudos satélite son estructuras complejas formadas por la interacción entre un nudo patrón, contenido dentro de un toro sólido, y un nudo compañero, lo que da lugar a un sistema de capas que enriquece la teoría de nudos tradicional.

A lo largo del trabajo, se ha explorado la relevancia de invariantes topológicos como el polinomio de Alexander y el polinomio de Jones, que proporcionan herramientas clave para clasificar y analizar los nudos satélite. El polinomio de Alexander, aunque más básico, refleja la influencia del nudo patrón en la estructura del nudo satélite. El polinomio de Jones, por otro lado, es más sensible a las interacciones complejas entre el nudo patrón y el nudo compañero, ofreciendo una mayor precisión en la clasificación de estos nudos.

Además, se han abordado aplicaciones importantes de los nudos satélite en contextos fuera de la matemática pura, como el superenrollamiento del ADN en biología

molecular y las líneas de campo magnético en plasmas en física. Estas aplicaciones muestran cómo los nudos satélite proporcionan un marco teórico útil para modelar fenómenos reales en sistemas tridimensionales.
En conclusión, este trabajo no solo aporta una visión detallada de las propiedades de los nudos satélite y su clasificación, sino que también abre la puerta a futuras investigaciones en áreas como la física y la biología, donde la complejidad de los nudos satélite podría seguir ofreciendo respuestas a problemas en sistemas dinámicos. Se recomienda explorar invariantes adicionales y profundizar en el estudio de los nudos satélite en otras topologías.

Bibliografía

[1] Adams, C. C. (2004). *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society.

[2] Burde, G., & Zieschang, H. (2003). *Knots*. Walter de Gruyter.

[3] Lickorish, W. B. R. (1997). *An Introduction to Knot Theory*. Springer.

[4] Rolfsen, D. (1976). *Knots and Links*. Publish or Perish, Inc.

[5] Schubert, H. (1956). *Knoten und Vollringe*. Acta Mathematica, 90, 131-286.

[6] Thurston, W. P. (1982). *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton University Press.