Universidad de El Salvador

Facultad Multidisciplinaria Oriental

Departamento de Ciencias Naturales y Matemática

Sección de Matemática

Informe final del curso de especialización:

3-Variedades y Nudos Topológicos

Título del informe final:

Invariantes topológicos en 3-Variedades

Para optar al grado acádemico de:

Licenciatura en Matemática

Presentado por:

Kevin Gustavo Salamanca Argueta N° carné sa19032

Docente Asesor:

M.Sc. José Joaquín Aparicio Ramírez

Septiembre 2024

San Miguel, El Salvador, Centroamérica

Universidad de El Salvador

Autoridades

M.SC. JUAN ROSA QUINTANILLA

RECTOR

DRA. EVELYN BEATRÍZ FARFÁN

VICERRECTORA ACADÉMICA

M.SC. ROGER ARMANDO ARIAS ALVARADO

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

LIC. PEDRO ROSALÍO ESCOBAR CASTANEDA

SECRETARIO GENERAL

LIC. CARLOS ALMILCAR SERRANO RIVERA

FISCAL GENERAL

Universidad de El Salvador

Autoridades

M.SC. CARLOS IVÁN HERNÁNDEZ FRANCO

DECANO

DRA. NORMA AZUCENA FLORES RETANA

VICEDECANA

LIC. CARLOS DE JESÚS SÁNCHEZ

SECRETARIO

ING. DOLORES BENEDICTO SARAVIA MARTÍNEZ

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

M.SC. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

COORDINADORA DEL PROCESO DE GRADO DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Índice general

1. Definiciones y ejemplos **5**

1.1. Definiciones 5

1.2. Ejemplos de 3-Variedades 8

1.3. Definición de un invariante topológico 12

2. Invariantes topológicos en 3-Variedades **14**

2.1. Característica de Euler 14

2.2. Ejemplos 18

2.3. Grupo fundamental 21

2.4. Ejemplos 23

Referencias Bibliográficas **24**

Resumen

Este trabajo proporciona una introducción a los conceptos básicos de la topología, enfocándose en las n-variedades y, más específicamente, en las 3-variedades. Se discuten los invariantes topológicos, tales como la característica de Euler y el grupo fundamental, y se presentan ejemplos concretos de su aplicación en el estudio de las 3-variedades y los nudos topológicos. A través de este análisis, se pretende ofrecer una visión general y comprensible de cómo estos conceptos fundamentales de la topología pueden aplicarse para explorar y comprender la estructura y propiedades de los espacios en diversas dimensiones.

Palabras claves: 3-Variedades; Invariantes topológicos; nudos topológicos.

Abstrac

This paper provides an introduction to the basic concepts of topology, focusing on n-manifolds and, more specifically, on 3-manifolds. Topological invariants, such as the Euler characteristic and the fundamental group, are discussed, and concrete examples of their application in the study of 3-manifolds and topological knots are presented. Through this analysis, the paper aims to offer a general and comprehensible overview of how these fundamental concepts of topology can be applied to explore and understand the structure and properties of spaces in various dimensions.

Keywords: 3-manifolds; topological invariants; topological knots.

Introducción

La topología es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los espacios que se mantienen inalteradas bajo deformaciones continuas, como el estiramiento y la torsión, pero no el desgarramiento o la pegadura. Esta disciplina, fundamental para el análisis y la geometría, proporciona una perspectiva única para entender la estructura y la forma de los objetos en un sentido muy general.

Dentro de la topología, las n-variedades ocupan un lugar destacado. Una n-variedad es un espacio topológico que localmente se asemeja a un espacio euclidiano de n dimensiones. Estas variedades son esenciales para la comprensión de conceptos más avanzados en matemáticas y física, ya que permiten generalizar nociones intuitivas de superficie y volumen a dimensiones superiores.

Particularizando al caso de las 3-variedades, estas son espacios tridimensionales que, localmente, se comportan como el espacio euclidiano tridimensional. Las 3-variedades son de especial interés en campos como la teoría de la relatividad y la cosmología, ya que el universo mismo puede ser modelado como una 3-variedad.

Un aspecto crucial en el estudio de las variedades son los invariantes topológicos, que son propiedades que permanecen constantes bajo homeomorfismos. Dos ejemplos importantes de estos invariantes son la característica de Euler y el grupo fundamental. La característica de Euler es una herramienta algebraica que proporciona información sobre la estructura de una variedad, mientras que el grupo fundamental captura la esencia de las posibles çaminos.[en] la variedad y es vital para entender la teoría de nudos en el contexto de las 3-variedades

A medida que profundizamos en la teoría de las 3-variedades y los nudos topológicos, nos encontramos con una rica interconexión de ideas que se extienden a través de diferentes áreas de las matemáticas. Este trabajo no solo se centrará en presentar y explicar estos conceptos, sino también en ilustrar cómo se aplican en ejemplos que sean fáciles de entender para cualquier estudiante que sepa un poco de topología.

Capítulo 1

Definiciones y ejemplos

En este capítulo daremos algunas definiciones que nos ayudaran a entender lo que es una 3-variedad, daremos algunos ejemplos para que nos ayude a comprender mejor el concepto de una 3-variedad. Asimismo daremos la definición de que es un invariante topológico para estar un poco familiarizados.

1.1. Definiciones

Definición 1.1

Sea M un conjunto, y sea τ una colección de subconjuntos de M. Entonces a τ le llamaremos una topología de M si cumple lo siguiente:

1. $M, \emptyset \in \tau$
2. $\{M_\alpha\} \in \tau$, entonces $\bigcup M_\alpha \in \tau$; con $\alpha \in I$
3. M_α, $M_\beta \in \tau$, entonces $M_\alpha \cap M_\beta \in \tau$

Definición 1.2

Sea M un conjunto, y sea τ una topología de M. Entonces (M, τ) lo llamaremos espacio topológico.

Definición 1.3

Decimos que un espacio topológico (M, τ) es **Hausdorff** (T_2) si dados $x, y \in (M, \tau)$, existen $U, V \in \tau$ tal que se cumple lo siguiente

1. $x \in U$ y $y \in V$
2. $U \cap V = \emptyset$

Definición 1.4

Sea M un conjunto. Decimos que dada una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de M es una base si se cumple lo siguiente

1. $m \in M$, entonces $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $m \in B$
2. Dado $m \in B_\alpha \cap B_\beta$ donde $B_\alpha, B_\beta \in \mathcal{B}$, entonces $\exists B_\theta$ tal que $m \in B_\theta \subseteq B_\alpha \cap B_\beta$

Definición 1.5

Decimos que un espacio topológico (M, τ) es **2-numerable** si se cumple que el espacio tiene una base numerable, es decir; los elementos de su base los podemos enumerar.

Definición 1.6

Diremos que (M, τ) es una n-variedad si cumple lo siguiente

1. Debe de ser Hausdorff
2. Debe de ser dos numerable
3. M es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$

El item 3 lo podemos ver de la siguiente manera

Si cortamos a M en pedacimos, entonces se parece a alguna figura de $\mathbb{R}^n$ pero globalmente no necesariamente son lo mismo, es decir; no tenemos certeza que al deformar M podemos llegar a la "forma"de $\mathbb{R}^n$.

Ahora ya podemos particulizar la definición de una variedad y darla cuando n=3, es decir, una 3-variedad.

Definición 1.7

Decimos que M es una 3-variedad si cumple lo siguiente:

1. Es Hausdorff
2. Es 2-numerable
3. M es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^3$

Definición 1.8

Definimos el siguiente conjuntos

$$\mathbb{H}_n := \{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

En particular

$$\mathbb{H}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$$

Definición 1.9

Diremos que M es una 3-Variedad con borde si cumple lo siguiente

1. Hausdorff
2. 2-numerable
3. Es localmente homeomorfo a $\mathbb{H}_3$

Definición 1.10

Definimos el borde de una n-Variedad M

$$\partial M = \{x \in M : x \text{ tiene una vecindad homeomorfa a } \mathbb{H}_n\}$$

Definición 1.11

Diremos que M es una 3-Variedad cerrada si es compacta y sin borde.

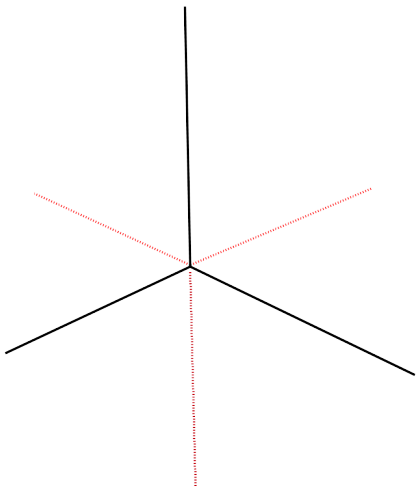
Definición 1.12

Diremos que M es una 3-Variedad abierta si es no compacta y sin borde.

1.2. Ejemplos de 3-Variedades

Ejemplo 1.2.1

$\mathbb{R}^3$ es una 3-Variedad



Sabemos que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

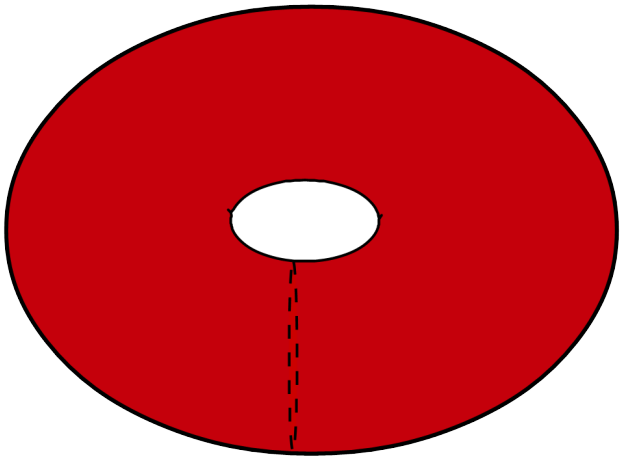
Ahora; fácilmente podemos ver que $\mathbb{R}^3$ es Hausdorff y 2-numerable porque $\mathbb{R}$ ya es Hausdorff y 2-numerable, y además el producto de espacios Hausdorff es Hausdorff y el producto de espacios 2-numerables es 2-numerables.

También es fácil darse cuenta que $\mathbb{R}^3$ es locamente homeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

Por tanto $\mathbb{R}^3$ es una 3-Variedad.

Ejemplo 1.2.2

El toro sólido ($D^2 \times S^1$) es una 3-Variedad con borde



Como D^2 y S^1 son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, entonces ellos son Hausdorff y 2-numerable (heredan la topología del subespacio). Y por el ejemplo anterior tenemos que $D^2 \times S^1$ es Hausdorff y 2-numerable.

Para la parte de localmente homeomorfo a $\mathbb{H}^3$ lo podemos ver como que para cada punto del toro sólido existe una vecidad que en $\mathbb{R}^3$ se puede ver como la mitad de una bola.

Por lo que el toro sólido es una 3-Variedad con borde.

Como observación

El toro sólido es una 3-Variedad que no es cerrada y no es abierta porque su borde es el toro.

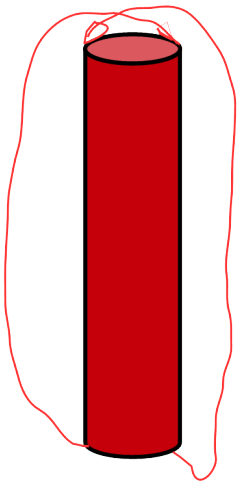
Ejemplo 1.2.3

La botella de Klein sólida ($\mathbb{K}S$) es una 3-Variedad con borde

Tenemos que $\mathbb{K}S \subseteq \mathbb{R}^3$ y como $\mathbb{R}^3$ es Hausdorff y 2-numerable, entonces $\mathbb{B}$ es 2-numerable.

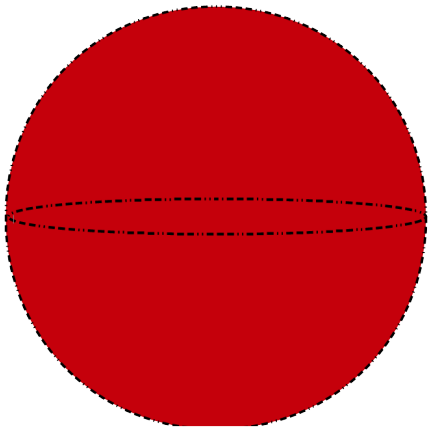
Ahora si tomamos un punto en $\mathbb{K}S$ existe una región que en $\mathbb{R}^3$ se puede ver como la mitad de una bola.

Por tanto $\mathbb{K}S$ es una 3-Variedad con borde.



Ejemplo 1.2.4

$\mathbb{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ es una 3-Variedad abierta.



Tenemos que $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ y como $\mathbb{R}^3$ es Hausdorff y 2-numerable, entonces $\mathbb{B}$ es 2-numerable.

Ahora si tomamos un punto en $\mathbb{B}$ existe una región que en $\mathbb{R}^3$ se puede ver como una bola.

Por tanto $\mathbb{B}$ es una 3-Variedad

Ejemplo 1.2.5

$\mathbb{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$ es una 3-Variedad abierta.

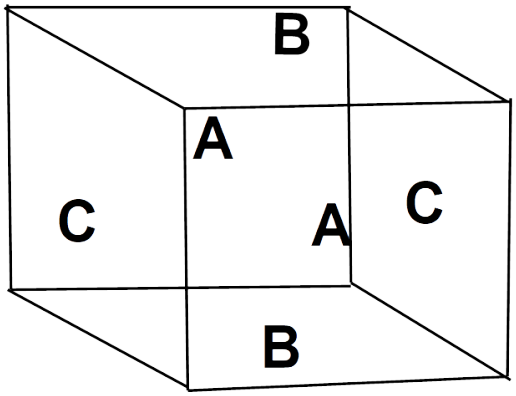
Tenemos que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ y como $\mathbb{R}^3$ es Hausdorff y 2-numerable, entonces $\mathbb{C}$ es Hausdorff y 2-numerable.

Ahora si tomamos un punto en $\mathbb{C}$ existe una región que en $\mathbb{R}^3$ se puede ver como una bola.

Por tanto $\mathbb{C}$ es una 3-Variedad.

Ejemplo 1.2.6

T^3 es una 3-variedad cerrada.



Algunas herramientas que necesitamos para ver el ejemplo son:

1. $T^n = S^1 \times S^1 \times ... \times S^1$; S^1 n-veces

2. El producto de variedades es una variedad

3. El producto de variedades sin borde es una variedad sin borde.

4. El producto de variedades compactas es compactas

Sabemos que S^1 es una 1-Variedad, entonces es fácil ver que $S^1 \times S^1 \times S^1$ es una 3-Variedad, es decir T^3 es una 3-Variedad

Ahora: S^1 no tiene borde y es compacta, entonces $S^1 \times S^1 \times S^1$ no tiene borde y es compacta, pero de acá podemos concluir que T^3 es compacta y sin borde.

Por tanto; T^3 es una 3-Variedad cerrada.

Ejemplo 1.2.7

$\mathbb{S}^3$ es una 3-variedad cerrada.

Observación

$S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$; a esto le llamamos la compactificación de $\mathbb{R}^3$ porque $\mathbb{R}^3$ se vuelve compacto cuando le agregamos $\{\infty\}$.

1.3. Definición de un invariante topológico

En Matemáticas, la noción de invariancia hace referencia a la propiedad que posee una entidad y que le permite permanecer inmutable ante la aplicación de cierta transformación. Se dice que un objeto es invariante bajo un conjunto de transformaciones si y sólo si la entidad o propiedad resultante al aplicar las transformaciones es exactamente la misma que la original, es decir, la transformación no ocasiona ningún cambio.

Ejemplo 1.3.1

El área de un triángulo al rotarlo

Se dice que el área de un triángulo es invariante bajo rotaciones.

Ejemplo 1.3.2

Los ángulos de un cuadrado al incrementar el tamaño de este.

Los ángulos de un cuadrado se mantienen invariantes bajo homotecias.

Ejemplo 1.3.3

El signo de un número real al multiplicarlo o dividirlo por un número positivo.

El signo de un número real es invariante tanto bajo multiplicación como bajo división por números positivos.

Ahora daremos la definición formal de lo que es un invariante topológico.

Definición 1.13

Sea f una función que va de un espacio topológico a otro. Diremos que f es un *homeomorfismo* si y solo si f es continua, biyectiva y además f^{-1} es continua.

Definición 1.14

Un invariante de un nudo es una función f que le asigna un nudo a un objeto matemático $f(K)$ de tal forma que se le asigna el mismo objeto a todos los nudos de la misma clase de equivalencia.

$$K \backsimeq K^{'} \Longrightarrow f(K) \cong f(K^{'})$$

Nota

En otras palabras, diremos que cierta propiedad se considera invariante topológico siempre y cuando esta sea invariante bajo homeomorfismo.

Capítulo 2

Invariantes topológicos en 3-Variedades

En siguiente capítulo mostrarelos dos invariantes topológicos como lo son la característica de Euler y el grupo fundamental, dando algunos ejemplos aplicativos para dichos invariantes, y también daremos algunas herramientas las cuales ayudan a solucionar algunos ejemplos de manera más sencilla.

Para las demostraciones que haremos, consideraremos a nuestras variedades como compactas

2.1. Característica de Euler

Definición 2.1

Una triangulazión de una 3-Variedad M es una subdivision de M en tetraedros topológicos que se tocan en vértices o aristas o caras completas.

Teorema 2.1

Todas las 3-Variedades pueden triangularse.

Prueba

Idea de la demostración. M puede cubrirse con una colección de bolas abiertas $A_1, A_2, A_3, ...,$ y dentro de ellas hay bolas cerradas (de un radio un poco menor) $B_1, B_2, B_3...$ cuyos interiores aun cubren a M. Podemos suponer que esta colección es localmente finita, de modo que cada bola intersecta solo a una cantidad finita de bolas. Los bordes de estas bolas son esferas suaves,

que podemos deformar para que se intersecten transversalmente en un numero finito de curvas. Así que la unión de las esferas divide a M en regiones cerradas que son pedazos de bolas, bordeadas por superficies suaves por pedazos.

Afirmamos que si $\mathbb{R}$ es una región compacta de $\mathbb{R}^3$ cuyo borde es una superficie suave por pedazos, entonces $\mathbb{R}$ es una unión de bolas pegadas por discos. Esto es así porque $\partial\mathbb{R}$ es una superficie suave por pedazos y podemos acomodarla en posición de Morse. Si cortamos a $\mathbb{R}$ por planos horizontales, uno entre cada par de valores críticos, entonces los pedazos que quedan son homeomorfos a productos de discos agujerados por intervalos, y esto pueden cortarse por rectangulos para obtener bolas

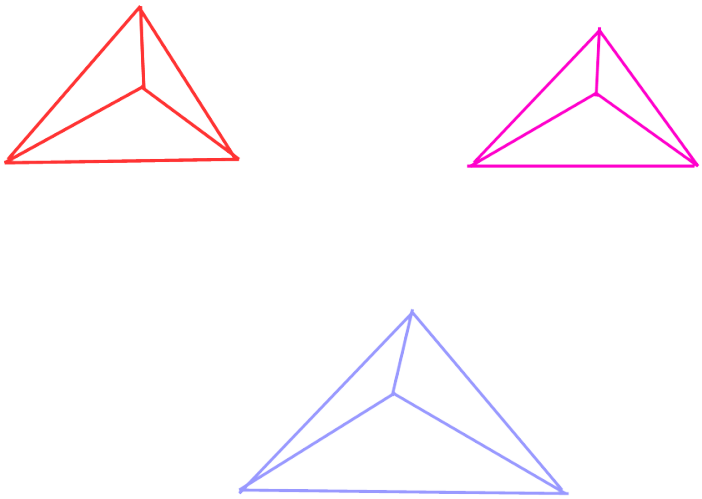
Así que M es la unión de bolas cerradas $C_1, C_2, C_3, ...$ que se tocan en sus bordes. Podemos dividir los bordes en triangulos, y subdividir a las bolas desde el centro para obtener tetraedros que se tocan en caras, aristas y vértices

Sea M una 3-Variedad dividida en tetraedros u otros poliedros convexos que se tocan en vértices, aristas o caras completas.

La característica de Euler de M es

$$\chi(M) = V - A + C - P$$

$V = \#vértices$, $A = \#aristas$, $C = \#caras$ y $P = \#poliedros$.



Teorema 2.2

La característica de Euler no depende de la triangulación.

Prueba

Una manera de demostar esto sería ver que al refinar una triangulación la caracteristica no cambia (bastaria mostrar que al subdividir un tetraedro en tetraedritos su caracteristica no cambia, pero esto no es obvio). Pero faltará mostrar que dadas dos triangulaciones es posible mover una para que las dos tengan una subdivisión común (esto es fácil si las triangulaciones son suaves, pero muy dificil si las triangulaciones son topológicas).

La demostración formal usa topologá algebráica: se prueba que para cualquier complejo simplicial K de dimensión 3 $\chi(K) =$y el resultado se sigue de que los grupos de homología singular son invariantes topológicos.

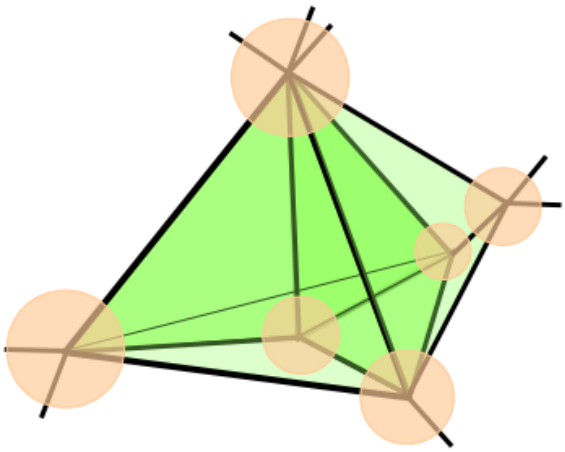
Teorema 2.3

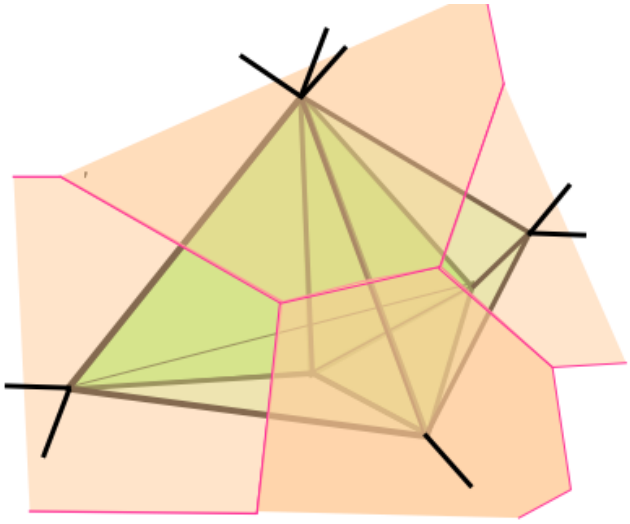
La característica de Euler de cada 3-Variedad cerrada es 0

Prueba

Idea de la demostración. Poner un globo en cada vértice de la triangulación. Inflarlos hasta que ocupen toda la variedad. Esto da una subdivision de la variedad en poliedros.

Hay:





- Un poliedro naranja por cada vértice verde
- Una cara naranja por cada arista verde
- Una arista naranja por cada cara verde
- Un vértice naranja por cada tetraedro verde

Así que

$$\chi(M) = V - A + C - P = P - C + A - V = -\chi(M)$$

Por tanto; $\chi(M) = 0$

Corolario 2.1

Si M es una 3-Variedad con frontera, $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(FrM)$

Prueba

Sea $2M$ el doble de M (la variedad que se obtiene pegando dos copias de M por sus bordes)

Entonces sabemos que $\chi(M) = V - A + C - P$

$$\chi(2M) = 2\,(V - A + C - P) - \chi(FrM)$$

$$\chi(2M) = 2\chi(M) - \chi(FrM)$$

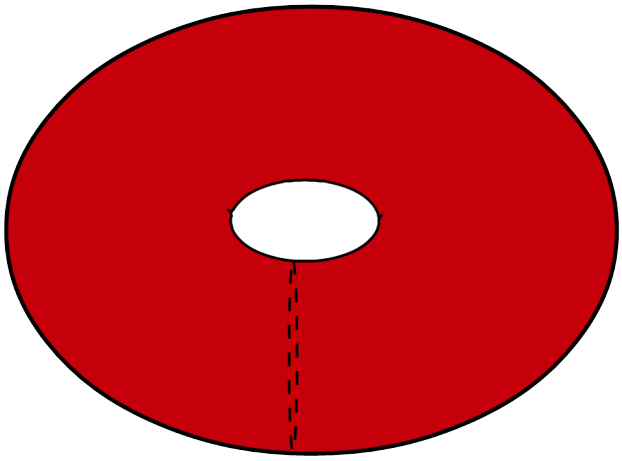
$$0 = 2\chi(M) - \chi(FrM)$$

$$\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(FrM) \qquad \square$$

2.2. Ejemplos

Ejemplo 2.2.1

Encontrar la característica de Euler para el Toro sólido



Por **corolario 1** tenemos lo siguiente

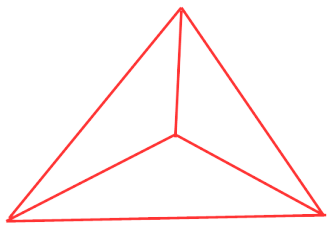
$$\chi(D^2 \times S^1) = \frac{1}{2}\chi(T^2)$$

$$\chi(D^2 \times S^1) = \frac{1}{2}(0)$$

$$\chi(D^2 \times S^1) = 0$$

Ejemplo 2.2.2

Calcular la característica de Euler para el Tetraedro



Tenemos que

$V = 4$, $A = 6$, $C = 4$ y $P = 1$

Entonces

$$\chi(T) = V - A + C - P$$

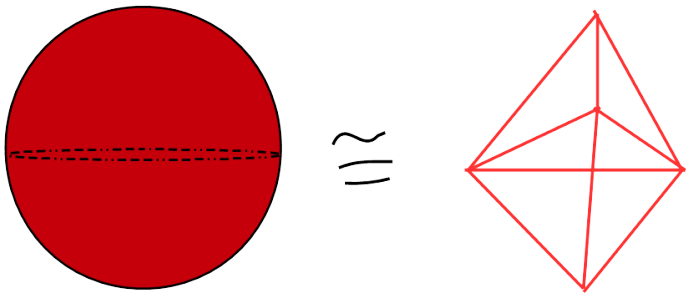
$$\chi(T) = 4 - 6 + 4 - 1$$

$$\chi(T) = 1$$

La bola es homeomorfa a el poliedro

Ejemplo 2.2.3

Calcular la característica de Euler para la Bola



En la figura, ya tenemos la triangulización de la bola, entonces tenemos que

$V = 5$, $A = 9$, $C = 7$, $P = 2$

Por lo que

$$\chi(B) = V - A + C - P$$

$$\chi(B) = 5 - 9 + 7 - 2$$

$$\chi(B) = 1$$

2.3. Grupo fundamental

Cuando pensamos en nudos, probablemente nos vienen a la mente imágenes de cuerdas enredadas consigo mismas o con otras cuerdas, como pueden ser los cordones de nuestros zapatos o un nudo marinero. Para trasladar esta idea al concepto matemático de nudo, comenzamos tomando una sola cuerda enredada consigo misma, y conectamos los dos extremos. De esta manera obtenemos un cŕculo de cuerda con un nudo que no se puede deshacer sin cortarla. A continuación disminuimos el grosor de la cuerda hasta hacerlo puntual. Vemos que lo que hemos obtenido es, de alguna manera, una forma de "colocar" una circunferencia $\mathbb{S}^1$ en el espacio $\mathbb{R}^3$ de manera que no presenta autointersecciones. Esto se puede representar matemáticamente por un **embebimiento**.

Definición 2.2

Un embebimiento es una aplicación continua e inyectiva que induce un homeomorfismo con la imagen.

Definición 2.3

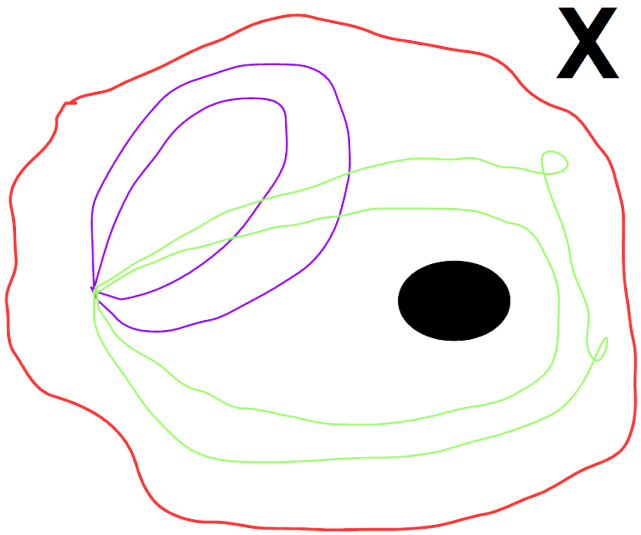
Un nudo es un embebimiento $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$. También se refiere a la imagen de este embebimiento. Si consideramos si el embebimiento preserva o invierte la orientación de $\mathbb{S}^1$, se tratará de un nudo orientado

De la misma manera que podemos tener varias cuerdas anudadas entre sí, podemos definir enlaces como embebimientos de varias circunferencias en $\mathbb{R}^3$. La restricción del dominio a cada una de estas circunferencias (cada una de las "cuerdas" anudadas) se denominará una componente del enlace.

El nudo trivial será $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$

La construcción del **grupo fundamental** es la siguiente. Sea X un espacio topológico. Consideremos el conjunto Ω de todas las trayectorias cerradas (o lazos) que salen de un punto fijo $p \in X$ (llamado punto base). El conjunto Ω puede ser dividido en clases de equivalencia, donde dos lazos son equivalentes si uno puede ser deformado en el otro continuamente

Dos lazos que son equivalentes se dice que son homotópicos.



- Los lazos de color morado son homotópicos
- Los lazos de color verde son homotópicos
- Los lazos de color verde no son homotópicos al punto base.

A la clase de lazos homotópicos a un lazo particular α se le representa como $[\alpha]$. Si α es homotópico a β, las clases $[\alpha]$ y $[\beta]$ son idénticas. Podemos definir ahora de manera natural una multiplicación entre las clases de lazos de la siguiente manera:
Tomamos dos representantes de las clases $[\alpha]$ y $[\beta]$ que queremos multiplicar, digamos α y β respectivamente, entonces $[\alpha] * [\beta]$ es la clase del lazo que sale de p, recorre α, regresa a p, recorre β y vuelve a regresar a p

Se puede demostrar sin mucha dificultad que esta operación está bien definida, es decir, que no depende de los representantes que se elijan y que además, el conjunto de clases de equivalencia con dicha multiplicación tiene una estructura de grupo, es decir, la multiplicación es asociativa, existe un elemento neutro (la clase del lazo constante e) tal que $[\alpha] * [e]$ = $[e] * [\alpha]$ = $[\alpha]$ y para todo elemento $[\alpha]$ existe un inverso $[\alpha]^{-1}$ tal que $[\alpha] * [\alpha]^{-1}$ = $[\alpha]^{-1} * [\alpha]$ = $[e]$. Sin embargo, esta multiplicación no necesariamente es conmutativa, $[\alpha] * [\beta] \neq [\beta] * [\alpha]$

Al grupo de clases de lazos homotópicos del espacio X con punto base p se denota por $\pi_1(X, p)$ y es llamado el **grupo fundamental de X con punto base p**.

Definición 2.4

Si K es un nudo y p es cualquier punto en $\mathbb{R}^3 - K$, entonces el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, p)$ es llamado el grupo del nudo K.

Ahora procedemos a demostrar que el **grupo fundamental** es un invariante topológico.

Definición 2.5

Sea $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una aplicación continua. Definimos

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

Donde f es un lazo basado en x_0

Teorema 2.4

Si $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo entre X e Y, entonces h_* es un ismorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$

Prueba

Sea $k : (Y, y_0) \Longrightarrow (X, x_0)$ la inversa de h. Entonces se satisface lo siguiente

$k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$; i_* es la aplicación identidad en (X, x_0)

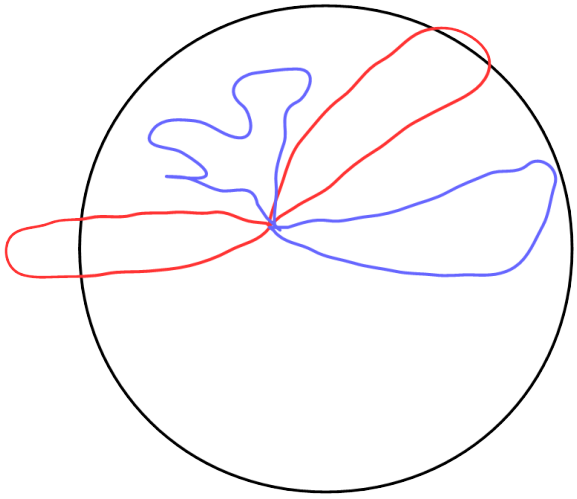
$h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$; j_* es la aplicación identidad en (Y, y_0)

Dado que i_* y j_* son homomorfismos identidad de los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ respectivamente, k_* es la inversa de h_*

2.4. Ejemplos

Ejemplo 2.4.1

Calcular el grupo fundamental del nudo trivial



En la Figura podemos notar que existe dos tipos de lazos en $\mathbb{R}^3 - \mathbb{S}^1$

- los rojos que le dan la vuelta a $\mathbb{S}^1$
- los azules que no le dan la vuelta a $\mathbb{S}^1$

Es fácil convencerse que los lazos que son homotópicos entre sí son las que le dan el mismo número de vueltas a $\mathbb{K}$

Por tanto tenemos las siguientes clases de lazos;

1. Los lazos constantes
2. Los lazos que dan una vueltas sobre $\mathbb{S}^1$
3. Los lazos que dan dos vueltas sobre $\mathbb{S}^1$ y así sucesivamente.
4. El inverso de los lazos descritos es (2) y (3)

En consecuencia tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}$$

Referencias Bibliográficas

[1] “3-Variedades”. En: Universidad Autonoma de México’.

[2] José Luis Cisneros Molina. “Introducción a la Teoría de Nudos”. En: UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ, 2011.

[3] James R. Munkres. “Topología”. En: Massachusetts Institute of Technology.

[4] Jennifer Schultens. “Introduction to 3-malfolds”. En: American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2010.