Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática

Invariantes de Homotopía

Doctorado en Matemática

- Tesis Doctoral -

Estudiante:
Ingrid Carolina Martínez Barahona

Asesores:

Dr. Manuel Cruz López
Asesor Externo
Universidad de Guanajuato

Dra. Liudmila Sabinina
Asesora Externa
Universidad Autónoma del Estado de Morelos

Dr. Riquelmi Cardona
Asesor Interno

Ciudad Universitaria, junio 2024.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

RECTOR

M.Sc. Juan Rosa Quintanilla Quintanilla

VICERRECTORA ACADÉMICA

Dra. Evelyn Beatriz Farfán Mata

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

M.Sc. Roger Armando Arias Alvarado

SECRETARIO GENERAL

Lic. Pedro Rosalío Escobar Castaneda

FISCAL GENERAL

Lic. Carlos Amílcar Serrano Rivera

DEFENSORA DE LOS DERECHOS UNIVERSITARIOS

Lcda. Ana Ruth Avelar

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DECANO

Dr. Luis Gilberto Parada Gómez

VICEDECANO

Dr. José Nerys Funes Torres

SECRETARIA

M.Sc. Angela Gudelia Portillo de Pérez

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DIRECTOR

Dr. Dimas Noé Tejada Tejada

SECRETARIA

Lcda. Claudia Patricia Corcio

TRIBUNAL EVALUADOR

Dr. Manuel Cruz López
Universidad de Guanajuato
México

Dr. Francisco José López Hernández
Universidad Uatónoma de Baja California
México

Dr. Otto Héctor Romero Germán
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)
México

AGRADECIMIENTOS

A mi madre y hermanos, por su apoyo y sacrificio para ayudarme a lograr mis objetivos y metas.

Al profesor Luis Edmundo Ramírez Fuentes, por darme la motivación para estudiar matemáticas.

A mis asesores: Dr. Manuel Cruz López, Dra. Liudmila Sabinina y Dr. Riquelmi Cardona, por brindarme su tiempo, conocimientos, guía y apoyo para realizar la investigación.

Al Ing. Carlos Mauricio Canjura Linares, por impulsar planes de formación para la Escuela de Matemática en el cual se incluyó el Doctorado en Matemática.

Al Ministerio de Educación de El Salvador y al Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA) por el apoyo para realizar estancias de investigación en la Universidad de Guanajuato.

A los compañeros de la Escuela de Matemática y de la Facultad de Ciencias Naturales Matemática que me brindaron su apoyo, en especial al Msc. José René Palacios Barrera y la Msc. Bessy Evelyn Cardona.

A los profesores Begoña Vitoranio y Jorge Mozo, por brindarme su apoyo para poder realizar las estancias de investigación.

A la Universidad de El Salvador, por formarme desde licenciatura hasta el doctorado...

Índice general

Introducción **9**

1. Espacios topológicos **11**
1.1. Espacios de funciones . . . 11
1.2. Homotopía . . . 12
1.2.1. Homotopía de funciones . . . 12
1.2.2. Equivalencias homotópicas . . . 13
1.2.3. Homotopía de pares . . . 14
1.3. Grupo fundamental . . . 14
1.4. Espacios cubrientes . . . 17
1.4.1. Aplicaciones cubrientes . . . 17
1.4.2. Propiedades de levantamiento . . . 19
1.4.3. El grupo de transformaciones cubrientes Γ . . . 21
1.4.4. La acción de Γ . . . 21

2. Lazos topológicos **25**
2.1. Lazos topológicos . . . 25
2.1.1. La estructura algebraica de lazo . . . 25
2.1.2. Isotopismos de lazos . . . 27
2.1.3. Grupo multiplicativo de un lazo . . . 28
2.1.4. Lazos topológicos . . . 28
2.2. Lazos cubrientes . . . 29
2.2.1. Propiedades básicas . . . 29
2.2.2. Propiedades de lavantamiento y cubrientes de lazos . . . 32
2.2.3. Construcción de torres de lazos cubrientes . . . 34
2.3. Completaciones profinitas . . . 36
2.3.1. La completación profinita del grupo fundamental . . . 36
2.3.2. La completación profinita de Γ . . . 38

3. El lazo solenoidal universal **41**
3.1. El lazo solenoidal universal $\mathcal{L}$ . . . 41
3.2. El lazo cubriente generalizado $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ . . . 44
3.3. La acción de Γ sobre $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ . . . 48
3.4. El grupo multiplicativo solenoidal . . . 51
3.4.1. El grupo multiplicativo del cubriente universal de un lazo . . . 51
3.4.2. Construcción del grupo multiplicativo solenoidal . . . 52

4. Una aplicación: El grupo de Rhodes para lazos topológicos **55**
4.1. El grupo de Rhodes clásico 55
4.2. Propiedades del grupo de Rhodes 57
4.3. Un teorema sobre la solubilidad del grupo de Rhodes 60

Epílogo **63**

Referencias **65**

Introducción

El objeto de estudio de este trabajo son los lazos topológicos. Los lazos topológicos son estructuras algebraicas - topológicas no asociativas. Los primeros trabajos sobre éstas estructuras fueron presentandos por Karl Hofmann (ver [10]), Lev Sabinin y Mal'cev (ver [18]). Podemos encontrar ejemplos de lazos en varias ciencias como en física en la solución de la ecuación de Yang - Baxter.

Los lazos tienen ciertos grupos asociados: el grupo generado por las traslaciones izquierdas, el grupo generado por las traslaciones derechas y el grupo generado por las traslaciones izquierdas y derechas, llamados grupo multiplicativo izquierdo, grupo multiplicativo derecho y grupo multiplicativo, respectivamente. Cada uno de ellos actúa como grupo de transformaciones sobre el lazo.

Este trabajo consiste de dos partes. La primera parte está dirigida a construir el lazo solenoidal universal, el cual es un lazo que se construye a partir de un lazo dado usando todas las aplicaciones cubrientes sobre este lazo. El grupo multiplicativo solenoidal universal es el grupo multiplicativo asociado a este lazo solenoidal. Se estudian las propiedades algebraicas - topológicas de cada uno de estos objetos.

En la segunda parte se hace la descripción del grupo de Rhodes para lazos topológicos, el cual es una generalización del grupo fundamental de un espacio topológico que incluye una acción de grupo. Para el caso de un lazo se considera la acción del grupo multiplicativo actuando sobre él. Se estudiarán propiedades que tiene el grupo de Rhodes con respecto de las propiedades que cumplen los lazos topológicos tales como la noción de isotopismo, entre otras. Se probará la solubilidad del grupo de Rhodes para lazos topológicos centralmente nilpotentes.

El trabajo se desarrolla en cuatro capítulos. En los capítulos 1 y 2 se introducen los conceptos básicos tales como la noción de homotopía, espacios cubrientes, lazos topológicos y las propiedades más importantes para espacios cubrientes de lazos topológicos. En el capítulo 3 se hace la descripción detallada del lazo solenoidal universal y su grupo multiplicativo. Se demuestran distintas propiedades de este lazo. Finalmente, en el capítulo 4 se describe el grupo de Rhodes, algunas de sus propiedades y se prueban resultados de esta construcción sobre lazos topológicos.

Incluimos al final del escrito un Epílogo donde se bosquejan algunas posibles líneas de investigación a futuro y se plantean algunas preguntas concretas.

1 Espacios topológicos

En este capítulo presentaremos las nociones topológicas más importantes para nuestro estudio. La primera de ellas es la noción de homotopía y el grupo fundamental. Finalmente, se revisarán las definiciones y propiedades más importantes de espacios cubrientes y cubrientes regulares o de Galois. Las referencias que seguimos para este capítulo son [1], [2], [9] y [16].

1.1 Espacios de funciones

Trabajaremos en la categoría $\mathcal{T}op_*$ cuyos objetos son espacios topológicos punteados y los morfismos son funciones continuas punteadas.

Para X y Y conjuntos, denotamos por Y^X al conjunto de funciones $f : X \to Y$. Si X y Y son espacios topológicos, denotaremos por $C(X, Y)$ al subconjunto de Y^X de todas las funciones continuas.

Sean X y Y espacios topológicos. La topología compacto - abierta es la topología en Y^X que tiene como subbase la familia de conjuntos:

$$(K, U)_{co} = \{f \in Y^X / f(K) \subset U\},$$

donde $K \subset X$ es compacto y U es un abierto en Y.

Algunas de las propiedades más importantes de la topología compacto - abierta son:

Proposición 1.1. *La topología compacto - abierta en $C(X, Y)$ es más gruesa que cualquier topología admisible.*

Proposición 1.2. *La aplicación evaluación $e : C(X, Y)_{co} \times X \to Y$, $(f, x) \longmapsto f(x)$ es continua si X es localmente compacto.*

La $g-$ topología en Y^X, es la topología que tiene como subbase la familia de conjuntos

$$(K, U)_g = \{f \in Y^X / f(K) \subset U\},$$

donde K es cerrado en X y U abierto de Y, con la condición que K o el complemento de U en Y sea compacto.

En el caso que X sea compacto, la topología compacto - abierta y la $g-$ topología coinciden.

Sea X un espacio topológico, denotamos $Homeo(X)$ el grupo de homeomorfismos, desde el punto de vista algebraico, de X. Un resultado importate de la $g-$ topología (ver [1]) es el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *El grupo $Homeo(X)$ de un espacio localmente compacto y Hausdorrf es un grupo topológico con la $g-$ topología. Además, la $g-$ topología es la topología admisible más fuerte para la cual es cierto.*

1.2 Homotopía

La noción de homotopía surge como una generalización de homeomorfismo. De igual manera que los homeomorfismos sirve para clasificar espacios topológicos. En ese sentido, la homotopía de funciones sirve para definir nuevos invarientes topológicos como el grupo fundamental y los grupos de homotopía de orden superior, entre otros.

1.2.1 Homotopía de funciones

Sean $f, g : X \to Y$ funciones e $I = [0,1] = \{t | t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$. Diremos que f es homotópica a g, y escribiremos $f \simeq_F g$, si existe una función continua $F : X \times I \to Y$ tal que:

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f(x) \\ F(x,1) &= g(x) \\ F(*,t) &= *. \end{aligned}$$

La definición nos dice que la homotopía F deforma continuamente la función f en la función g a través del tiempo o instante t. Ilustramos la definición para caminos $f, g : I \longrightarrow X$:

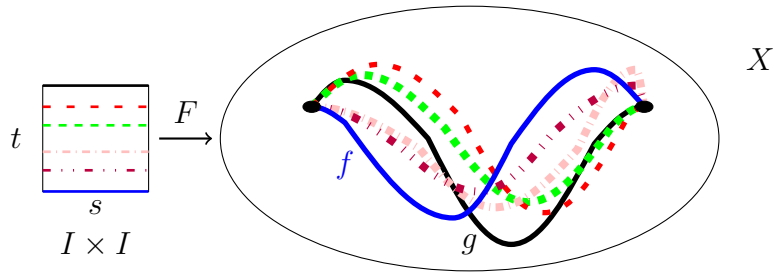


Figura 1.1: Homotopía entre dos caminos f y g

Ejemplo 1.1. *Sea $X = Y = \mathbb{R}^n$. Las funciones $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas por $f(x) = x$ y $g(x) = 0$ son homotópicas.*

En efecto, definiendo $F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $F(x,t) = (1-t)x$, se tiene que F es continua y además $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$, por tanto $f \simeq g$.

La relación de homotopía entre dos funciones es una relación de equivalencia:

Proposición 1.3. *Para cualesquiera espacios X y Y, homotopía es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las funciones de X a Y. Además, si $f \simeq g : X \to Y$, $k : A \to X$ y $l : Y \to B$ son funciones, entonces $f \circ k \simeq g \circ k$ y $l \circ f \simeq l \circ g$.*

Para una función $f : X \to Y$, denotaremos por $[f]$ la clase de equivalencia que contiene a f y la llamaremos la clase de homotopía de f. La colección de todas las clases de homotopía de

funciones de X en Y es denotada por $[X, Y]$ y es llamada conjunto de clases de homotopía.

Una función $f : X \to Y$ es llamada nulo homotópica si $f \simeq *$, donde $* : X \to Y$ es la función constante. Una homotopía entre f y $*$ es llamada nulo homotopía.

Un espacio X es contraible si id_X es nulo homotópica, la nulo homotopía es llama homotopía contraible.

Observación 1.1. *Si el espacio X o Y es contraible, entonces cualquier función $f : X \to Y$ es nulo homotópica.*

Ejemplo 1.2. *Sea $\mathbb{S}^n$ la n-esfera y $p = -* \in \mathbb{S}^n$, el antipodal de $*$. Entonces $\mathbb{S}^n - \{p\}$ es contraible.*

Ejemplo 1.3 (El espacio peine)**.** *Sea C el subespacio de $\mathbb{R}^2$ que consiste de la unión de $[0,1] \times \{0\}$, $\{0\} \times [0,1]$ y $\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ para $n = 1, 2, \ldots$. Se dota a C con la topología inducida como subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Elegimos como punto base $*_0 = (0,0)$, entonces C con punto base $*_0$ es contráctil.*

1.2.2 Equivalencias homotópicas

Para dos espacios X y Y se define la noción de equivalencia homotópica que es una noción más general que la definición de homeomorfismo entre dos espacios.

Una función $f : X \to Y$ es llamada una equivalencia homotópica si existe una función $g : Y \to X$ tal que es una inversa homotópica derecha e izquierda de f, esto es, $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$.

Definición 1.1. *Dos espacios X y Y tienen el mismo tipo de homotopía si existe una equivalencia homotópica de uno sobre el otro. Lo denotaremos por $X \simeq Y$*

Ejemplo 1.4. *Si $\imath : A \to X$ es una función inclusión y $r : X \to A$ es un retracto por deformación, entonces $\imath$ y r son equivalencias homotópicas y $A \simeq X$.*

Observación 1.2.

1. *Todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica.*
2. *Si g es una homotopía inversa derecha e izquierda de f, entonces es única salvo homotopía.*
3. *La composición de equivalencias homotópicas es una equivalencia homotópica.*
4. *Se pueden considerar dos espacios del mismo tipo de homotopía como espacios escencialmente iguales.*

1.2.3 Homotopía de pares

Sean X y Y espacios con subespacios $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, los pares (X, A) y (Y, B) son llamados pares de espacios.

Una función de pares de espacios $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una función $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$.

Dos funciones de pares $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ son *homotópicas*, $f \simeq g$, si existe una homotopía $F : X \times I \to Y$ satisfaciendo las condiciones de la definición de homotopía que se dió al inicio adicionando que $F(A \times I) \subseteq B$.

Una función $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una equivalencia homotópica de pares, si existe una función de pares $g : (Y, B) \to (X, A)$ tal que $f \circ g \simeq id_{(Y,B)}$ y $g \circ f \simeq id_{(X,A)}$.

Sean $f, g : X \to Y$, $A \subseteq X$ y $f|_A = g|_A$. Si $f \simeq_F g$ y además $F(a, t) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$ y $t \in I$ entonces diremos que f es homotópica a g relativa a A. Lo denotaremos por $f \simeq g\ relA$. Se dice que A es fijado durante la homotopía o que la homotopía es estacionaria en A.

1.3 Grupo fundamental

La idea de construcción del grupo fundamental de un espacio X es tomar un punto fijo x_0 y formar caminos cerrados basados en ese punto, luego tomar las clases de homotopía de dichos lazos y finalmente definir una operación sobre las clases de homotopía.

Un lazo en el espacio X, basado en $x_0 \in X$ es una función continua $\gamma : I \to X$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

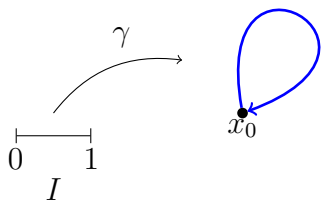


Figura 1.2: Lazo basado en x_0

Si α y β son dos lazos basados en el punto x_0, definimos su producto $\alpha * \beta$ como el lazo dado por

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

esto es, en la primera mitad del tiempo recorremos el lazo α y en la segunda mitad del tiempo el lazo β:

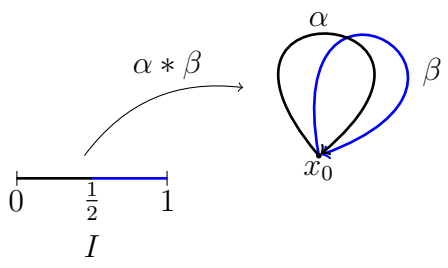


Figura 1.3: Multiplicación de lazos.

La multiplicación de lazos induce una multiplicación en las clases de homotopía:

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta].$$

En efecto, la operación $\cdot$ está bien definida; si $\alpha \simeq_F \alpha'$ $rel\{0,1\}$ y $\beta \simeq_G \beta'$ $rel\{0,1\}$, entonces $\alpha * \beta \simeq_H \alpha' * \beta'$ con

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Esta operación definida en el conjunto de clases de homotopías de lazos forma un grupo. Es fácil comprobar que el elemento identidad es la clase del lazo constante $e_{x_0} : I \to X$, $t \longmapsto x_0$ y el inverso de la clase $[\alpha]$ es la clase $[\bar{\alpha}]$ donde $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$. Se establece el siguiente teorema:

Teorema 1.2. *El conjunto de clases de homotopía de lazos en X basados en el punto x_0 forma un grupo bajo la multiplicación $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$. Dicho grupo recibe el nombre de grupo fundamental de X y se denota por $\pi_1(X, x_0)$.*

Un primer ejemplo sencillo pero que ilustra geométricamente el grupo fundamental es el cálculo del grupo fundamental de la esfera $\mathbb{S}^2$. Tomemos un punto cualquiera x_0 sobre la 2-esfera, como muestra en la figura 1.4; ahora tomamos un lazo cualquiera, ese lazo puede ser deformardo continuamente al punto tomado (puede pensar el lazo como hilo que va halando continuamente). Se concluye que cualquier lazo es homotópico al lazo constante e_{x_0}. Así, $\pi_1(\mathbb{S}^2, x_0) = 1$

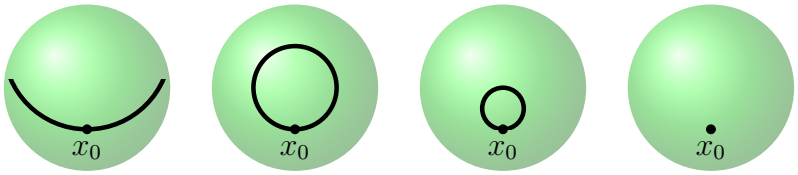


Figura 1.4: Lazo en $\mathbb{S}^2$

A continuación se muestran ejemplos no triviales para las cuales se necesitan otras herramientas para su cálculo, algunos de ellos serán retomados en la sección de espacios cubrientes.

Ejemplo 1.5. *a.* $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = 0$.

b. $\pi_1(\mathbb{S}^1, *) \cong \mathbb{Z}$.

c. Si X y Y son espacios conexos por caminos entonces $\pi_1(X \times Y)$ es isofomorfo a $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

d. Si $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, el toro de dimensión dos, entonces $\pi_1(\mathbb{T}, *) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ahora, enlistamos las propiedades del grupo fundamental que serán de utilidad a lo largo del trabajo. Pueden ser revisadas con detalle en [2].

Propiedades 1.1.

1. *Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios. Una función base $f : X \to Y$ induce un homomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $[\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma]$.*

2. *Si (X, x_0) y (Y, y_0) tienen el mismo tipo de homotopía, entonces los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ son isomorfos.*

3. *Si X es un espacio conexo por caminos entonces $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos para cualquier $x_0, x_1 \in X$.*

4. *Si X es un espacio contraible entonces $\pi_1(X)$ es trivial.*

5. *Si un espacio X es conexo por caminos y $\pi_1(X) = 0$, X es llamado* simplemente conexo.

6. *Cualquier espacio contraible es simplemente conexo. El recíproco no es cierto, por ejemplo $\mathbb{S}^2$ es simplemente conexo pero no es contraible.*

El grupo fundamental fue extendido por Eduard Čech quien definió los grupos de homotopía superiores $\pi_n(X)$ en el año 1932. Para cada espacio X y $n \geq 0$ el conjunto $[\mathbb{S}^n, X]$ es llamado el $n-$ésimo grupo de homotopía de X y es denotado por $\pi_n(X)$.

1.4 Espacios cubrientes

En esta sección daremos las propiedades más importantes sobre espacios cubrientes para espacios topológicos y que luego serán aplicadas para lazos cubrientes de lazos topológicos.

1.4.1 Aplicaciones cubrientes

Sean X y E espacios topológicos y $p : E \longrightarrow X$ una aplicación continua y sobreyectiva. Diremos que $p : E \longrightarrow X$ es un *espacio cubriente* de X si cada $x \in X$ tiene un vecindario U tal que $p^{-1}(U)$ es unión disjunta de abiertos S_i en E, cada uno de los cuales son mapeados homeomorficamente a U por p.

Notación:

1. Denotaremos por (E, p) al espacio cubriente de X, $E \xrightarrow{p} X$.
2. Llamaremos fibra de p en $x \in X$ al conjunto $p^{-1}(x)$.

Si (E, p) es un espacio cubriente de X y si $x_0 \in X$, podemos dotar a la fibra $p^{-1}(x_0)$ con la topología discreta como subespacio de E.

Iniciemos con un ejemplo que más adelante, junto con las propiedades de levantamiento, servirá para calcular el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$: los espacios cubrientes de $\mathbb{S}^1$.

Ejemplo 1.6. *La aplicación $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $x \longmapsto e^{2\pi i x}$ es una aplicación cubriente.*

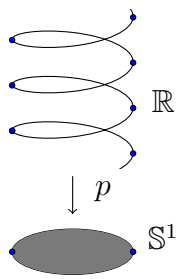


Figura 1.5: Cubriente $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$

La fibra de p en cada punto z de $\mathbb{S}^1$ es isomorfa a $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.7. *La aplicación $p_n : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $z \longmapsto z^n$, con n un entero positivo, es una aplicación cubriente para $\mathbb{S}^1$. La fibra de p_n en $z \in \mathbb{S}^1$ son las raíces $n-$ ésimas de z.*

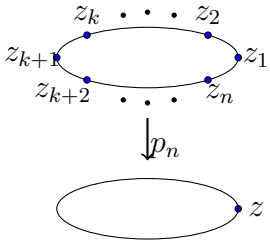


Figura 1.6: Cubriente $p_n : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$

Sean $p : E \to X$ y $q : Y \to X$ cubrientes del mismo espacio X. Un homomorfismo cubriente h de (E, p) a (Y, q) es una función continua $h : E \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd} .$$

En el caso que h sea un isomorfismo diremos que los cubrientes (E, p) y (Y, q) son isomorfos.

El siguiente teorema nos da una caracterización para espacios cubrientes isomorfos:

Teorema 1.3. *Sea X conexo por caminos y locamente conexo por caminos. Dos espacios cubrientes $p : E \to X$ y $q : Y \to X$ son isomorfos si y sólo si $p_*\pi_1(E, e_0)$ y $q_*\pi_1(Y, y_0)$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$ (con $p(e_0) = q(y_0) = x_0$).*

Demostración. Ver [16, Teorema 4.5.9] □

Sea X un espacio topológico. Un espacio cubriente (E, p) de X para el cual E es simplemente conexo es llamado cubriente universal de X. El término universal viene del hecho que (E, p) cumple las siguientes propiedades:

1. Dos cubrientes universales del mismo espacio X son isomorfos.

2. Si (E, p) es el cubriente universal de X y (Y, q) es un espacio cubriente de X, entonces existe una función continua $\tilde{p} : E \longrightarrow Y$ tal que $(E, \tilde{p})$ es un espacio cubriente de Y.

La primera propiedad nos dice que el cubriente universal es único, salvo isomorfismo, y la segunda que el cubriente universal es el *más grande* de todos los cubrientes.

El cubriente universal no existe siempre para todo espacio X. El siguiente teorema nos da las condiciones para su existencia.

Teorema 1.4. *Sea X un espacio conexo, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Entonces X tiene un cubriente universal.*

En el ejemplo 1.6 el cubriente $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $x \longmapsto e^{2\pi x i}$ es el cubriente universal de $\mathbb{S}^1$.

1.4.2 Propiedades de levantamiento

Las propiedades de lavantamiento hacen referencia a las propiedades que se tienen en el espacio base y que se cumplen también cuando se levantan al espacio cubriente. Las propiedades más importantes son: levantamiento de funciones, levantamiento de caminos y levantamiento de homotopías.

A continuación se resumen las principales propiedades de levantamiento, pueden ser revisadas con detalle en [16] o [9]:

Proposición 1.4 (**Levantamiento de funciones 1**). *Sea $E \xrightarrow{p} X$ un espacio cubriente, $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una aplicación cualquiera y Y conexo. Si existe una aplicación $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (E, e_0)$ tal que $p\tilde{f} = f$, entonces $\tilde{f}$ es única.*

Proposición 1.5 (**Levantamiento de funciones 2**). *Sea $E \xrightarrow{p} X$ un espacio cubriente de X, $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una aplicación cualquiera y Y conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Entonces un levantamiento $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (E, e_0)$ existe si y sólo si:*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(X, x_0)).$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Figura 1.7: Levantamiento de funciones

Proposición 1.6 (**Levantamiento de caminos 1**). *Sea $E \xrightarrow{p} X$ un espacio cubriente. Si $\gamma : I \longrightarrow X$ es un camino con punto inicial x_0, existe un único camino $\widetilde{\gamma}$ en E con punto inicial $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ tal que $p\widetilde{\gamma} = \gamma$.*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & X \end{tikzcd}$$

Figura 1.8: Levantamiento de caminos 1

Observación: En general el levantamiento de un lazo cerrado no siempre es un lazo cerrado. Las aplicaciones cubrientes que sí cumplen esa propiedad son llamadas regulares, las cuales estudiaremos en la siguiente sección.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, "\widetilde{F}"] & X
\end{tikzcd}$$

Figura 1.9: Levantamiento de Homotopía

Proposición 1.7 (**Levantamiento de Homotopía**). *Sea $E \xrightarrow{p} X$ un espacio cubriente de X. Sea (Y, y_0) un espacio cualquiera y $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una aplicación con levantamiento $\widetilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (E, e_0)$, $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Entonces cualquier homotopía $F : Y \times I \longrightarrow X$ con $F(y, 0) = f(y)$, para todo $y \in Y$, puede ser levantada a una homotopía $\widetilde{F} : Y \times I \longrightarrow E$ tal que $\widetilde{F}(y, 0) = \widetilde{f}(y)$ para todo $y \in Y$.*

Proposición 1.8 (**Levantamiento de caminos 2**). *Sea $E \xrightarrow{p} X$ un espacio cubriente de X. Sean α y β dos caminos en X con punto inicial x_0 y punto final x_1; sean $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ sus respectivos levantamientos a caminos en E. Si α y β son homotópicos relativos a $\{0, 1\}$ entonces $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ también son homotópicos relativos a $\{0, 1\}$ y en particular $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$.*

Las propiedades de levantamiento permiten deducir otras propiedades, por ejemplo, el cálculo del grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$.

Ejemplo 1.8. *Del ejemplo 1.6 tomemos el cubriente universal $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $x \longmapsto e^{2\pi x i}$. Sea $[\alpha] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ ($x_0 = 1$) con representante el lazo $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Sea $\widetilde{\alpha}$ el levantamiento de α en $\mathbb{R}$ que comienza en 0. El punto final $\widetilde{\alpha}(1)$ debe ser un punto de $p^{-1}(x_0)$, por lo que $\widetilde{\alpha}(1)$ debe ser algún entero. Por la proposición 1.8 $\widetilde{\alpha}(1) = n$ depende únicamente de la clase de homotopía de α. El entero n es llamado el grado de α y lo denotaremos por $deg\alpha$.*

Podemos definir la aplicación $\phi : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $[\alpha] \longmapsto deg\alpha$. Se verifica que ϕ es un isomorfismo de grupos y por tanto $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

Sean $p : E \to X$ y $q : Y \to X$ cubrientes del mismo espacio X. Supongamos que $f, g : E \longrightarrow Y$ son dos homomorfismos cubrientes. Podemos considerar a f y a g como levantamientos de la aplicación $p : E \to X$ con respecto de la aplicación cubriente $q : Y \to X$.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "q"] \\
E \arrow[r, "p"] \arrow[ur, "f,g"] & X
\end{tikzcd}$$

Con la hipótesis de que X es conexo, si f y g coinciden en un punto y dado que el levantamiento es único entonces $f = g$. Esto prueba la siguiente proposición

Proposición 1.9. *Sean $f, g : E \longrightarrow Y$ dos homomomorfismo cubrientes del espacio cubriente (E, p) al espacio cubriente (Y, q) de X. Si X es conexo y si $f(x_0) = g(x_0)$ para algún $x_0 \in X$ entonces $f = g$.*

Otro resultado sobre homomorfismos cubrientes es que si tenemos dos espacios cubrientes del mismo espacio, todo homomorfismo cubriente entre ellos es también un cubriente bajo ciertas condiciones:

Proposición 1.10. *Sean $p : E \to X$ y $q : Y \to X$ cubrientes del mismo espacio X. Si Y es conexo y localmente conexo por caminos todo homomorfismo $f : E \longrightarrow Y$ es un cubriente.*

1.4.3 El grupo de transformaciones cubrientes Γ

Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un cubriente. Diremos que los puntos Q_1 y Q_2 de $\widetilde{X}$ son conjugados si $p(Q_1) = p(Q_2)$, esto es, si pertenecen a la misma fibra. De manera similar, diremos que dos caminos $\widetilde{\gamma}_1$ y $\widetilde{\gamma}_2$ son conjugados si ambos son levantamientos del mismo camino.

Definición 1.2. *El cubriente $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ es llamado Galois, regular o normal si todo conjugado de un camino cerrado $\widetilde{\gamma}$ en $\widetilde{X}$ es también un camino cerrado.*

Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un cubriente. Un homeomorfismo σ de $\widetilde{X}$ en sí mismo es llamado transformación cubriente de $p : \widetilde{X} \to X$ si $p\sigma = p$. El conjunto de todas las transformaciones cubrientes forman un grupo, denotado por Γ, el cual llamaremos grupo de transformaciones cubrientes de $p : \widetilde{X} \to X$.

Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ un cubriente y Γ su grupo de transformaciones. Sea $\sigma \in \Gamma$, si $\sigma(Q_1) = Q_2$ entonces $p(Q_2) = p(\sigma(Q_1)) = p(Q_1)$. Por tanto, Q_1 y Q_2 son conjugados. Similarmente, sea $\widetilde{C}_1$ una curva arbitraria en $\widetilde{X}$ y el conjunto $\sigma(\widetilde{C}_1) = \widetilde{C}_2$, entonces $\widetilde{C}_1$ y $\widetilde{C}_2$ son conjugadas.

Una transformación cubriente σ está completamente determinada por la imagen $\sigma(Q_1) = Q_2$ de un punto cualquiera Q_1. Sea S_1 un punto cualquiera de $\widetilde{X}$ y $\widetilde{\gamma}_1$ un camino que inicia en Q_1 y termina en S_1. Sea $\widetilde{\gamma}_2$ un camino conjugado de $\widetilde{\gamma}_1$ iniciando en Q_2 y sea S_2 su punto final. Dado que $\sigma(Q_1) = Q_2$, $\sigma(\widetilde{\gamma}_1)$ es un camino conjugado de $\widetilde{\gamma}_1$ iniciando en Q_2, tenemos $\sigma(\widetilde{\gamma}_1) = \widetilde{\gamma}_2$. Así $\sigma(S_1) = S_2$.

1.4.4 La acción de Γ

Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación cubriente y Γ su grupo de transformaciones cubrientes. Definimos la aplicación $\Gamma \times \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$, $(\sigma, \widetilde{x}) \longmapsto \sigma \cdot \widetilde{x} = \sigma(\widetilde{x})$, dado que Γ es un subgrupo del grupo de homeomorfismos de $\widetilde{X}$ por el teorema 1.1, Γ actúa sobre $\widetilde{X}$.

Recordemos que en general, la acción de un grupo G sobre un espacio X es libre de puntos fijos si $g \in G$ y $g \cdot x = x$ para algún $x \in X$ implica que $g = id_X$. Para el caso de la transformación cubriente $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$, sea $\sigma \in \Gamma$ tal que $\sigma(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$ para algún $\widetilde{x}$. Entonces

$$\sigma(\widetilde{x}) = \widetilde{x} = id_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}),$$

por la proposición 1.9, $\sigma = id_{\widetilde{X}}$. Por tanto, la acción de Γ sobre $\widetilde{X}$ es libre de puntos fijos.

Otra propiedad importante de la acción de un grupo G sobre un espacio X es la propiedad propia y discontinua. La acción del grupo G es propia y discontinua si todo $x \in X$ tiene un vecindario U con la propiedad que todos los elementos no triviales de G transforman a U fuera de sí mismo, esto es, para todo $g \in G,\ g \neq e_G,\ (g \cdot U) \cap U = \emptyset$. Ahora, sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ y Γ su grupo de transformaciones cubrientes, sea $\widetilde{x}$ un elemento cualquiera de $\widetilde{X}$ y sea U un vecindario de $p(\widetilde{x})$ tal que $p^{-1}(U) = \sqcup_{\alpha \in A} \widetilde{U}_\alpha$. Denotamos por $\widetilde{U}_{\widetilde{x}}$ el vecindario de esta colección que contiene a $\widetilde{x}$. Sea $\sigma \in \Gamma$ con $\sigma \neq e_\Gamma$, desde que la acción de Γ es libre de puntos fijos, $\sigma(\widetilde{x}) \neq \widetilde{x}$. Dado que $p\sigma(\widetilde{U}_{\widetilde{x}}) = p(\widetilde{U}_{\widetilde{x}}) = U$, $\sigma(\widetilde{U}_{\widetilde{x}}) = \widetilde{U}_\beta$ para algún $\beta \in A$. Como $\sigma(\widetilde{x}) \neq \widetilde{x}$, $\widetilde{U}_{\widetilde{x}} \neq \widetilde{U}_\beta$ y además, por definición los $\widetilde{U}_\alpha$ son disjuntos se tiene:

$$\widetilde{U}_{\widetilde{x}} \cap \sigma(\widetilde{U}_{\widetilde{x}}) = \widetilde{U}_{\widetilde{x}} \cap \widetilde{U}_\beta = \emptyset,$$

por tanto la acción de Γ es propia y discontinua.

En resumen, podemos establecer el siguiente teorema:

Teorema 1.5. *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación cubriente y Γ su grupo de transformaciones cubrientes. La acción de Γ sobre $\widetilde{X}$ es libre de puntos fijos, propia y discontinua.*

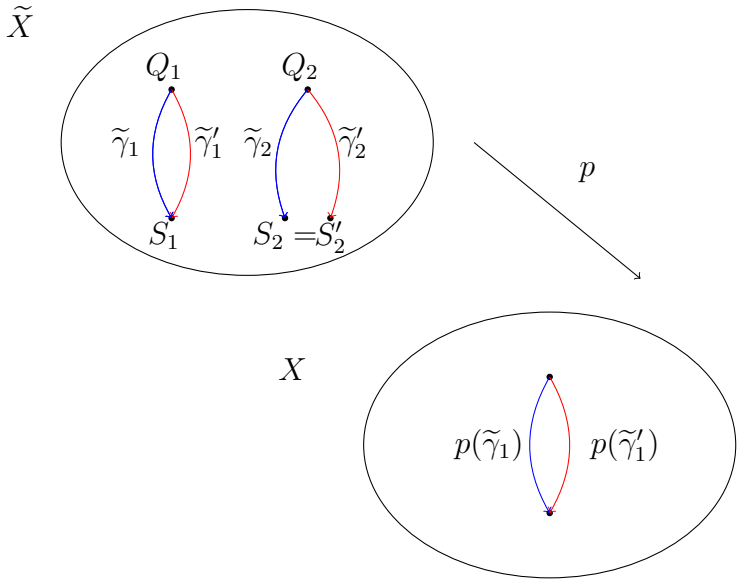
El siguiente teorema nos indica que Γ actúa transitivamente sobre la fibra de cada punto en X si $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ es un cubriente regular.

Teorema 1.6. *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un cubriente regular. Sean Q_1 y Q_2 puntos conjugados en $\tilde{X}$. Entonces existe una única transformación cubriente σ tal que $\sigma(Q_1) = Q_2$, la cual denotaremos por $\sigma(Q_1; Q_2)$. Además, sea $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots\}$ el conjunto de todos los puntos que son conjugados con Q_1 entonces el conjunto de todas las trasformaciones cubrientes de $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ es*

$$\{\sigma(Q_1; Q_1) = Id_{\widetilde{X}}, \sigma(Q_1; Q_2), \sigma(Q_1; Q_3), \dots\}.$$

Demostración. Sean Q_1 y Q_2 puntos conjugados en $\widetilde{X}$. Para un punto cualquiera S_1 en $\widetilde{X}$ trazamos el camino $\widetilde{\gamma}_1$ que conecta a Q_1 y a S_1. Sea $\widetilde{\gamma}_2$ el camino conjugado de $\widetilde{\gamma}_1$ que inicia en el punto Q_2 y sea S_2 su punto terminal. Probaremos que el punto S_2 queda completamente determinado por S_1 y no depende de la elección del camino $\widetilde{\gamma}_1$.

Sea $\widetilde{\gamma}_1'$ otro camino de Q_1 a S_1 y sea $\widetilde{\gamma}_2'$ el camino conjugado de $\widetilde{\gamma}_1'$ que inicia en Q_2 y sea S_2' su punto final. Desde que $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ es regular y $\widetilde{\gamma}_1^{-1} * \widetilde{\gamma}_1'$ es un camino cerrado, su conjugado $\widetilde{\gamma}_2^{-1} * \widetilde{\gamma}_2'$ es también un camino cerrado, por tanto $S_2' = S_2$. Por tanto, S_2 es determinado por S_1.



Finalmente, definimos σ como la aplicación que envía todo punto S_1 en $\widetilde{X}$ en el punto S_2 de la construcción anterior. Se tiene que σ es una transformación cubriente satisfaciendo $\sigma(Q_1) = Q_2$. $\square$

El siguiente teorema nos da otras propiedades importantes de los cubrientes regulares

Teorema 1.7. *Si $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ es un cubriente regular entonces*

1. *$p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ es un subgrupo normal de $\pi(X, x_0)$.*
2. *$\pi(X, x_0)/p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ es isomorfo a Γ.*

Donde $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ y Γ es el grupo de trasformaciones de $p : \tilde{X} \longrightarrow X$.

2 Lazos topológicos

El objetivo central de este capítulo es definir y estudiar las propiedades de los lazos cubrientes para lazos topológicos. Dichas propiedades servirán para definir el lazo solenoidal y el grupo multiplicativo solenoidal. Las referencias principales para este capítulo son: [1], [10], [11] y [4].

2.1 Lazos topológicos

En esta sección estudiaremos la definición de lazo y sus propiedades. Iniciaremos con la definición de lazo de forma algebraica y sus elementos principales: sublazos, núcleos, centro, isotopismos y los grupos generados por las respectivas traslaciones. Luego se hará una breve descripción de los lazos topológicos. La referencia para esta sección es [4].

2.1.1 La estructura algebraica de lazo

Un magma es un conjunto no vacío G junto con una operación binaria interna $\cdot$, al cual denotaremos por $(G, \cdot)$.

Dado $(G, \cdot)$ un magma y $a \in G$ un elemento fijo, llamaremos traslaciones por la izquierda y traslaciones por la derecha a las funciones $L_a : G \to G$ y $R_a : G \to G$, respectivamente, definidas por

$$L_a(x) = a \cdot x \text{ y } R_a(x) = x \cdot a$$

para todo $x \in G$.

Un magma $(G, \cdot)$ se dice:

a) Conmutativo si $L_a = R_a$, para todo $a \in G$.

b) Asociativo si $R_{a \cdot b} = R_a \circ R_b$, para todo $a, b \in G$.

c) Tiene elemento identidad por la izquierda (derecha) $e \in G$, si $L_e : G \to G$ ($R_e : G \to G$) es la función identidad de G. También e es un elemento identidad de $(G, \cdot)$ si e es identidad por la izquierda y por la derecha.

Un magma $(G, \cdot)$ es llamado cuasigrupo si las funciones $L_a : G \to G$ y $R_a : G \to G$ son biyectivas para todo $a \in G$.

Proposición 2.1. *Un magma $(G, \cdot)$ es un cuasigrupo si y sólo si para todo $(a, b) \in G \times G$ existe un único $(x, y) \in G \times G$ tal que $a \cdot x = b$ y $y \cdot a = b$.*

Demostración. Que $L_a : G \to G$ sea biyectiva equivale a que la ecuación $a \cdot x = b$ tiene solución única. De manera similar, el hecho que la función $R_a : G \to G$ sea biyectiva equivale a que la ecuación $y \cdot a = b$ tiene solución única.

□

Si $(G,\cdot)$ es un cuasigrupo podemos definir dos nuevas operaciones binarias, $(\diagdown)$ y $(\diagup)$, sobre G por

$$x\diagdown y = L_x^{-1}(y) \text{ y } x\diagup y = R_y^{-1}(x),$$

para todo $x, y \in G$. Nótese que $x\diagdown y = z$ si y sólo sí $xz = y$, y que $x\diagup y = z$ si y sólo sí $zy = x$.

Definición 2.1. *Un magma $(L,\cdot)$ es un* lazo *si $(L,\cdot)$ es un cuasigrupo con elemento identidad.*

Utilizando las operaciones $(\diagdown)$ y $(\diagup)$ podemos dar la siguiente definición para lazo

Definición 2.2. *Un lazo $(L,\cdot,\diagup,\diagdown)$ es un conjunto L junto con tres operaciones binarias $\cdot$, $\diagup$, $\diagdown$ tales que*

1. *$a\cdot(a\diagdown b) = b$, $(b\diagup a)\cdot a = b$, para todo $a, b \in L$,*
2. *$a\diagdown(a\cdot b) = b$, $(b\cdot a)\diagup a = b$, para todo $a, b \in L$,*
3. *$a\diagdown a = b\diagup b$, para todo $a, b \in L$.*

Un lazo al igual que un grupo tiene subestructuras, una de ellas es la de sublazo. La definición de lazo no exige el axioma de asociatividad, por eso es necesario definir otras subestructuras como los núcleos: izquierdo, medio y derecho. En estos se encuentran los elementos del lazo que asocian por la izquierda, centro o derecha con todos los elementos del lazo. Se tiene también la estructura del centro de un lazo, que está formado por los elementos del lazo que conmutan y asocian con todos los elementos del lazo. A continuación definimos cada una de estas subestructuras:

Definición 2.3. *Sea $(L,\cdot)$ un lazo, un subconjunto H de L es un* sublazo *de $(L,\cdot)$ si $(H,\cdot)$ es un lazo.*

Definición 2.4. *Sea $(L,\cdot)$ un lazo. Definimos el* núcleo izquierdo *N_λ, el* núcleo medio *N_μ y el* núcleo derecho *N_ρ de $(L,\cdot)$ por*

$$N_\lambda = \{a \in L | a\cdot(x\cdot y) = (a\cdot x)\cdot y,\ x, y \in L\},$$

$$N_\mu = \{a \in L | (x\cdot a)\cdot y = x\cdot(a\cdot y),\ x, y \in L\},$$

$$N_\rho = \{a \in L | (x\cdot y)\cdot a = x\cdot(y\cdot a),\ x, y \in L\}.$$

El núcleo N del lazo $(L,\cdot)$ se define por $N = N_\lambda \cap N_\mu \cap N_\rho$.

Observación 2.1. *Si $(L,\cdot)$ es un lazo, los núcleos N_λ, N_μ, N_ρ y N son subgrupos de $(L,\cdot)$.*

Definición 2.5. *Sea $(L,\cdot)$ un lazo. El* centro *Z de $(L,\cdot)$ es dado por $Z = \{a \in N | L_a = R_a\}$, donde N es el núcleo de $(L,\cdot)$.*

Si $(L,\cdot)$ es un lazo, se tiene que:

1. N y Z son subgrupos de L.

2. Z es un subgrupo abeliano de L.

3. Z es un sublazo normal de L.

Observación 2.2. *Nos referiremos como subgrupos centrales a los subgrupos del centro Z.*

Otra subestructura importante es la de sublazo normal. Sea H un sublazo del lazo $(L, \cdot)$, H es llamado lazo normal si

$$xH = Hx, (xH)y = x(Hy) \text{ y } x(yH) = (xy)H.$$

2.1.2 Isotopismos de lazos

Una tripleta (α, β, γ) de biyecciones de un conjunto G sobre un conjunto H es llamado un isotopismo de un magma $(G, \cdot)$ sobre un magma $(H, \circ)$ si satisface $\gamma(x \cdot y) = \alpha(x) \circ \beta(y)$, para todo $x, y \in G$. $(H, \circ)$ es llamado un isótopo de $(G, \cdot)$ y los magmas $(G, \cdot)$ y $(H, \circ)$ son llamados isotópicos.

Una biyección $\theta : G \to H$ es un isomorfismo de $(G, \cdot)$ a $(H, \circ)$ si y sólo si (θ, θ, θ) es un isotopismo de $(G, \cdot)$ a $(H, \circ)$, por lo que magmas isomorfos son isotópicos. El recíproco no siempre es cierto, magmas isotópicos no son necesariamente isomorfos.

Si $G = H$ y la biyección γ es la aplicación identidad id, el isotopismo (α, β, id) es llamado *isotopismo principal.*

Ahora, sea $(G, \cdot)$ un cuasigrupo y f y g elementos cualesquiera en G, no necesariamente distintos. Desde que $(G, \cdot)$ es un cuasigrupo, las aplicaciones L_f y R_g son permutaciones del conjunto G. Se define la operación

$$x \circ y = R_g^{-1}(x) \cdot L_f^{-1}(y),$$

para todo $x, y \in G$. Se tiene que (R_g, L_f, i) es un isotopismo principal de $(G, \cdot)$ sobre $(G, \circ)$ y por tanto $(G, \circ)$ también es un cuasigrupo.

La construcción anterior permite deducir que todo cuasigrupo es isotópico a un lazo:

Teorema 2.1. *Sea $(G, \cdot)$ un cuasigrupo. Si $(H, *)$ es un lazo isotópico a $(G, \cdot)$, entonces existen $f, g \in G$ tales que $(H, *)$ es isomorfo a $(G, \circ)$ donde $x \circ y = R_g^{-1}(x) \cdot L_f^{-1}(y)$ para todo $x, y \in G$.*

Corolario 2.1. *Si $(G, \cdot)$ y $(H, *)$ son lazos isotópicos, entonces existen $f, g \in G$ tales que $(H, *)$ es isomorfo a $(G, \circ)$ donde $x \circ y = R_g^{-1}(x) \cdot L_f^{-1}(y)$ para todo $x, y \in G$.*

Corolario 2.2. *Si $(G, \cdot)$ y $(H, *)$ son lazos isotópicos y si $(G, \cdot)$ es un grupo, entonces $(G, \cdot)$ y $(H, *)$ son grupos isomorfos.*

Definición 2.6. *Sea $(G, \cdot)$ un lazo y $f, g \in G$. El lazo $(G, \circ)$ donde $x \circ y = R_g^{-1}(x) \cdot L_f^{-1}(y)$ para todo $x, y \in G$, es llamado $f, g-$ isótopo de $(G, \cdot)$.*

2.1.3 Grupo multiplicativo de un lazo

Si $(L, \cdot)$ es un lazo, las traslaciones izquierdas y derechas, L_a y R_a, son biyecciones para todo $a \in L$ y por tanto permutaciones en L. Denotamos por $S(L)$ el grupo simétrico de L, de todas las permutaciones en el conjunto L, entonces $L_a, L_a^{-1}, R_a, R_a^{-1}$ son elementos de $S(L)$. Estos elementos de $S(L)$ generan subgrupos, muy importantes en la teoría de lazos y lazos topológicos, que definimos a continuación.

Definición 2.7. *Para un lazo $(L, \cdot)$ definimos el* grupo multiplicativo izquierdo *$LMult(L)$, el* grupo multiplicativo derecho *$RMult(L)$ y el* grupo multiplicativo *$Mult(L)$ de $(L, \cdot)$ por*

$$LMult(L) = \langle \{L_a | a \in L\} \rangle,$$
$$RMult(L) = \langle \{R_a | a \in L\} \rangle,$$
$$Mult(L) = \langle \{L_a, R_a | a \in L\} \rangle.$$

Propiedades 2.1.

1. *Si $(L, \cdot)$ y $(H, *)$ son lazos isotópicos, $LMult(L) \cong LMult(H)$, $RMult(L) \cong RMult(H)$ y $Mult(L) \cong Mult(H)$.*
2. *Si G es un grupo abeliano, $LMult(G) \cong RMult(G) \cong Mult(G) \cong G$.*

En [14] encontramos una relación muy importante entre el grupo generado por las traslaciones izquierdas de un lazo L y el grupo generado por las traslaciones izquierdas del lazo cociente L/M, donde M es un subgrupo central de L. Este resultado será utilizado en la teoría de grupos cubrientes del grupo $G = LMult(L)$.

Proposición 2.2. *[14, Proposición 1.20] Sea L un lazo y M un subgrupo central de L. Si G es el grupo generado por las traslaciones izquierdas de L entonces el conjunto $M^* = \{L_m | m \in M\}$ es subgrupo normal de G y el grupo G' generado por las traslaciones izquierdas del lazo cociente L/M es isomorfo, como un grupo de permutaciones, al grupo cociente G/M^*.*

Demostración. Para $m, m_1 \in M$ se tiene $L_m^{-1} = L_{m^{-1}}$ y $L_m L_{m_1} = L_{mm_1}$, por ser M subgrupo. Así, M^* es un subgrupo de G. Ahora, sean $x \in L$ y $m \in M$ se tiene que $L_x L_m = L_{xm}$ y $L_m L_x = L_{mx}$ por ser M un subgrupo central. De lo anterior se deduce que $L_x M^* = M^* L_x$. Por tanto, M^* es subgrupo normal de G y la aplicación $G' \longrightarrow G/M^*$, $L_{xM} \longmapsto L_x M^*$ es un isomorfismo. □

2.1.4 Lazos topológicos

Un lazo topológico es un lazo L junto con una topología en L tal que las operaciones binarias $L \times L \to L$; $(x, y) \to xy, x/y, x\backslash y$ son todas continuas.

Sean L_1 y L_2 lazos topológicos, diremos que L_1 y L_2 son isotópicos si existen homeomorfismos $f, g, h : L_1 \to L_2$ tales que $f(xy) = g(x)h(y)$. La tripleta (f, g, h) es llamado un isotopismo de L_1 a L_2.

Un homomorfismo $f : L_1 \to L_2$ de lazos topológicos es un homomorfismo de lazos que además es continuo.

Proposición 2.3. *Sea $f : L_1 \to L_2$ un homomorfismo de lazos topológicos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es continua;*

2. *f es continua en cada punto x de L_1;*

3. *f es continua en e_1.*

Recordemos que para un espacio topológico X, una familia de filtros $\mathcal{U}(x)$, $x \in X$ es una colección de filtros de vecindarios con respecto a una topología si y sólo sí para cada $x \in X$ y cada $U \in \mathcal{U}(x)$ existe un $V \in \mathcal{U}(x)$ con $V \subseteq U$ y $U \in \mathcal{U}(v)$ para todo $v \in V$. Se deduce de la definición que si T es un homeomorfismo de X, entonces

$$T(\mathcal{U}(x)) = \{T(U) : U \in \mathcal{U}(x)\} = \mathcal{U}(T(x)).$$

Proposición 2.4. *Sea L un lazo topológico y $\mathcal{U} = \mathcal{U}(e)$, un filtro de vecindarios de la identidad. Entonces $\mathcal{U}$ satisface las siguientes condiciones*

1. *Para cada $U \in \mathcal{U}$ existe un $V \in \mathcal{U}$ con VV, $V \diagdown V$ y $V \diagup V \subseteq U$;*

2. *para todo $x \in L$, $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}x = x\mathcal{U}$.*

Observación 2.3. *Para nuestro estudio sobre el lazo topológico L tendremos la hipótesis general de que L es Hausdorff, compacto y conexo por caminos.*

Si L es un lazo topológico Hausdorff y compacto, los grupos $LMult(L)$, $RMult(L)$ y $Mult(L)$ son grupos topológicos vistos como subgrupos de $Homeo(L)$. Además, actúan por la izquierda sobre L, todo esto utilizando en $Homeo(L)$ la topología compacto abierta (Teorema 1.1) .

2.2 Lazos cubrientes

2.2.1 Propiedades básicas

A continuación se estudiarán algunas propiedades de espacios cubrientes para lazos topológicos probadas por Hofmann, K. H. en [10].

La primera propiedad es el levantamiento de la estructura del espacio base al espacio cubriente: si el espacio base es un magma (cuasigrupo, lazo o grupo) su espacio cubriente es también un magma (cuasigrupo, lazo o grupo).

Teorema 2.2. *Sea G una estructura topológica - algebraica con multiplicación continua $\cdot : G \times G \to G$, $(x, y) \longmapsto xy$. Si G es conexo, localmente conexo y localmente simplemente conexo entonces el espacio topológico $(\widetilde{G}, p)$ puede ser dotado de una operación continua $+ : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto \tilde{x} + \tilde{y}$ y p es un homomorfismo. Además, si G tiene elemento neutro e, $\widetilde{G}$ tiene un elemento neutro en $p^{-1}(e)$.*

Demostración. Sea e, en principio, un elemento arbitrario de G y sea $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$ un punto fijo. Como $\widetilde{G}$ es simplemente conexo el producto directo $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ es simplemente conexo. Ahora, definimos la aplicación $g : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto p(\tilde{x})p(\tilde{y})$. Nótese que g es continua, ya que es la composición de dos aplicaciones continuas. Por la Proposición 1.5 existe una aplicación continua $+ : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{G} \times \widetilde{G} \arrow[ur, "+"] \arrow[r, "g"] & G, \end{tikzcd}$$

esto es, $p(\tilde{x} + \tilde{y}) = p(\tilde{x})p(\tilde{y})$, con lo cual se prueba que p es un homomorfismo. Además, $+$ es continua desde que p y $\cdot$ lo son.

Ahora, si e es el elemento neutro en G, para la operación $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto \tilde{x} + \tilde{y}$ se tiene:

$$\begin{aligned} p(\tilde{e} + \tilde{e}) &= p(\tilde{e})p(\tilde{e}) \\ &= ee \\ &= e, \end{aligned}$$

por lo que $\tilde{e} + \tilde{e} \in p^{-1}(e)$, así $\tilde{e} + \tilde{e} = \tilde{e}$.

Definimos la aplicación continua $h : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$, $\tilde{x} \mapsto \tilde{x} + \tilde{e}$. Esta envía $\tilde{e} \mapsto \tilde{e}$ y además $h \circ p = p$ ya que $p(\tilde{x} + \tilde{e}) = p(x)$. Por lo que h es un levantamiento de p por sí misma.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{G} \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "p"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{G} \arrow[ur, "id_{\widetilde{G}}"] \arrow[r, "p"] & G \end{tikzcd}$$

La aplicación identidad en $\widetilde{G}$ es también un levantamiento de p por p y dado que el levantamiento es único se deduce que:

$$\tilde{x} + \tilde{e} = \tilde{x}, \text{ para todo } \tilde{x} \in \widetilde{G}.$$

De manera análoga se prueba que $\tilde{e} + \tilde{x} = \tilde{x}$, para todo $\tilde{x} \in \widetilde{G}$.

□

Corolario 2.3. *Sean L un lazo topológico y Q un espacio topológico. Sea $Q \xrightarrow{p} L$ un espacio cubriente de L. Asuma que Q es conexo y localmente conexo por caminos, entonces Q es un lazo topológico y p es un epimorfismo de lazos.*

Corolario 2.4. *Sea G un grupo topológico y asuma que el espacio subyacente de G admite un cubriente universal $p : \widetilde{G} \to G$. Entonces, para cada $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$ existe una única estructura de grupo sobre $\widetilde{G}$ con $\tilde{e}$ como elemento identidad y tal que p es un epimorfismo de grupos.*

El siguiente resultado es análogo a la teoría de espacios cubrientes, donde se da la relación del grupo de Poincaré del espacio y la fibra de la aplicación cubriente sobre el punto base.

Proposición 2.5. *Sea $(\widetilde{L}, p, \tilde{e})$ el lazo cubriente universal del lazo topológico L. El grupo de Poincaré de L es isomorfo a $\widetilde{H} = p^{-1}(e)$.*

Demostración. Sea $\tilde{a} \in \widetilde{H}$. Las traslaciones $L_{\tilde{a}}$ y $R_{\tilde{a}}$ son homeomorfismos de $\widetilde{L}$ que además satisfacen $p \circ R_{\tilde{a}} = p \circ L_{\tilde{a}} = p$, es decir, ambas son levantamientos de la aplicación $p : \widetilde{L} \to L$ y por tanto son iguales. Se tiene que $L_{\tilde{a}} = R_{\tilde{a}}$, para todo $\tilde{a} \in \widetilde{H}$.

Por otra parte, sea T un homeomorfismo del grupo de Poincaré y sean $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ elementos de $\widetilde{L}$ tales que $T(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Dado que $\widetilde{L}$ es un lazo, existen únicos $\tilde{a'}$ y $\tilde{a''} \in \widetilde{L}$ tales que:

$$\tilde{x} + \tilde{a'} = \tilde{y} \quad \text{y} \quad \tilde{a''} + \tilde{x} = \tilde{y}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} p(\tilde{x} + \tilde{a'}) &= p(\tilde{x})p(\tilde{a'}) = p(\tilde{y}) = p(T(\tilde{x})) = p(\tilde{x}), \text{ y} \\ p(\tilde{a''} + \tilde{x}) &= p(\tilde{a''})p(\tilde{x}) = p(\tilde{y}) = p(T(\tilde{x})) = p(\tilde{x}). \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $\tilde{a'}$ y $\tilde{a''}$ pertenecen a $\widetilde{H}$. Además, $R_{\tilde{a'}}$ y $L_{\tilde{a''}}$, elementos del grupo de Poincaré, ambas son iguales a T.

Evaluando en $\tilde{e}$ a T, $R_{\tilde{a'}}$ y $L_{\tilde{a''}}$ se obtiene que $\tilde{a'} = \tilde{a''}$. Por tanto, para cada elemento T en el grupo de Poincaré existe un único $\tilde{a}_T \in \widetilde{H}$, tal que

$$R_{\tilde{a}_T} = L_{\tilde{a}_T} = T.$$

Ahora, sean $\tilde{a}$, $\tilde{b} \in \widetilde{H}$. Existe un único $\tilde{c} \in \widetilde{H}$ tal que $R_{\tilde{b}} \circ R_{\tilde{a}} = R_{\tilde{c}}$, evaluando en $\tilde{e}$ se tiene:

$$\begin{aligned} R_{\tilde{c}}(\tilde{e}) = \tilde{c} &= R_{\tilde{b}} R_{\tilde{a}}(\tilde{e}) \\ &= \tilde{a} + \tilde{b}. \end{aligned}$$

Definimos la aplicación $\Psi : \widetilde{H} \longrightarrow \Gamma$, $\tilde{a} \longmapsto R_{\tilde{a}}$. Ψ es un homomorfismo de grupos ya que:

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{a} + \tilde{b}) &= R_{\tilde{a}+\tilde{b}} \\ &= R_{\tilde{a}} \circ R_{\tilde{b}} \\ &= \Psi(\tilde{a}) \circ \Psi(\tilde{b}) \end{aligned}$$

Dado que para todo $T \in \Gamma$ existe un único $\tilde{a}_T \in \widetilde{H}$ tal que $T = R_{\tilde{a}_T}$, el homomorfismo Ψ es un isomorfismo. □

Observación 2.4. *El papel de $\widetilde{H}$ para el resto del trabajo es muy importante, $\widetilde{H}$ es un subgrupo central discreto de $\widetilde{L}$ ([10, Proposiciones 1.2 y 5.12]), esto es otra forma de deducir que el grupo fundamental de un lazo topológico es abeliano. Este hecho junto con el siguiente teorema y los subgrupos de $\widetilde{H}$ nos permitirá construir lo que más adelante definiremos como el lazo solenoidal.*

Teorema 2.3. *Sea L un lazo topológico, conexo y localmente conexo. Sea H un subgrupo normal discreto de L. Sea $\mathfrak{h}$ el homomorfismo asociado con H como núcleo. Entonces $(L, \mathfrak{h})$ es un lazo cubriente para L/H. Si L es simplemente conexo, $(L, \mathfrak{h})$ es el lazo cubriente universal de L/H y H es isomorfo al grupo de Poincaré de L/H.*

Demostración. Nótese que $\mathfrak{h}$ es continua ya que en L/H estamos tomando la topología cociente. Además, al ser H normal, H está contenido en el centro de L ([10, Proposición 5.12]).

Ahora, sea $x' \in L/H$, entonces $x' = xH$ con $x \in L$. Al ser H discreto, el conjunto xH es también discreto.

Sea $U \in \mathcal{U}(e)$ elegido tal que $(U \diagdown U) \cap H = \{e\}$, esto implica que $U \cap H = \{e\}$ ya que de lo contrario si $a \in U \cap H$, $a \neq e$, entonces de la igualdad $ea = a$ se deduce que $a \in U \diagdown U$ y $(U \diagdown U) \cap H \neq \{e\}$. Se tiene que $U' = \mathfrak{h}(U)$ es homeomorfo a U ya que si para $x, y \in U$ si $\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{h}(y)$ implica que $x = yt$ con $t \in H$, por lo que $t \in (U \diagdown U) \cap H = \{e\}$ y $x = y$.

Sean x_1 y x_2 puntos distintos en xH, $x_n = xh_n$ con $h_n \in H$ para $n = 1, 2$. Probaremos que $Ux_1 \cap Ux_2 = \emptyset$. Por contradicción, supongamos que $Ux_1 \cap Ux_2 \neq \emptyset$. Como H está contenido en el centro de L se tiene

$$U(xh_1) \cap U(xh_2) = (Ux)h_1 \cap (Ux)h_2 \neq \emptyset,$$

o equivalentemente,

$$Ux \cap (Ux)h_3 = Ux \cap (Uh_3)x \neq \emptyset,$$

donde $h_3 = h_2 h_1^{-1} \in H$. Es decir, existe $a, b \in U$ tales que $ax = (bh_3)x$, simplificando $a = bh_3$, entonces $h_3 \in (U \diagdown U) \cap H = \{e\}$. Esto último implica que $h_1 = h_2$.
Entonces, para $xH \in L/H$ existe el abierto $V = \bigcup_{x_i \in xH} U'\mathfrak{h}(x_i)$ y tal que $\mathfrak{h}^{-1}(V) = \bigcup Ux_i$ y $\mathfrak{h}$ es un homomorfismo cubriente. □

2.2.2 Propiedades de lavantamiento y cubrientes de lazos

A continuación enunciaremos y demostraremos propiedades de levantamiento que también se verifican para lazos topológicos que serán de utilidad para las siguientes secciones.

Dado $(L, e, \cdot)$ un lazo topológico con operación continua $\cdot : L \times L \longrightarrow L$. La operación $\cdot$ induce una operación sobre las clases de homotopía de lazos basados en e:

$$\bullet : \pi_1(L, e) \times \pi_1(L, e) \longrightarrow \pi_1(L, e)$$

$$([\gamma_1], [\gamma_2]) \longmapsto [\gamma_1 \cdot \gamma_2],$$

donde $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ es el lazo definido por $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) := \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$, para $0 \leq t \leq 1$.
La operación está bien definida, en efecto, si $\gamma_1 \simeq_F \gamma_1'$ y $\gamma_2 \simeq_G \gamma_2'$ entonces $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \simeq_H \gamma_1' \cdot \gamma_2'$ donde $H(x, t) = F(x, t) \cdot G(x, t)$. Además, con esta operación las clases de homotopía de lazos basados en e tiene estructura de lazo.

Esta observación nos permite demostrar la primera propiedad de levantamiento de homomorfismos de lazos:

Proposición 2.6 (**Levantamiento de homomorfismos de lazos**). *Sean L, L' lazos topológicos y $Q \xrightarrow{p} L$ un lazo cubriente para L. Si $f : (L', e') \to (L, e)$ es un homomorfismo de lazos, entonces existe un único homomorfismo $\tilde{f}$ de levantamiento si y sólo si:*

$$f_*(\pi_1(L', e')) \subset p_*(\pi_1(Q, \tilde{e})).$$

Demostración. Por las Proposiciones 1.4 y 1.5, existe el levantamiento $\tilde{f}$ y además es único. Para completar la demostración debemos probar que $\tilde{f}$ es un homomorfismo de lazos.

Definimos la función continua $h : L' \times L' \longrightarrow L$, $(x', y') \longmapsto f(x')f(y')$. Esta función admite un levantamiento por $Q \xrightarrow{p} L$ ya que $h_*(\pi_1(L' \times L')) \subset p_*(\pi_1(Q, \tilde{e}))$, en efecto, identificando $\pi_1(L' \times L')$ con $\pi_1(L') \times \pi_1(L')$, tenemos que para $([\gamma_1], [\gamma_2])$, con γ_i lazos basados en e':

$$\begin{aligned} h_*([\gamma_1], [\gamma_2]) &= [f(\gamma_1) \cdot f(\gamma_2)] \\ &= [f(\gamma_1 \cdot \gamma_2)] \in f_*(\pi_1(L', e')) \subset p_*(\pi_1(Q, \tilde{e})) \end{aligned}$$

Ahora, definimos las aplicaciones continuas $\psi : L' \times L' \longrightarrow Q$, $(x', y') \longmapsto \tilde{f}(x'y')$ y $\phi : L' \times L' \longrightarrow Q$, $(x', y') \longmapsto \tilde{f}(x')\tilde{f}(y')$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} p(\psi(x', y')) &= p(\tilde{f}(x'y')) = f(x'y') = f(x')f(y'), \text{ y} \\ p(\phi(x', y')) &= p(\tilde{f}(x')\tilde{f}(y')) = p(\tilde{f}(x'))p(\tilde{f}(y')) = f(x')f(y'). \end{aligned}$$

Se observa que ψ y ϕ son levantamientos de la función h, y dado que el levantamiento es único $\psi = \phi$ y por tanto $\tilde{f}$ es un homomorfismo de lazos. □

Corolario 2.5. *Si $(\widetilde{L}, p)$ es el lazo cubriente universal para el lazo topológico L y (Q, q) es un lazo cubriente para L, entonces existe un homomorfismo de lazos topológicos*

$$\tilde{p} : \widetilde{L} \longrightarrow Q,$$

tal que $(\widetilde{L}, \tilde{p})$ es un lazo cubriente para el lazo topológico Q.

Demostración. Como $\widetilde{L}$ es el lazo cubriente universal, se tiene $\pi_1(\widetilde{L}, \tilde{e}) = 0$. En el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "q"] \\ \widetilde{L} \arrow[ur, "\tilde{p}"] \arrow[r, "p"] & L \end{tikzcd}$$

desde que $p_*(\pi_1(\widetilde{L}, \tilde{e})) = 0 \in q_*(\pi_1(Q, e'))$, por la Proposición 2.6 tenemos que existe un único homomorfismo de lazos $\tilde{p} : (\widetilde{L}, \tilde{e}) \longrightarrow (Q, e')$ tal que $q \circ \tilde{p} = p$ y por tanto $\tilde{p}$ es un homomorfismo cubriente de lazos y $(\widetilde{L}, \tilde{p})$ es un lazo cubriente para Q. □

Proposición 2.7. *Sean (Q_1, p_1) y (Q_2, p_2) lazos cubrientes para el lazo topológico (L, e). Todo homomorfismo cubriente h de (Q_1, p_1) a (Q_2, p_2) es un homomorfismo de lazos topológicos.*

Demostración. Si h es un homomorfismo cubriente de (Q_1, p_1) a (Q_2, p_2) , entonces (Q_1, h) es un espacio cubriente para Q_2 de donde se sigue que h es un homomorfismo de lazos. □

2.2.3 Construcción de torres de lazos cubrientes

Los siguientes resultados son clásicos en la teoría de espacios cubrientes. Probaremos que también se cumplen cuando el cubriente tiene estructura de lazo topológico.

Proposición 2.8. *Sea $(\widetilde{L}, p)$ el lazo cubriente universal del lazo topológico (L, e). Si K es subgrupo de $\widetilde{H} = p^{-1}(e)$, entonces el lazo cociente $\widetilde{L}/K$ es un lazo cubriente de L. Además, todo lazo cubriente de L es isomorfo al lazo cociente $\widetilde{L}/K$, con K un subgrupo de $\widetilde{H}$.*

Demostración. Si K es subgrupo de $\widetilde{H} \cong \pi_1(L, e)$, entonces K es un subgrupo central discreto de $\widetilde{L}$ y por el Teorema 2.3, $(\widetilde{L}, h_K)$ es un lazo cubriente de $\widetilde{L}/K$ y $\pi_1(\widetilde{L}/K, K) \cong K$. Ahora, definimos $p_K : \widetilde{L}/K \longrightarrow L$, por $p_K(\tilde{x}K) = p(\tilde{x})$. La aplicación p_K está bien definida, en efecto, si $\tilde{x}K = \tilde{y}K$ entonces $\tilde{x} = \tilde{y}k$ con $k \in K$ por lo que $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})p(k) = p(\tilde{y})$. La sobreyectividad de p_K se deduce de la sobreyectividad de p. Además, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{L} \arrow[dl, "h_K"'] \arrow[dd, "p"] \\
\widetilde{L}/K \arrow[dr, "p_K"'] & \\
 & L
\end{tikzcd}$$

Que p_K sea una aplicación cubriente se deduce del hecho que p y h_K lo son y que h_K es abierta. Por tanto, $(\widetilde{L}/K, p_K)$ es un lazo cubriente de L.

Sea (Q, q) un lazo cubriente para L. Tomamos $K = q_*(\pi_1(Q, e'))$, entonces (Q, q) es isomorfo a $(\widetilde{L}/K, p_K)$ ya que $q_*(\pi_1(Q, e')) = K = p_{K*}(\pi_1(\widetilde{L}/K, K))$.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "q"'] & & \widetilde{L}/K \arrow[dl, "p_K"] \\
 & L &
\end{tikzcd}$$

□

Para cada lazo cubriente $(\widetilde{L}/K, p_K)$ podemos establecer un resultado similar a la Proposición 2.5:

Proposición 2.9. *Sea K un subgrupo central discreto de $\widetilde{H}$ y $(\widetilde{L}/K, p_K)$ el respectivo lazo cubriente. Sea Γ_K el grupo de transformaciones cubrientes de $p_K : \widetilde{L}/K \to L$ entonces $\Gamma_K \cong \widetilde{H}/K$.*

Demostración. Sea $\tilde{a}K \in \widetilde{H}/K$, las traslaciones $L_{\tilde{a}K}$ y $R_{\tilde{a}K}$ son homeomorfismos de $\widetilde{L}/K$. Nótese que $p_K \circ L_{\tilde{a}K} = p_K = R_{\tilde{a}K} \circ p_K$, en efecto

$$\begin{aligned} p_K \circ L_{\tilde{a}K}(\tilde{x}K) &= p_K(\tilde{a}\tilde{x}K) \\ &= p(\tilde{a}\tilde{x}) \\ &= p(\tilde{a})p(\tilde{x}) \\ &= p(\tilde{x}) \\ &= p_K(\tilde{x}K) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p_K \circ R_{\tilde{a}K}(\tilde{x}K) &= p_K(\tilde{x}\tilde{a}K) \\ &= p(\tilde{x}\tilde{a}) \\ &= p(\tilde{x})p(\tilde{a}) \\ &= p(\tilde{x}) \\ &= p_K(\tilde{x}K) \end{aligned}$$

Ambas, $L_{\tilde{a}K}$ y $R_{\tilde{a}K}$, son levantamientos de p_K y por la unicidad de este se tiene $L_{\tilde{a}K} = R_{\tilde{a}K}$, para todo $\tilde{a}K \in \widetilde{L}/K$.

Ahora, sea $\sigma \in \Gamma_K$ y $\tilde{x}K$, $\tilde{y}K$ elementos de $\widetilde{L}/K$ tales que $\sigma(\tilde{x}K) = \tilde{y}K$. Entonces $p_K(\tilde{y}K) = p_K(\sigma(\tilde{x}K)) = p_K(\tilde{x}K) = p(\tilde{x})$.

Por ser $\widetilde{L}/K$ un lazo existen únicos $\tilde{a}K$ y $\tilde{a}'K$ en $\widetilde{L}/K$ tales que

$$(\tilde{x}K)(\tilde{a}K) = \tilde{y}K \quad \text{y} \quad (\tilde{a}'K)(\tilde{x}K) = \tilde{y}K.$$

Se tiene que $p_K(\tilde{x}K \cdot \tilde{a}K) = p_K(\tilde{x}\tilde{a}K) = p_K(\tilde{y}K)$, de donde se deduce que

$$p(\tilde{x})p(\tilde{a}) = p(\tilde{x}).$$

Así, $\tilde{a} \in \widetilde{H}$ por lo que $\tilde{a}K \in \widetilde{H}/K$. De manera similar se prueba que $\tilde{a}'K \in \widetilde{H}/K$. Como $L_{\tilde{a}K}$ y $R_{\tilde{a}'K}$ son elementos de Γ_K y además satisfacen $R_{\tilde{a}K}(\tilde{x}K) = \tilde{y}K$ y $L_{\tilde{a}'K}(\tilde{x}K) = \tilde{y}K$,

$$\sigma = R_{\tilde{a}K} = L_{\tilde{a}'K}.$$

Evaluando en $\tilde{e}K$ a σ, se deduce que $\tilde{a}K = \tilde{a}'K$. Por tanto, para cada $\sigma \in \Gamma_K$ existe un único $\tilde{a}K \in \widetilde{H}/K$ tal que $\sigma = L_{\tilde{a}K}$.

Definimos la aplicación $\phi_K : \widetilde{H}/K \longrightarrow \Gamma_K$, $\tilde{a}K \longmapsto L_{\tilde{a}K}$. Desde que $L_{\tilde{a}K} \circ L_{\tilde{b}K} = L_{\tilde{a}\tilde{b}K}$, para todo $\tilde{a}K$, $\tilde{b}K \in \widetilde{H}/K$, ϕ_K es un homomorfismo de grupos. Y dado que para todo $\sigma \in \Gamma_K$ existe un único $\tilde{a}K \in \widetilde{H}/K$ con $\sigma = L_{\tilde{a}K}$, se concluye que ϕ_K es un isomorfismo de grupos. □

Bajo la hipótesis general dada en la Observación 2.4 y las hipótesis del Teorema 2.2, $\pi_1(L, e)$ es un grupo abeliano finitamente generado (ver [15, Lema 10.1.9 (b)]) y por consecuencia $\widetilde{H}$ es también un grupo abeliano finitamente generado. Entonces todo subgrupo K de $\widetilde{H}$ es también finitamente generado. Además, $\widetilde{H}/K$ es finito si y sólo si $\widetilde{H}$ y K son de igual rango.

Proposición 2.10. *Sea K subgrupo central discreto de $\widetilde{H} = p^{-1}(e)$ y $p_K : \widetilde{L}/K \to L$. Se tiene que:*

1. *$\widetilde{H}/K$ es finito si y sólo si el rango de K es igual al rango de $\widetilde{H}$.*
2. *$p_K^{-1}(e) = \widetilde{H}/K$.*

Demostración. 1. Se deduce de lo anterior.

2. Sea $\tilde{x}K \in p_K^{-1}(e)$, $p_K(\tilde{x}K) = p(\tilde{x}) = e$, entonces $\tilde{x} \in \widetilde{H}$, por lo que $\tilde{x}K \in \widetilde{H}/K$. Claramente, si $\tilde{x}K \in \widetilde{H}/K$, entonces $\tilde{x}K \in p_K^{-1}(e)$.

□

2.3 Completaciones profinitas

Sea $(\widetilde{L}, p)$ el lazo cubriente universal del lazo topológico L, $\widetilde{H} = p^{-1}(e)$ y Γ el grupo de transformaciones cubrientes de $p : \widetilde{L} \to L$. Recordemos que $\widetilde{H}$ es un grupo central discreto de $\widetilde{L}$, esto es, todos los elementos de $\widetilde{H}$ conmutan y asocian con todos los elementos de $\widetilde{L}$. Además, por la Proposición 2.5 $\widetilde{H} \cong \Gamma$ y por tanto $\widetilde{H} \cong \pi_1(L, e)$. Sobre el conjunto $\mathcal{S}$ de los subgrupos centrales discretos de $\widetilde{H}$ y de igual rango que $\widetilde{H}$, definimos la relación $H \leq K$ si y sólo sí $K \subset H$. Resulta que $(\mathcal{S}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Además, suponemos que $\bigcap_{H \in \mathcal{S}} H = \{\tilde{e}\}$.

2.3.1 La completación profinita del grupo fundamental

Como $\widetilde{H}$ es un subgrupo abeliano de $\widetilde{L}$, $\widetilde{H}$ es un grupo topológico abeliano con la topología subespacio. También, para H subgrupo de $\widetilde{H}$, $\widetilde{H}/H$ es un grupo topológico abeliano respecto a la topología cociente. Además, $\widetilde{H}/H$ es compacto por ser finito. Finalmente, desde que los grupos cocientes $\widetilde{H}/H$ son finitos, podemos dotar a cada $\widetilde{H}/H$ con la topología discreta. En resumen, los grupos $\widetilde{H}/H$ son grupos topológicos abelianos, totalmente disconexos y compactos.

Para $H, K \in \mathcal{S}$, con $H \leq K$, definimos la aplicación $\nu_{HK} : \widetilde{H}/K \longrightarrow \widetilde{H}/H$, $\tilde{x}K \longmapsto \tilde{x}H$. Claramente las aplicaciones ν_{HK} son homomorfismos de grupos. Además, si $H \leq K \leq J$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{H}/J \arrow[dl, "\nu_{KJ}"'] \arrow[dr, "\nu_{HJ}"] & \\
\widetilde{H}/K \arrow[rr, "\nu_{HK}"'] & & \widetilde{H}/H
\end{tikzcd}$$

Se tiene que $\{\widetilde{H}/K; \nu_{HK}\}$ es un sistema proyectivo de grupos abelianos compactos.

De acuerdo con [20, Proposición 1.1.4], sea $C_{\widetilde{H}} = \prod_{H \in \mathcal{S}} \widetilde{H}/H$ entonces $(\widehat{H}, \mu_K)$ es el limíte proyectivo de $\{\widetilde{H}/K; \nu_{HK}\}$ con $\widehat{H} := \{c \in C_{\widetilde{H}} | \nu_{HK}\pi_K(c) = \pi_H(c)\}$, donde π_H es la proyección $C \to \widetilde{H}/H$, y $\nu_H = \pi_H|_{\widehat{H}}$.

Comenzaremos por estudiar las propiedades topológicas de $\widehat{H}$.

Proposición 2.11. *Sea $\nu_H : \widehat{H} \to \widetilde{H}/H$ la respectiva proyección para cada $H \in \mathcal{S}$. Los conjuntos $\nu_H^{-1}(V_H)$, con V_H abierto de $\widetilde{H}/H$, forman una base para la topología de $\widehat{H}$.*

Demostración. La topología en $C_{\widetilde{H}}$ es la topología producto, sus abiertos tienen la forma $\bigcap\limits_{H \in \mathcal{S}} \pi_H^{-1}(V_H)$, con V_H abierto de $\widetilde{H}/H$. Los abiertos de $\widehat{H}$, con la topología de subespacio, son unión de abiertos de la forma

$$W = \widehat{H} \cap \pi_{H_{i_1}}^{-1}(V_{H_{i_1}}) \cap \pi_{H_{i_2}}^{-1}(V_{H_{i_2}}) \cap \cdots \cap \pi_{H_{i_n}}^{-1}(V_{H_{i_n}}),$$

con $H_{i_j} \in \mathcal{S}$, $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$.

Sea $(x_H H)_{H\in\mathcal{S}} \in W$, debemos encontrar un abierto V_K de $\widetilde{H}/K$ tal que $(x_H H)_{H\in\mathcal{S}} \in \nu_K^{-1}(V_K)$ y $\nu_K^{-1}(V_K) \subset W$.

Desde que $\mathcal{S}$ es un conjunto parcialmente ordenado existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $H_m \geq H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_n}$. Como las aplicaciones $\nu_{H_{i_j}H_m}$ son continuas, $\nu_{H_{i_j}H_m}^{-1}(V_{i_j})$ es abierto de $\widetilde{H}/H_m$. Además, $x_{H_m}H_m \in \nu_{H_{i_j}H_m}^{-1}(V_{H_{i_j}})$ ya que

$$\begin{aligned}
\nu_{H_{i_j}H_m}(x_{H_m}H_m) &= \nu_{H_{i_j}H_m}\pi_{H_m}((x_H H)) \\
&= \pi_{H_{i_j}}((x_H H)) \in V_{H_{i_j}} \\
&= x_{H_{i_j}}H_{i_j}
\end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, n$.

Definimos $V := \bigcap_{j=1}^{n} \nu_{H_{i_j}H_m}^{-1}(V_{H_{i_j}})$, V contiene a $x_{H_m}H_m$ por lo que $\nu_{H_m}^{-1}(V)$ es una vencidad abierta de $(x_H H)_{H\in\mathcal{S}}$ en $\widehat{H}$.

Sea $(y_H H)_{H\in\mathcal{S}} \in \nu_{H_m}^{-1}(V)$ entonces $y_{H_m}H_m \in V$ por lo que $y_{H_{i_r}}H_{i_r} = \nu_{H_{i_r}H_m}(y_{H_m}H_m)$ para $r = 1, \ldots, n$. Así, $\nu_{H_m}^{-1}(V) \subset W$. $\square$

Ahora, sea $i : \widetilde{H} \to C_{\widetilde{H}}$, $\tilde{x} \mapsto (\tilde{x}H)_{H\in\mathcal{S}}$ inducida por la proyección $\widetilde{H} \to \widetilde{H}/H$ en cada componente. Se tiene que $i(\widetilde{H}) \subset \widehat{H}$, en efecto, para $\tilde{x} \in \widetilde{H}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\nu_{HK}\pi_k((\tilde{x}H)_{H\in\mathcal{S}}) &= \nu_{HK}(\tilde{x}K) \\
&= \tilde{x}H \\
&= \pi_H((\tilde{x}H)_{H\in\mathcal{S}})
\end{aligned}$$

Denotamos $\tilde{i} : \widetilde{H} \to \widehat{H}$, la aplicación inducida por i. El homomorfismo $\tilde{i}$ es continuo desde que la composición $\nu_H \circ \tilde{i}$ es continua (por ser una proyección) y ν_H continua.

Verifiquemos que $\tilde{i}$ es inyectiva. Sea $\tilde{x} \in \ker \tilde{i}$, entonces $\tilde{x} \in H$ para todo $H \in \mathcal{S}$, por lo que $\tilde{x} \in \bigcap_{H\in\mathcal{S}} H = \{\tilde{e}\}$, por lo que $\ker \tilde{i} = \{\tilde{e}\}$.

Finalmente, para todo $H \in \mathcal{S}$, $\nu_H(\tilde{i}(\widetilde{H})) = \widetilde{H}/H$, entonces para cualquier abierto V_H de $\widetilde{H}/H$

$$\nu_H(\tilde{i}(\widetilde{H})) \cap V_H \neq \emptyset,$$

y por tanto, $\tilde{i}(\widetilde{H}) \cap \nu_H^{-1}(V_K) \neq \emptyset$. Se ha probado que:

Proposición 2.12. *$\tilde{i}(\widetilde{H})$ es denso en $\widehat{H}$.*

Sabemos que cada uno de los $\widetilde{H}/H$ son Hausdorff y totalmente disconexos por tanto su producto cartesiano $C_{\widetilde{H}}$ también lo es. Así, $\widehat{H}$ es Hausdorff y totalmente disconexo. Por otra parte, los $\widetilde{H}/H$ son compactos entonces $C_{\widetilde{H}}$ es compacto. Para que $\widehat{H}$ sea compacto debemos probar que es cerrado en $C_{\widetilde{H}}$. Sea $(x_H H)_{H\in\mathcal{S}} \in C_{\widetilde{H}} - \widehat{H}$ entonces existen $H, K \in \mathcal{S}$ con $H \leq K$ tales que $\nu_{HK}(x_K K) \neq x_H H$. Por ser $\widetilde{H}/H$ Hausdorff existen vecindarios de U y V de $\nu_{HK}(x_K K)$ y $x_H H$, respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$. Como ν_{HK} es continua existe un abierto W de $\widetilde{H}/H$ tal que $\nu_{HK}(W) \subseteq U$, y por tanto $\nu_{HK}(W) \cap V = \emptyset$. Entonces el abierto $W \times V \times \prod_{H'\in\mathcal{S}-\{H,K\}} \widetilde{H}/H'$ es un vecindario de $(x_H H)_{H\in\mathcal{S}}$ contenido en $C_{\widetilde{H}}\ \widehat{H}$. Así, $C_{\widetilde{H}} - \widehat{H}$ es abierto y por tanto $\widehat{H}$ es cerrado.

Finalmente, desde que cada uno de los $\widetilde{H}/H$ es un grupo topológico, se induce una multiplicación en $\widehat{H}$ componente a componente: sean $(a_H H)$, $(b_H H)$ elementos de $\widehat{H}$, definimos $(a_H H) *_{\widehat{H}} (b_H H) := (a_H *_H b_H H)$. La operación es cerrada, en efecto:

$$\begin{aligned}
\nu_{HK}(a_K *_K b_K K) &= \nu_{HK}(a_K K * b_K K) \\
&= \nu_{HK}(a_K K) * \nu_{HK}(b_K K) \\
&= a_H H * b_H H \\
&= a_H *_H b_H H.
\end{aligned}$$

La operación $*_{\widehat{H}}$ dota a $\widehat{H}$ de estructura de grupo: el elemento identidad es $(eH)_{H\in\mathcal{S}}$, el inverso de $(a_H H)$ es el elemento $(a_H^{-1} H)$ y la asociatividad se deduce de la asociatividad componente a componente. Definimos la aplicación $m_{\widehat{H}} : \widehat{H} \times \widehat{H} \to \widehat{H}$, $((a_H H), (b_H H)) \longmapsto (a_H *_H b_H H)$. La continuidad de $m_{\widehat{H}}$ se deduce de la continuidad de las aplicaciones $m_{\widetilde{H}/H} : \widetilde{H}/H \times \widetilde{H}/H \longrightarrow \widetilde{H}/H$, $(aH, bH) \longmapsto a *_H bH$.

En resumen, tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.4. *$\widehat{H}$ un grupo topológico compacto, perfecto y totalmente disconexo.*

2.3.2 La completación profinita de Γ

Sea $K \in \mathcal{S}$, para la aplicación cubriente $p_K : \widetilde{L}/K \to L$ denotamos por Γ_K su grupo de transformaciones cubriente, es decir:

$$\Gamma_K = \{\sigma : \widetilde{L}/K \to \widetilde{L}/K, \text{ homeomorfismo } | p_K\sigma = p_K\}.$$

Por la Proposición 2.9 el grupo Γ_K es isomorfo a $\widetilde{H}/K$. Denotamos por $Q_K = \widetilde{H}/K$ y sea ϕ_K el isomorfismo de Q_K sobre el grupo de transformación Γ_K.

Recordemos que Γ_K es subgrupo del grupo de homeomorfismos de $\widetilde{L}/K$, el cual es un grupo topológico con la topología compacto abierta. Por tanto Γ_K es un grupo topológico. Pero además, Γ_K es abeliano y finito así que Γ_K es compacto. Podemos considerar en cada Γ_K la topología discreta.

Ahora, para $H \leq K$, definimos la aplicación $\mu_{HK} : \Gamma_K \to \Gamma_H$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_H & \Gamma_K \arrow[l, "\mu_{HK}"'] \\
Q_H \arrow[u, "\phi_H"] & Q_K \arrow[l, "\nu_{HK}"] \arrow[u, "\phi_K"']
\end{tikzcd},$$

esto es, $\phi_H \nu_{HK} = \mu_{HK} \phi_K$.

Nótese que si $\sigma \in \Gamma_K$, existe un único $\tilde{a}K \in \widetilde{H}/K$ tal que $\sigma = L_{\tilde{a}K}$. De la conmutatividad del diagrama se deduce que para todo H, K con $H \leq K$:

$$\begin{aligned}
\mu_{HK}(\sigma) &= \mu_{HK}(L_{\tilde{a}K}) \\
&= \phi_H \nu_{HK} \phi^{-1}(L_{\tilde{a}K}) \\
&= L_{\tilde{a}H}.
\end{aligned}$$

Por lo que $\mu_{HK} : \Gamma_K \longrightarrow \Gamma_H$, $L_{\tilde{a}K} \longmapsto L_{\tilde{a}H}$.

Para $H \leq K \leq J$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma_J \arrow[dl, "\mu_{KJ}"'] \arrow[dr, "\mu_{HJ}"] & \\
\Gamma_K \arrow[rr, "\mu_{HK}"'] & & \Gamma_H
\end{tikzcd}$$

Así, $\{\Gamma_H, \mu_{HK}\}_{H \in \mathcal{S}}$ es un sistema proyectivo. Escribimos $\widehat{\Gamma} = \varprojlim \{\Gamma_H, \mu_{HK}\}_{H \in \mathcal{S}}$.

Denotando por $C_\Gamma = \prod_{H \in \mathcal{S}} \Gamma_H$ se tiene que $\widehat{\Gamma} = \{c \in C_{\widetilde{\Gamma}} | \mu_{HK} \pi_K(c) = \pi_H(c)\}$, donde π_H es la proyección $C_\Gamma \to \Gamma_H$, y $\mu_H = \pi_H|_{\widehat{\Gamma}}$.

Análoga a la Proposición 2.11 tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.13.
Los conjuntos $\mu_H^{-1}(W_H)$ con $H \in \mathcal{S}$ y W_H abierto de Γ_H forman una base para la topología de $\widehat{\Gamma}$.

En el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\dots & \Gamma_H \arrow[l] & \Gamma_K \arrow[l, "\mu_{HK}"'] & \dots \arrow[l] \\
\dots & Q_H \arrow[l] \arrow[u, "\phi_H"] & Q_K \arrow[l, "\nu_{HK}"] \arrow[u, "\phi_K"'] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd},$$

las aplicaciones ϕ_K son isomorfismos, estos inducen un isomorfismo de límites proyectivos $\phi : \widehat{H} \longrightarrow \widehat{\Gamma}$. Del hecho que los límites $\widehat{H}$ y $\widehat{\Gamma}$ sean isomorfos $\widehat{\Gamma}$ cumple las mismas propiedades demostradas anteriormente para $\widehat{H}$.

En el siguiente capítulo estudiaremos como actúa $\widehat{\Gamma}$ sobre el lazo solenoidal

3 El lazo solenoidal universal

En este capítulo haremos la construcción de los dos objetos importantes de este trabajo: el lazo solenoidal universal y el grupo multiplicativo solenoidal. Cabe recalcar que a pesar de no tener asociatividad en general éstas construcciones son posibles por el hecho que $\widetilde{H}$ es un subgrupo central discreto de $\widetilde{L}$. Además, la relación entre los grupos multiplicativos de cada lazo subcubriente de L y los grupos subcubrientes de $G = LMultL$ nos permite deducir la relación entre los dos objetos universales construidos.

3.1 El lazo solenoidal universal $\mathcal{L}$

Sean H y K en $\mathcal{S}$ tal que $H \leq K$. Como H y K son subgrupos centrales discretos de $\widetilde{H}$, $\widetilde{L}/H$ y $\widetilde{L}/K$ son lazos cubrientes para L. Definimos la aplicación $p_{HK} : \widetilde{L}/K \to \widetilde{L}/H$ tal que el siguiente diagrama conmuta (existe y es única por la propiedad de levantamiento de funciones).

$$\begin{tikzcd} \widetilde{L}/K \arrow[rr, "p_{HK}"] \arrow[dr, "p_K"'] & & \widetilde{L}/H \arrow[dl, "p_H"] \\ & L & \end{tikzcd},$$

es decir $p_K = p_H \circ p_{HK}$. Por la unicidad de p_{HK} se deduce que $p_{HK}(\tilde{x}K) = \tilde{x}H$, para todo $\tilde{x}K \in \widetilde{L}/K$.

Para $H \leq K \leq J$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{L}/J \arrow[dl, "p_{KJ}"'] \arrow[dr, "p_{HJ}"] & \\ \widetilde{L}/K \arrow[rr, "p_{HK}"] & & \widetilde{L}/H \end{tikzcd}$$

En efecto, los homomorfismos p_{HJ}, p_{HK} , p_{KJ} satisfacen por definición

$$p_J = p_H \circ p_{HJ} \tag{3.1}$$
$$p_K = p_H \circ p_{HK} \tag{3.2}$$
$$p_J = p_K \circ p_{KJ}. \tag{3.3}$$

Sustituyendo (2) en (3): $p_J = (p_H \circ p_{HK}) \circ p_{KJ} = p_H \circ (p_{HK} \circ p_{KJ})$, comparando este último

resultado con (1) y por la unicidad de p_{HJ} se deduce que $p_{HJ} = p_{HK} \circ p_{KJ}$.

Por tanto, $\{\widetilde{L}/H, p_{HK}\}_{H\in\mathcal{S}}$ es un sistema proyectivo. Ahora, sea $C = \prod_{H\in\mathcal{S}} \widetilde{L}/H$.

Definición 3.1. *Definimos el lazo solenoidal como*

$$\mathcal{L} = \varprojlim\{\widetilde{L}/H, p_{HK}\}_{H\in\mathcal{S}} := \{c \in C | p_{HK}\pi_K(c) = \pi_H(c) \text{ para todo } H \leq K\},$$

donde π_H es la proyección $C \to \widetilde{L}/H$.

La topología en C es la topología producto, sus abiertos son uniones de elementos de la forma

$$\pi_{H_{i_1}}^{-1}(U_{H_{i_1}}) \cap \pi_{H_{i_2}}^{-1}(U_{H_{i_2}}) \cap \cdots \cap \pi_{H_{i_n}}^{-1}(U_{H_{i_n}}),$$

con $H_{i_j} \in \mathcal{S}$. La topología de $\mathcal{L}$ es la topología de subespacio. Para cada $H \in \mathcal{S}$ denotamos por $\rho_H : \mathcal{L} \to \widetilde{L}/H$ a la proyección canónica.

Proposición 3.1. *Los conjuntos $\rho_H^{-1}(U_H)$, con U_H abierto de $\widetilde{L}/H$, forman una base para la topología de $\mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $(x_H H)_{H\in\mathcal{S}} \in W$, debemos encontrar un abierto U_K de $\widetilde{L}/K$ tal que $(x_H H)_{H\in\mathcal{S}} \in \rho_K^{-1}(U_K)$ y $\rho_K^{-1}(U_K) \subset W$.

Sea m tal que $H_m \geq H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_n}$. Dado que las aplicaciones $p_{H_{i_j}H_m}$ son continuas, $p_{H_{i_j}H_m}^{-1}(U_{H_{i_j}})$ es abierto de $\widetilde{L}/H_m$. Además, $x_{H_m}H_m \in p_{H_{i_j}H_m}^{-1}(U_{H_{i_j}})$ ya que

$$\begin{aligned} p_{H_{i_j}H_m}(x_{H_m}H_m) &= p_{H_{i_j}H_m}\pi_{H_m}((x_H H)) \\ &= \pi_{H_{i_j}}((x_H H)) \in U_{H_{i_j}} \\ &= x_{H_{i_j}}H_{i_j} \end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, n$.

Definimos $U := \bigcap_{j=1}^{n} p_{H_{i_j}H_m}^{-1}(U_{H_{i_j}})$, U contiene a $x_{H_m}H_m$ por lo que $\rho_{H_m}^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de $(x_H H)_{H\in\mathcal{S}}$ en $\mathcal{L}$.

Si $(y_H H)_{H\in\mathcal{S}} \in \rho_{H_m}^{-1}(U)$ entonces $y_{H_m}H_m \in U$, por lo que $y_{H_{i_r}}H_{i_r} = p_{H_{i_r}H_m}(y_{H_m}H_m)$ para $r = 1, \ldots, n$. Así, $\rho_{H_m}^{-1}(U) \subset W$. □

Teorema 3.1 (I.M. Barahona)**.** *$\mathcal{L}$ es un lazo topológico.*

Demostración. Sean $(x_H H), (y_H H) \in \mathcal{L}$.Definimos la operación en $\mathcal{L}$ componente a componente, esto es, $(x_H H) * (y_H H) = (x_H y_H H)$. $\mathcal{L}$ es cerrado bajo esta operación ya que:

$$\begin{aligned} p_{HK}\pi_K((x_H y_H H)) &= p_{HK}(x_K y_K K) \\ &= p_{HK}(x_K K y_K K) \\ &= p_{HK}(x_K K) p_{HK}(y_K K) \\ &= x_H H y_H H \\ &= x_H y_H H \\ &= \pi_H((x_H y_H H)) \end{aligned}$$

Ahora, mostraremos que $m : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$, $((x_H H), (y_H H)) \longmapsto (x_H y_H H)$ es continua.
Sea $\rho_H^{-1}(U_H)$ un abierto básico de $\mathcal{L}$ con U_H abierto de $\widetilde{L}/H$. Desde que $\widetilde{L}/H$ es un lazo topológico existen abiertos $\{V_H^\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{W_H^\alpha\}_{\alpha \in A}$ tales que

$$m_H^{-1}(U_H) = \bigcup V_H^\alpha \times W_H^\alpha,$$

donde m_H es la multiplicación continua del lazo $\widetilde{L}/H$, $m_H : \widetilde{L}/H \times \widetilde{L}/H \longrightarrow \widetilde{L}/H$. Ahora, definimos

$$\begin{aligned} V^\alpha &= \rho_H^{-1}(V_H^\alpha), \\ W^\alpha &= \rho_H^{-1}(W_H^\alpha). \end{aligned}$$

Luego, $m^{-1}(\rho_H^{-1}(U_H)) = \bigcup V^\alpha \times W^\alpha$. En efecto, sea $((x_H H), (y_H H)) \in \bigcup V^\alpha \times W^\alpha$, por lo que $((x_H H), (y_H H)) \in V^\alpha \times W^\alpha$, para algún $\alpha \in A$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho_H(m((x_H H), (y_H H))) &= m_H(\rho_H((x_H H)), \rho_H((y_H H))) \\ &= m_H(x_H H, y_H H) \in U_H \end{aligned}$$

Por tanto, la operación m es continua. De manera similar, las operaciones $\diagup : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ y $\diagdown : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ son continuas. $\square$

Sea $i : \widetilde{L} \to C$, $\tilde{x} \mapsto (\tilde{x}H)_{H \in \mathcal{S}}$ inducida por la proyección $\widetilde{L} \to \widetilde{L}/H$ en cada componente. Se tiene que $i(\widetilde{L}) \subset \mathcal{L}$, en efecto, para $\tilde{x} \in \widetilde{L}$ se tiene

$$\begin{aligned} p_{HK}\pi_k((\tilde{x}H)_{H \in \mathcal{S}}) &= p_{HK}(\tilde{x}K) \\ &= \tilde{x}H \\ &= \pi_H((\tilde{x}H)_{H \in \mathcal{S}}) \end{aligned}$$

Denotamos $\tilde{i} : \widetilde{L} \to \mathcal{L}$, la aplicación inducida por i. El homomorfismo $\tilde{i}$ es continua desde que la composición $\rho_H \circ \tilde{i}$ es una proyección, y por tanto continua, y ρ_H es también continua.

Verifiquemos que $\tilde{i}$ es inyectiva. Si $\tilde{x} \in \ker \tilde{i}$ entonces $\tilde{x} \in H$ para todo $H \in \mathcal{S}$. Por lo que $\tilde{x} \in \bigcap_{H \in \mathcal{S}} H = \{\tilde{e}\}$. Por lo tanto $\ker \tilde{i} = \{\tilde{e}\}$.

Finalmente, si $H \in \mathcal{S}$ entonces $\rho_H(\tilde{i}(\widetilde{L})) = \widetilde{L}/H$, y por lo tanto para cualquier abierto U_H de $\widetilde{L}/H$

$$\rho_H(\tilde{i}(\widetilde{L})) \cap U_H \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $\tilde{i}(\widetilde{L}) \cap \rho_H^{-1}(U_K) \neq \emptyset$. Se ha probado que:

Proposición 3.2. *$\tilde{i}(\widetilde{L})$ es densa en $\mathcal{L}$.*

3.2 El lazo cubriente generalizado $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$

En lo siguiente, se probará que $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ es el cubriente generalizado de $\mathcal{L}$.

Proposición 3.3. *1. Si $\sigma_K \in \Gamma_K$ y $\sigma_H = \mu_{HK}(\sigma_K)$ entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{L}/H \arrow[d, "\sigma_H"] & \widetilde{L}/K \arrow[l, "p_{HK}"'] \arrow[d, "\sigma_K"] \\
\widetilde{L}/H & \widetilde{L}/K \arrow[l, "p_{HK}"]
\end{tikzcd}$$

conmuta.

2. Si $\sigma_H \in \Gamma_H$ y $\sigma_K \in \Gamma_K$ y el diagrama conmuta para algún $\tilde{x}_K K \in \widetilde{L}/K$ entonces $\sigma_H = \mu_{HK}(\sigma_K)$.

Demostración. (1) Sea $\sigma_K \in \Gamma_K$, $\sigma_K = L_{\tilde{a}K}$, y $\sigma_H = \mu_{HK}(\sigma_K) = L_{\tilde{a}H}$. Entonces para $\tilde{x}K \in \widetilde{L}/K$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\sigma_H p_{HK}(\tilde{x}K) &= \sigma_H(\tilde{x}H) \\
&= \tilde{a}\tilde{x}H \\
&= p_{HK}(\tilde{a}\tilde{x}K) \\
&= p_{HK}\sigma_K(\tilde{x}K).
\end{aligned}$$

(2) Sean $\sigma_H = L_{\tilde{a}H}$ y $\sigma_K = L_{\tilde{b}K}$ y sea $\tilde{x}K \in \widetilde{L}/K$ tal que $\sigma_H p_{HK}(\tilde{x}K) = p_{HK}\sigma_K(\tilde{x}K)$. Se deduce que

$$\begin{aligned}
\tilde{a}\tilde{x}H &= \tilde{b}\tilde{x}H \\
\Rightarrow \tilde{a}\tilde{x} &= (\tilde{b}\tilde{x})h, \text{ para algún } h \in H \\
\tilde{a}\tilde{x} &= (\tilde{b}h)\tilde{x},
\end{aligned}$$

por lo que $\tilde{a} = \tilde{b}h$, es decir, $\tilde{a}H = \tilde{b}H$. Así $\sigma_H = \mu_{HK}(\sigma_K)$. $\square$

Proposición 3.4. *$\widehat{\Gamma}$ actúa sobre $\mathcal{L}$ como grupo de transformaciones efectivo.*

Demostración. Sea $\sigma = (\sigma_H)_{H\in\mathcal{S}}$ elemento de $\widehat{\Gamma}$. Por la Proposición 3.3, σ induce un homeomorfismo $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ definido por: si $x = (x_H H)_{H\in\mathcal{S}}$, $\sigma(x) = (\sigma_H(x_H H))_{H\in\mathcal{S}}$. Luego,

1. $(\sigma\sigma')(x) = \sigma(\sigma'(x))$.

2. La identidad $\hat{e} \in \widehat{\Gamma}$, satisface $\hat{e}(x) = x$, para todo $x \in \mathcal{L}$.

Ahora, probaremos que $\theta : \widehat{\Gamma} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $(\sigma, x) \longmapsto \sigma(x)$ es continua.

Sea $(\sigma', x') \in \widehat{\Gamma} \times \mathcal{L}$ dado y U un vecindario abierto de $\sigma'(x')$ en $\mathcal{L}$, con $U = \rho_H^{-1}(U_H)$ y U_H abierto de $\widetilde{L}/H$. Como Γ_H es discreto $V = \mu_H^{-1}(\sigma'_H)$ es un vecindario de σ' en $\widehat{\Gamma}$. Además, desde que la composición $\sigma'\rho_H$ es continua, existe un vecindario W de x' tal que $\sigma'\rho_H(W) \subset U_H$. Se tiene que $\theta^{-1}(U) = V \times W$, en efecto, sea $(\sigma, x) \in V \times W$ entonces $\rho_H\sigma(x) = \sigma_H(\rho_H(x)) = \mu_H(\sigma)\rho_H(x) = \sigma'_H\rho_H(x) \in U_H$, así $\sigma(x) \in U$.

□

Sea $(\tilde{e}H)$ el elemento identidad en $\mathcal{L}$ y las aplicaciones cubrientes $h_H : \widetilde{L} \longrightarrow \widetilde{L}/H$. La sucesión $(h_H)_H$ induce la aplicación

$$\hat{h} : (\widetilde{L}, \tilde{e}) \longrightarrow (\mathcal{L}, (\tilde{e}H))$$

$$\tilde{x} \longmapsto \hat{h}(\tilde{x}) = (h_H(\tilde{x}))_H.$$

Ahora, podemos definir la aplicación $\widehat{P} : \widetilde{L}\times\widehat{\Gamma} \longrightarrow \mathcal{L}$ por $\widehat{P}(\tilde{x}, (\sigma_H)_H) = \sigma\hat{h}(\tilde{x}) = (\sigma_H h_H(\tilde{x}))_H$.

$\widehat{P}$ está bien definida, en efecto, sean $H, K \in \mathcal{S}$ con $H \leq K$:

$$\begin{aligned} p_{HK}(\sigma_K(h_K(\tilde{x}))) &= p_{HK}(\sigma_K(\tilde{x}K)) \\ &= p_{HK}(\tilde{a}\tilde{x}K) \\ &= \tilde{a}\tilde{x}H \\ &= \tilde{a}H\tilde{x}H \\ &= \sigma_H(h_H(\tilde{x})). \end{aligned}$$

Además, $\widehat{P}$ es continua. Sea $(\tilde{x}, (\sigma_H)_H)$ un elemento arbitrario de $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ y $W = \rho_H^{-1}(U_H)$, con U_H abierto de $\widetilde{L}/H$, una vecindad básica de $\widehat{P}((\tilde{x}, (\sigma_H)_H))$, $\sigma_H(h_H(\tilde{x})) \subset \rho_H^{-1}(U_H)$.

Como σ_H y h_H son continuas, $U := h_H^{-1}(\sigma_H^{-1}(U_H))$ es abierto de $\widetilde{L}$ con $\tilde{x} \in U$. Sea $V = \cap\mu_H^{-1}(\sigma_H)$, este es un abierto de $\widehat{\Gamma}$ que contiene a $(\sigma_H)_H$. Por tanto, $U \times V$ es una vecindad abierta de $(\tilde{x}, (\sigma_H)_H)$.

El espacio $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ es también un lazo topológico, con la operación respectiva componente a componente. Resulta que $\widehat{P}$ es un homomorfismo de lazos topológicos. En efecto:

$$
\begin{aligned}
\widehat{P}((\tilde{x},(\sigma_H)_H)\cdot(\tilde{y},(\sigma'_H)_H)) &= \widehat{P}(\tilde{x}\tilde{y},(\sigma_H\sigma'_H)_H)\\
&= \widehat{P}(\tilde{x}\tilde{y},(L_{\widetilde{a_H}H}\circ L_{\widetilde{a_H}'H})_H)\\
&= \widehat{P}(\tilde{x}\tilde{y},(L_{\widetilde{a_H}\widetilde{a_H}'H})_H)\\
&= (L_{\widetilde{a_H}\widetilde{a_H}'H}(h_H(\tilde{x}\tilde{y})))_H\\
&= (L_{\widetilde{a_H}\widetilde{a_H}'H}(h_H(\tilde{x})h_H(\tilde{y})))_H\\
&= (L_{\widetilde{a_H}\widetilde{a_H}'H}(\tilde{x}\tilde{y}H))_H\\
&= ((\widetilde{a_H}\widetilde{a_H}'H)(\tilde{x}\tilde{y}H))_H\\
&= ((\widetilde{a_H}\tilde{x})(\widetilde{a_H}'\tilde{y})H)_H\\
&= (\widetilde{a_H}\tilde{x}H)_H(\widetilde{a_H}'\tilde{y}H)_H\\
&= (L_{\widetilde{a_H}H}h_H(\tilde{x}))_H(L_{\widetilde{a_H}'H}h_H(\tilde{y}))_H\\
&= (\sigma_H h_H(\tilde{x}))_H(\sigma'_H h_H(\tilde{y}))_H\\
&= \widehat{P}((\tilde{x},(\sigma_H)_H))*\widehat{P}((\tilde{y},(\sigma'_H)_H))
\end{aligned}
$$

Probaremos que $\widetilde{L}\times\widehat{\Gamma}$ es el cubriente generalizado de $\mathcal{L}$ respecto de la aplicación $\widehat{P}$.

Diremos que un subconjunto $\widetilde{V}$ de $\widetilde{L}$ es **simple** si p manda homeomorfamente a $\widetilde{V}$ en $p(\widetilde{V})$.

Lema 3.1. *Si $x,y\in\mathcal{L}$ son tales que $\rho_{H_0}(x)=\rho_{H_0}(y)$, donde $H_0=\widetilde{H}$ entonces existe un único $\sigma\in\widehat{\Gamma}$ tal que $\sigma(x)=y$.*

Demostración. Sean $x=(x_H H), y=(y_H H)\in\mathcal{L}$ con $\rho_{H_0}(x)=\rho_{H_0}(y)$. De la definición de $\mathcal{L}$ se tiene que para todo $H\in\mathcal{S}$

$$
\begin{aligned}
p_{H_0H}(\rho_H(x)) &= \rho_{H_0}(x),\ \text{y}\\
p_{H_0H}(\rho_H(y)) &= \rho_{H_0}(y).
\end{aligned}
$$

Por lo que $p_{H_0H}(\rho_H(x))=p_{H_0H}(\rho_H(y))$. Dado que $p_{HH_0}=p_H$ es una aplicación cubriente regular existe un único $\sigma_H\in\Gamma_H$ tal que

$$\sigma_H(x_H H)=y_H H.$$

Además, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\sigma_H p_{HK}(x_K K) &= \sigma_H(x_H H)\\
&= y_H H\\
&= p_{HK}(y_K K)\\
&= p_{HK}(\sigma_K(x_K K)),
\end{aligned}
$$

por la Proposición 3.3 $\sigma_H=\mu_{HK}(\sigma_K)$. Por lo que el elemento $\sigma=(\sigma_H)$ es un elemento de $\widehat{\Gamma}$ y es tal que $\sigma(x)=y$. $\square$

Lema 3.2. *Para todo $H \in \mathcal{S}$, dado $\sigma_H \in \Gamma_H$, $W = \mu_H^{-1}(\sigma_H)$ y $\widetilde{V}$ un abierto simple de $\widetilde{L}$ se tiene que*

$$\widehat{P}(\widetilde{V} \times W) = \rho_H^{-1}(\sigma_H h_H(\widetilde{V})).$$

Demostración. Sea $x = (x_H H)_H \in \rho_H^{-1}(\sigma_H h_H(\widetilde{V}))$ se sigue que $x_H H = \sigma_H h_H(\tilde{v})$ para algún $\tilde{v} \in \widetilde{V}$. Luego, tomando $H_0 = \widetilde{H}$

$$\begin{aligned}
\rho_{H_0}(x) &= x_{H_0} H_0 \\
&= p_{H_0 H}(\rho_H(x)) \\
&= p_{H_0 H}(\sigma_H h_H(\tilde{v})) \\
&= p_H(\sigma_H h_H(\tilde{v})), \text{ dado que } p_{\widetilde{H}H} = p_H \\
&= p(\tilde{v}), \text{ por la conmutatividad de la figura 3.1} \\
&= \rho_{H_0}(\widehat{h}(\tilde{v}))
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{L} \arrow[d, "h_H"'] \arrow[dr, "p"] & \\
\widetilde{L}/H \arrow[r, "p_H"'] \arrow[d, "\sigma_H"'] & L \\
\widetilde{L}/H \arrow[ur, "p_H"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1: Diagrama conmutativo

Como $\rho_{H_0}(x) = \rho_{H_0}(\widehat{h}(\tilde{v}))$ por el Lema 3.1 existe $\sigma^0 = (\sigma_H^0) \in \widehat{\Gamma}$ tal que $\sigma^0(\widehat{h}(\tilde{v})) = x$, es decir $\widehat{P}(\tilde{v}, \sigma^0) = x$. De la igualdad

$$\sigma_H^0(h_H(\tilde{v})) = x_H H = \sigma_H h_H(\tilde{v}),$$

se deduce que $\sigma^0 \in W$. Por tanto, $x \in \widehat{P}(\widetilde{V} \times W)$. La otra inclusión es inmediata. □

Lema 3.3. *$\widehat{P}$ es un homeomorfismo local de $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ sobre $\mathcal{L}$. En efecto, si $\widetilde{V}$ es un conjunto abierto simple de $\widetilde{L}$, entonces $\widehat{P}$ mapea a $\widetilde{V} \times \widehat{\Gamma}$ homeomorficamente sobre $\rho_{H_0}^{-1}(p(\widetilde{V}))$, con $H_0 = \widetilde{H}$.*

Demostración. Sea $\tilde{V}$ un abierto simple de $\widetilde{L}$. Por el Lema 3.2 $\widehat{P}(\widetilde{V} \times \widehat{\Gamma}) = \rho_{H_0}^{-1}[p(\widetilde{V})]$. Probaremos que $\widehat{P}$ es inyectiva en $\widetilde{V} \times \widehat{\Gamma}$. Supongamos que $\widehat{P}(\tilde{v}, \sigma) = \widehat{P}(\tilde{v}', \sigma')$, luego

$$\begin{aligned}
(\sigma_H h_H(\tilde{v}))_H &= (\sigma'_H h_H(\tilde{v}')_H) \\
\sigma_{H_0} p(\tilde{v}) &= \sigma'_{H_0} p(\tilde{v}') \\
p(\tilde{v}) &= p(\tilde{v}'),
\end{aligned}$$

del hecho que $\widetilde{V}$ es simple se deduce que $\tilde{v} = \tilde{v}'$ y por tanto $\sigma = \sigma'$. □

Ya tenemos los elementos suficientes para probar el teorema central de esta sección

Teorema 3.2. *$\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ es el lazo cubriente generalizado de $\mathcal{L}$ con respecto a la aplicación $\widehat{P}$.*

Demostración. Dado V_1 un abierto de L, por ser $p : \tilde{L} \to L$ una aplicación cubriente $p^{-1}(V_1) = \bigsqcup \widetilde{V}_i$, con $\widetilde{V}_i$ abiertos de $\widetilde{L}$ y $p(\widetilde{V}_i)$ homeomorfo a V_1.
Además, $\rho_{H_0}^{-1}(V_1)$ es un abierto de $\mathcal{L}$ el cual denotaremos por V, $V = \rho_{H_0}^{-1}(V_1)$. Nótese que los conjuntos $\widetilde{V}_i \times \Gamma$ son abiertos disjuntos de $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$, probaremos que $\widehat{P}^{-1}(V) = \bigsqcup \widetilde{V}_i \times \widehat{\Gamma}$.

Por el Lema 3.2,

$$\begin{aligned} \widehat{P}(\widetilde{V}_i \times \widehat{\Gamma}) &= \rho_{H_0}^{-1}(p(V_i)) \\ &= \rho_{H_0}^{-1}(V_1) \\ &= V. \end{aligned}$$

Así, $\bigsqcup \widetilde{V}_i \times \widehat{\Gamma} \subseteq \widehat{P}^{-1}(V)$.
Ahora, si $(\tilde{x}, (\sigma_H)_H) \in \widehat{P}^{-1}(V)$ entonces $\widehat{P}(\tilde{x}, (\sigma_H)_H) \in V$. Luego, $(\sigma_H h_H(\tilde{x}))_H \in V$ de donde se sigue que $\rho_{H_0}(\sigma_H h_H(\tilde{x})) \in V_1$ por lo que $p(\tilde{x}) \in V_1$ y $\tilde{x} \in \widetilde{V}_i$ para algún i. Por tanto, $\widehat{P}^{-1}(V) \subseteq \bigsqcup \widetilde{V}_i \times \widehat{\Gamma}$.

Los conjuntos V construidos en el proceso anterior forman una cubierta de $\widetilde{V}$ tales que $\widehat{P}^{-1}(V)$ es unión disjunta de subconjuntos abiertos de $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$, cada uno de los cuales es mapeado homeomorficamente a V por $\widehat{P}$.

□

3.3 La acción de Γ sobre $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$

Sea L un lazo topológico, $p : \widetilde{L} \to L$ su cubriente universal y Γ el grupo de transformaciones cubrientes de $p : \widetilde{L} \to L$. Sobre el producto $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ definimos la acción

$$\begin{gathered} \Gamma \times (\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}) \longrightarrow \widetilde{L} \times \widehat{\Gamma} \\ (\sigma, (\tilde{x}, (\sigma_H)_H)) \longmapsto (\sigma(\tilde{x}), (\sigma_H \sigma^{-1} H)_H), \end{gathered}$$

donde $\sigma^{-1}H : \widetilde{L}/H \longrightarrow \widetilde{L}/H$, $\tilde{x}H \longmapsto \sigma^{-1}(\tilde{x})H$.

Desde que la acción de Γ sobre $\widetilde{L}$ es propia y discontinua y libre de puntos fijos (Teorema 1.5), también es propia y discontinua y libre de puntos fijos sobre $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$. En efecto, sea W abierto de $\widetilde{L}$ tal que $\sigma(W) \cap W = \emptyset$ para todo $\sigma \in \Gamma$, entonces $W \times \widehat{\Gamma}$ es un abierto de $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ satisfaciendo

$$(W \times \widehat{\Gamma}) \cap (\sigma \cdot (W \times \widehat{\Gamma})) \neq \emptyset,$$

para todo $\sigma \in \Gamma$.

Escribimos el espacio de órbitas $\widetilde{L} \times_\Gamma \widehat{\Gamma} := \widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}/\Gamma$, dotado con la topología cociente.

Denotamos por Π a la proyección natural $\Pi : \widetilde{L} \times \widehat{\Gamma} \longrightarrow \widetilde{L} \times_\Gamma \widehat{\Gamma}$.

Lema 3.4. *Sean $(\tilde{x}, (\sigma_H)_H)$ y $(\tilde{x}', (\sigma'_H)_H)$ elementos de $\widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ entonces:*

$$\widehat{P}((\tilde{x}, (\sigma_H)_H)) = \widehat{P}((\tilde{x}', (\sigma'_H)_H))$$

si y sólo si

$$\Pi((\tilde{x}, (\sigma_H)_H)) = \Pi((\tilde{x}', (\sigma'_H)_H)).$$

Demostración. Supongamos que $\widehat{P}((\tilde{x}, (\sigma_H)_H)) = \widehat{P}((\tilde{x}', (\sigma'_H)_H))$ entonces $\sigma_H(h_H(\tilde{x})) = \sigma'_H(h_H(\tilde{x}'))$ para todo $H \in \mathcal{S}$. En particular, para Γ ($H = \{\tilde{e}\}$) se deduce que $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{x}')$. Dado que Γ actúa transitivamente sobre la fibra de cada punto de L, existe un único $\sigma \in \Gamma$ tal que $\tilde{x}' = \sigma(\tilde{x})$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sigma'_H(h_H(\tilde{x}')) &= \sigma_H(h_H(\tilde{x})) \\
&= \sigma_H(h_H(\sigma^{-1}(\tilde{x}'))) \\
&= \sigma_H(\sigma^{-1}H(h_H(\tilde{x}'))) \\
&= (\sigma_H\sigma^{-1}H)(h_H(\tilde{x}')),
\end{aligned}$$

por lo que $\sigma'_H = \sigma_H\sigma^{-1}H$, para todo $H \in \mathcal{S}$.

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot (\tilde{x}, (\sigma_H)_H) &= (\sigma(\widetilde{x}), (\sigma_H\sigma^{-1}H)_H) \\
&= (\tilde{x}', (\sigma'_H)_H),
\end{aligned}$$

por tanto, $\Pi((\tilde{x}, (\sigma_H)_H)) = \Pi((\tilde{x}', (\sigma'_H)_H))$.

Recíprocamente, si $\Pi((\tilde{x}, (\sigma_H)_H)) = \Pi((\tilde{x}', (\sigma'_H)_H))$ existe $\sigma \in \Gamma$ tal que $\sigma \cdot (\tilde{x}, (\sigma_H)_H) = (\tilde{x}', (\sigma'_H)_H)$ por lo que $(\sigma(\tilde{x}), (\sigma_H(\sigma^{-1}H))_H) = (\tilde{x}', (\sigma'_H)_H)$. Luego,

$$\begin{aligned}
(\sigma_H(h_H(\tilde{x})))_H &= (\sigma_H(h_H(\sigma^{-1}(\tilde{x}'))))_H \\
&= (\sigma_H(\sigma^{-1}H(h_H(\tilde{x}'))))_H \\
&= ((\sigma_H\sigma^{-1}H)(h_h(\tilde{x}')))_H \\
&= (\sigma'_H(h_H(\tilde{x}')))_H
\end{aligned}$$

Por tanto, $\widehat{P}((\tilde{x}, (\sigma_H)_H)) = \widehat{P}((\tilde{x}', (\sigma'_H)_H))$. $\square$

Teorema 3.3. *El espacio de órbitas $\widetilde{L} \times_\Gamma \widehat{\Gamma}$ es homeomorfo a $\mathcal{L}$.*

Demostración. Por el Lema 3.4 existe una función biyectiva $\Delta : \widetilde{L} \times_\Gamma \widehat{\Gamma} \longrightarrow \mathcal{L}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{L} \times \widehat{\Gamma} \arrow[dl, "\Pi"'] \arrow[dr, "\widehat{P}"] & \\ \widetilde{L} \times_\Gamma \widehat{\Gamma} \arrow[rr, "\Delta"] & & \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

La función Δ es continua dado que $\widehat{P}$ es continua y Π es una función abierta. Que Δ sea abierta se sigue del hecho que es una función sobreyectiva y continua de un espacio compacto en un espacio Hausdorff. Así, Δ es un homeomorfismo por tanto $\widetilde{L} \times_\Gamma \widehat{\Gamma} \simeq \mathcal{L}$.

□

Proposición 3.5. *Si $\mathcal{H} = \tilde{i}(\widetilde{L})$ entonces $\mathcal{H}$ es densa en $\mathcal{L}$. Además,*

$$\mathcal{H} \cong \widetilde{L},$$

como lazos topológicos.

Demostración. Si $\mathcal{H} \subset \widetilde{L} \times_\Gamma \widehat{\Gamma}$ y $x \in \mathcal{H}$, existe $(\tilde{x}, (\sigma_H)_H) \in \widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ tal que $\Pi(\tilde{x}, (\sigma_H)_H) \in \widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$. Sea $y \in \mathcal{H}$ entonces existe una sucesión de puntos $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ tal que dos puntos consecutivos x_j, x_{j+1} están en una misma placa, con $j = 0, 1, \cdots, n-1$.
Sean $\Pi(U_j \times \{(\sigma_H^j)_H\})$ para $j = 0, \ldots, n$ las placas que contienen a x_j y a x_{j+1}. Podemos suponer que $\tilde{x} \in U_0$ y que $(\sigma_H)_H = (\sigma_H^0)_H$. Luego, dado que

$$x_1 \in \Pi(U_0 \times \{(\sigma_H^0)_H\}) \cap \Pi(U_0 \times \{(\sigma_H^0)_H\}),$$

existe $\gamma^1 \in \Gamma \subset \widehat{\Gamma}$ tal que $(\sigma_H^0)_H = (\sigma_H^1(\gamma_1^{-1}H))_H$, esto es porque las funciones de transición son multiplicar por la derecha por elementos de Γ vistos como elementos de $\widehat{\Gamma}$. De manera similar, existe $\gamma^j \in \Gamma$ tal que $(\sigma_H^{j-1}) = (\sigma_H^j(\gamma_j^{-1}))_H$ para $j = 1, \cdots, n$.

Se tiene que

$$(\sigma_H)_H = (\sigma_H^0)_H = (\sigma^n(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n)^{-1}H)_H,$$

esto implica que $(\sigma_H)_H$ y $(\sigma_H^n)_H$ están en la misma órbita y por tanto $y \in \Pi(\tilde{L} \times \{(\sigma_H)_H\})$. Así, $\mathcal{H} \subset \Pi(\widetilde{L} \times \{(\sigma_H)_H\})$.

Además, dado que $\Pi(\tilde{L} \times \{(\sigma_H)_H\})$ es conexo por caminos se tiene que $\Pi(\tilde{L} \times \{(\sigma_H)_H\}) = \mathcal{H}$.

La aplicación Π es inyectiva sobre $\widetilde{L} \times \{(\sigma_H)_H\}$ pues dos elementos en una misma órbita no pertenecen al mismo nivel. Por tanto, $\Pi : \widetilde{L} \times \{(\sigma_H)_H\} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un isomorfismo de lazos.

Dado $W \subset \widetilde{L} \times_\Gamma \widehat{\Gamma}$ un abierto y $\mathcal{H} = \Pi(\widetilde{L} \times \{(\sigma_H)_H\})$ una hoja arbitraria probaremos que $\mathcal{H} \cap W \neq \emptyset$.

Como $W \subset \widetilde{L} \times_\Gamma \widehat{\Gamma}$ es abierto, se sigue que $\Pi^{-1}(W) \subset \widetilde{L} \times \widehat{\Gamma}$ es un abierto. Luego, existen abiertos $U \subset \widetilde{L}$ y $V \subset \widehat{\Gamma}$ tales que $U \times V \subset \Pi^{-1}(W)$.

Además, dado que Γ es denso en $\widehat{\Gamma}$ existe un $\gamma \in \Gamma$ tal que $(\gamma^{-1}H)_H \in (\sigma_H)_H^{-1}V$, es decir, $(\sigma_H)_H(\gamma H)_H \in V$.

Reescribimos a $\mathcal{H}$ como $\mathcal{H} = \Pi(\widetilde{L} \times \{(\sigma_H)_H\}) = \Pi(\widetilde{L} \times \{(\sigma_H \cdot \gamma^{-1}H)_H\})$. Ahora, como $\widetilde{L} \times \{(\sigma_H)_H\} \cap (U \times V) \neq \emptyset$ concluimos que $\Pi(\widetilde{L} \times \{(\sigma_H \cdot \gamma^{-1}H)_H\} \cap (U \times V)) \neq \emptyset$. Dado que $\Pi(\widetilde{L} \times \{(\sigma_H\gamma^{-1}H)_H\} \cap (U \times V)) \subset \Pi(\widetilde{L} \times \{(\sigma_H\gamma^{-1}H)_H\}) \cap \Pi(U \times V)) \subset \mathcal{H} \cap W$ se deduce que $\mathcal{H} \cap W \neq \emptyset$. Por tanto $\mathcal{H}$ es densa en $\widetilde{L} \times_\Gamma \widehat{\Gamma}$.

□

3.4 El grupo multiplicativo solenoidal

Recordemos que para L un lazo topológico el grupo multiplicativo

$$G = LMult(L) = \langle \{L_x | x \in L\} \rangle,$$

es un grupo topológico que actúa sobre L. Ahora, sobre G haremos la construcción universal para definir el grupo multiplicativo solenoidal.

3.4.1 El grupo multiplicativo del cubriente universal de un lazo

Sea L un lazo topológico y $(\widetilde{L}, p)$ su lazo cubriente universal. Al ser ambos lazos topológicos podemos tomar sus respectivos grupos multiplicativos, en particular estudiaremos la relación entre $G = LMult(L)$ y $G^* = LMult(\widetilde{L})$, para ello utilizaremos algunas propiedades probadas en [14].

Lema 3.5. *[14, Lema 1.34] Sea L un lazo topológico, conexo y localmente simplemente conexo y sea G el grupo topológico generado por las traslaciones izquierdas de L. Asuma que G es localmente simplemente conexo. Sea $(\widetilde{L}, p)$ el lazo cubriente universal de L y sea $\widetilde{H} = p^{-1}(e) \subseteq \widetilde{L}$. Entonces el grupo G^* generado por las traslaciones izquierdas de $\widetilde{L}$ es el grupo cubriente de G tal que el núcleo de la aplicación $q : G^* \longrightarrow G$ es $\widetilde{H}^* = \{L_h | h \in \widetilde{H}\}$, $\widetilde{H}^* \cong \widetilde{H}$.*

Demostración. Al ser $\widetilde{H}$ un subgrupo central discreto de $\widetilde{L}$, $\widetilde{H}^*$ es un subgrupo normal discreto de G^*. Sea q el morfismo $q : G^* \longrightarrow G^*/\widetilde{H}^*$ con $\widetilde{H}^*$ como núcleo. Por el Teorema 2.3 (G^*, q) es un cubriente para $G^*/\widetilde{H}^*$. Por la Proposición 2.2 $G^*/\widetilde{H}^* \cong LMult(\widetilde{L}/\widetilde{H})$, dado que $\widetilde{L}/\widetilde{H} \cong L$, tenemos $G^*/\widetilde{H}^* \cong G$. Así $q : G^* \longrightarrow G$ es un cubriente, donde $q^{-1}(e_G) = \widetilde{H}^*$. □

Observación 3.1. *G^* coincide con el cubriente universal de G cuando $\pi_1(L, e) \cong \pi_1(G, e_G)$.*

Bajo las mismas condiciones del Lema 3.5 se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.4 (I. M. Barahona)**.** *Sea H_1 subgrupo central discreto de $\widetilde{H}$ y $H_1^* = \{L_u | u \in H_1\}$ el respectivo subgrupo normal discreto de G^*. La aplicación $q_{H_1^*} : G^*/H_1^* \longrightarrow G$, $g^*H_1 \longmapsto q(g^*)$ es grupo cubriente de G. Además, G^*/H_1^* es isomorfo al grupo generado por las traslaciones izquierdas del lazo $\widetilde{L}/H_1$, donde $p_{H_1} : \widetilde{L}/H_1 \longrightarrow L$ es el lazo cubriente de L asociado a H_1.*

Demostración. Dado que H_1^* es subgrupo central discreto de G^* por la Proposición 2.3 el morfismo $t_{H_1^*} : G^* \longrightarrow G^*/H_1^*$ con $\ker t_{H_1^*} = H_1^*$ es cubriente de G^*/H_1^*. La aplicación $q_{H_1^*}$ está definida de tal forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & G^* \arrow[dl, "t_{H_1^*}"'] \arrow[d, "q"] \\ G^*/H_1^* \arrow[r, "q_{H_1^*}"] & G \end{tikzcd}$$

La aplicación $q_{H_1^*}$ está bien definida y es una aplicación cubriente desde que q y $t_{H_1^*}$ lo son. Finalmente, por la Proposición 2.2 $LMult(\widetilde{L}/H_1) \cong G^*/H_1^*$. □

Recordemos que para $H, K \in \mathcal{S} = \{$ subgrupos centrales discretos de $\widetilde{H}$ y de igual rango con $\widetilde{H}\}$ definimos $H \leq K$ si y sólo si $K \subset H$. De manera similar, sobre el conjunto $\mathcal{S}^* = \{H^* | H \in \mathcal{S}\}$ definimos $H^* \leq K^*$ si y sólo si $K^* \subset H^*$.

Lema 3.6. *Si H_1^* es subgrupo discreto de H^* entonces existe un único H_1 subgrupo central discreto de $\widetilde{H}$ tal que $H_1^* = \{L_h : h \in H_1\}$.*

Demostración. Sea $H_1^* = \{L_{h_\alpha}; \alpha \in A, h_\alpha \in \widetilde{H}\}$. Probaremos que $H_1 = \{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es subgrupo de $\widetilde{H}$. Sean h_α, $h_\beta \in H_1$. Como H_1^* es subgrupo se sigue que $L_{h_\alpha} \circ L_{h_\beta} = L_{h_\theta}$. De aquí deducimos que $h_\alpha h_\beta = h_\theta$, es decir, la operación es cerrada en H_1. Dado que la identidad pertenece a H_1^*, $e \in H_1$. Si $h_\alpha \in H_1$, $L_{h_\alpha} \in H_1^*$. Luego, existe $L_{h_\theta} \in H_1^*$ tal que $L_{h_\alpha} \circ L_{h_\theta} = L_e$. Se sigue que el inverso de h_α es $h_\theta \in H_1$. □

Para $H^* \leq K^*$ definimos las aplicaciones $q_{H^*K^*} : G^*/K^* \longrightarrow G^*/H^*$, $g^*K^* \longmapsto g^*H^*$. Se tiene que $\{G^*/H^*, q_{H^*K^*}\}_{H^* \in \mathcal{S}^*}$ forma un sistema proyectivo.
Denotaremos por

$$\mathcal{G}^* := \varprojlim \{G^*/H^*, q_{H^*K^*}\}_{H^* \in \mathcal{S}^*}.$$

3.4.2 Construcción del grupo multiplicativo solenoidal

Tomaremos L un lazo topológico, conexo y localmente simplemente conexo y G el grupo topológico generado por las traslaciones izquierdas de L. Asumiremos que G es localmente simplemente conexo y por tanto G tiene cubriente universal $\widetilde{G}$. Denotamos por r a la aplicación cubriente $r : \widetilde{G} \longrightarrow G$.

Denotamos por $\widetilde{K} := r^{-1}(e_G)$, $\widetilde{K}$ es un subgrupo central discreto de $\widetilde{G}$ y además $\widetilde{K} \cong \pi_1(G, e_G)$. Sea K un subgrupo central discreto de $\widetilde{K}$. Por la Proposición 2.3, $\widetilde{G}$ es cubriente de $\widetilde{G}/K$ con aplicación cubriente $s_K : \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}/K$ tal que $\ker s_K = K$. Definimos la aplicación $r_K : \widetilde{G}/K \longrightarrow G$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[dl, "s_K"'] \arrow[d, "r"] \\ \widetilde{G}/K \arrow[r, "r_K"] & G \end{tikzcd}$$

La aplicación r_K está bien definida y es una aplicación cubriente desde que r y s_K lo son y s_K es abierta.

Sea $\mathcal{K} := \{K|K$ es un subgrupo de $\widetilde{K}\}$. Sobre $\mathcal{K}$ definimos el orden $K \leq K'$ si y sólo si $K' \subset K$. El conjunto $(\mathcal{K}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Además, suponemos que $\bigcap_{K\in\mathcal{K}} K = \{\tilde{e}_G\}$.

Para $K \leq K'$ definimos la aplicación $r_{KK'} : \widetilde{G}/K' \longrightarrow \widetilde{G}/K$ por $\widetilde{g}K' \longmapsto \widetilde{g}K$. La aplicación $r_{KK'}$ es una aplicación cubriente. Tenemos que $\{\widetilde{G}/K, r_{KK'}\}_{K\in\mathcal{K}}$ es un sistema proyectivo.

Definición 3.2. *Definimos el grupo solenoidal $\mathcal{G}$ como*

$$\mathcal{G} := \varprojlim\{\widetilde{G}/K, r_{KK'}\}_{K\in\mathcal{K}}$$

En lo siguiente demostraremos la relación existente entre el grupo solenoidal universal $\mathcal{G}$ y el lazo solenoidal universal $\mathcal{L}$.

Lema 3.7. *El conjunto $\mathcal{S}^* = \{H^*|H \in \mathcal{S}\}$ es cofinal con el conjunto $\mathcal{K} = \{K|K$ es subgrupo de $\widetilde{K}\}$.*

Demostración. Para $K \in \mathcal{K}$ debemos probar que existe un $H_0^* \in \mathcal{S}$ tal que $K \leq H_0^*$. Dado que $q : G^* \longrightarrow G$ es cubriente de G podemos identificar a $\widetilde{H}^* = q^{-1}(e_G)$ como subgrupo de $\widetilde{K}$. Entonces $H_0^* = \widetilde{H}^* \cap K$ es un subgrupo de $\widetilde{H}^*$ y así un elemento de $\mathcal{S}^*$ tal que $H_0^* \subset K$ y por tanto $K \leq H_0^*$. □

Teorema 3.5 (I. M. Barahona)**.** *Los grupos solenoidales $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}^*$ son isomorfos como grupos topológicos.*

Demostración. El sistema proyectivo $\{G^*/H^*, q_{H^*K^*}\}_{H^*\in\mathcal{S}^*}$ es un subsistema del sistema proyectivo $\{\widetilde{G}/K, r_{KK'}\}_{K\in\mathcal{K}}$ desde que todo cubriente de G es de la forma $\widetilde{G}/K$ con $K \in \mathcal{K}$ y $\widetilde{H}^* = q^{-1}(e_G)$ se puede identificar con un grupo de $\widetilde{K}$. Para cada $H^* \in \mathcal{S}^*$ y $K \in \mathcal{K}$ se tiene la inclusión $G^*/H^* \hookrightarrow \widetilde{G}/K$.
Dado que el conjunto $\mathcal{S}^* = \{H^*|H \in \mathcal{S}\}$ es cofinal con el conjunto $\mathcal{K} = \{K|K$es subgrupo de $\widetilde{K}\}$, por la Proposición [5, Proposición 3.15] se concluye que $\mathcal{G}^*$ y $\mathcal{G}$ son isomorfos. □

Teorema 3.6 (I. M. Barahona)**.** *El grupo solenoidal $\mathcal{G}$ es el grupo generado por las traslaciones izquierdas del lazo solenoidal $\mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $L_{(x_H H)}$ un elemento de $LMult(\mathcal{L})$, con $(x_H H)_{H\in\mathcal{S}} \in \mathcal{L}$. Observemos que

$$\begin{aligned} L_{(x_H H)_{H\in\mathcal{S}}}((y_H H)_{H\in\mathcal{S}}) &= (x_H H)_{H\in\mathcal{S}}(y_H H)_{H\in\mathcal{S}} \\ &= (x_H H y_H H)_{H\in\mathcal{S}} \\ &= (L_{x_H H}(y_H H))_{H\in\mathcal{S}} \end{aligned}$$

Además, por la Proposición 2.2 para cada $H \in \mathcal{S}$ hay un isomorfismo entre $LMult(\widetilde{L}/H)$ y G^*/H^*. Por lo anterior se tiene un isomorfismo:

$$LMult(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{G}^*$$
$$L_{(x_H H)_{H\in S}} \longmapsto (L_{x_H} H^*)_{H^*\in\mathcal{S}^*}.$$

$\square$

4 Una aplicación: El grupo de Rhodes para lazos topológicos

En este capítulo estudiaremos el grupo de Rhodes y sus propiedades para lazos topológicos tomando como grupos de transformaciones los grupos generados por las traslaciones izquierdas, derechas e izquierdas derechas. Se estudiarán las propiedades que hereda el grupo de Rhodes del lazo topológico, en específico si L es centralmente nilpotente su respectivo grupo de Rhodes es soluble.

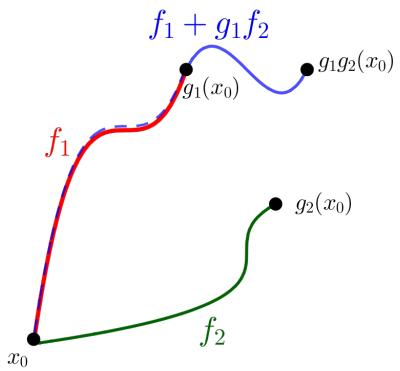
4.1 El grupo de Rhodes clásico

En esta parte se presenta la definición y propiedades del llamado grupo de Rhodes (ver [17]). En este artículo Rhodes generaliza el concepto de grupo fundamental de un espacio topológico. Define la categoría cuyos objetos son los pares (X, G) formados por un espacio topológico X y un grupo G de homeomorfismos de X, y cuyos morfismos $(\varphi, \psi) : (X, G) \to (Y, H)$ consisten de una función continua $\varphi : X \to Y$ y un homomorfismo $\psi : G \to H$ tales que, para cada par (x, g), $\varphi(gx) = (\psi g)(\varphi)(x)$. Con ello define el grupo $\sigma(X, x_0, G)$ y estudia su relación con el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$.

Sea X un espacio topológico, G un grupo de homeomorfismos de X y g en G. Un *camino* f de *orden* g con *punto base* x_0 es una aplicación continua $f : I \to X$ tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = gx_0$.

Un camino f_1 de orden g_1 y un camino f_2 de orden g_2 definen un camino $f_1 + g_1 f_2$ de orden $g_1 g_2$ dado por

$$(f_1 + g_1 f_2)(s) = \begin{cases} f_1(2s), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g_1 f_2(2s-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$



Dos caminos f y f' de orden g son llamados *homotópicos*, denotado por $f \sim f'$, si existe una función continua $F : I \times I \to X$ tal que

$$\begin{array}{rcll} F(s,0) & = & f(s), & 0 \leq s \leq 1, \\ F(s,1) & = & f'(s), & 0 \leq s \leq 1, \\ F(0,t) & = & x_0, & 0 \leq t \leq 1, \\ F(1,t) & = & gx_0, & 0 \leq t \leq 1. \end{array}$$

La relación $f \sim f'$ es una relación de equivalencia. Las clases de homotopía de un camino f de orden g es denotada por $[f; g]$.

Si los caminos f_1 y f_1' de orden g_1 son homotópicos y los caminos f_2 y f_2' de orden g_2 son homotópicos entonces los caminos $f_1 + g_1 f_2$ y $f_1' + g_1 f_2'$ son homotópicos. Por tanto la composición de clases de homotopía dada por

$$[f_1; g_1] \star [f_2; g_2] := [f_1 + g_1 f_2; g_1 g_2],$$

está bien definida.

Proposición 4.1. *El conjunto de clases de homotopía con la composición $\star$ es un grupo denotado por $\sigma(X, x_0, G)$, y es llamado el grupo fundamental de (X, G) con punto base x_0.*

Demostración. En efecto la composición es asociativa. Si e es el elemento identidad del grupo G y $x_0' : I \to X$ el camino constante, la clase $[x_0'; e]$ es el elemento identidad para la composición. Si ρ denota la aplicación de I en I que envía s a $1 - s$, entonces para cualquier clase de homotopía $[f; g]$ su inverso es la clase de homotopía $[g^{-1} f \rho; g^{-1}]$. □

Ejemplo 4.1. *a. Si G es el grupo cuyo único elemento es la aplicación identidad de X sobre sí mismo entonces $\sigma(X, x_0, G) \simeq \pi_1(X, x_0)$.*

b. Si X es simplemente conexo entonces $\sigma(X, x_0, G) \simeq G$.

Teorema 4.1. *Si x_1 pertenece a la componente conexa por caminos X_0 de x_0, y λ es un camino de x_0 a x_1, entonces λ induce un isomorfismo*

$$\lambda_* : \sigma(X, x_0, G) \to \sigma(X, x_1, G).$$

Sea $(\varphi, \psi) : (X, G) \to (Y, H)$ un morfismo. Dado que $\varphi(gx) = (\psi g)(\varphi x)$ para cada par (x, g), si f es un camino en X de orden g con punto base x_0 entonces φf es un camino en Y de orden ψg con punto base $y_0 = \varphi x_0$. Además si $f \sim f'$ entonces $\varphi f \sim \varphi f'$, por tanto (φ, ψ) induce una aplicación en las clases de homotopía

$$\begin{array}{rcl} (\varphi, \psi)_* : \sigma(X, x_0, G) & \to & \sigma(Y, y_0, H) \\ (\varphi, \psi)_*[f; g] & = & [\varphi f; \psi g] \end{array}$$

Teorema 4.2. *El grupo fundamental del grupo de transformaciones es un invariante del tipo de homotopía del grupo de transformaciones.*

Un grupo de transformaciones (X, G) se dice que *admite una familia* $\mathbf{k}$ *de caminos preferentes* en x_0 si es posible asociar a cada elemento g_1 de G un camino k_1 de g_1x_0 a x_0 tal que

a. El camino asociado a la identidad e es el camino x_0', y

b. para cada par de elementos g_1, g_2 el camino $k_{1,2}$ de $g_1g_2x_0$ a x_0 es homotópico a $g_1k_2 + k_1$.

Teorema 4.3. *Si G es un grupo topológico de homeomorfismos que actuan continuamente sobre X y (G, G) admite una familia de caminos preferentes en e, entonces $\sigma(X, x_0, G) \cong \pi_1(X, x_0) \times G$.*

4.2 Propiedades del grupo de Rhodes

Iniciaremos con propiedades para espacios topológicos en general y luego estudiaremos las propiedades para lazos topológicos.

Proposición 4.2. *Sean X y Y espacios topológicos con puntos bases $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$. Si G y H son grupos topológicos actuando sobre X y Y entonces los grupos fundamentales de Rhodes $\sigma_1(X, x_0, G) \times \sigma_1(Y, y_0, H)$ y $\sigma_1(X \times Y, (x_0, y_0), G \times H)$ son isomorfos.*

Demostración. Sea $[\alpha; g] \in \sigma_1(X \times Y, (x_0, y_0), G \times H)$, donde $\alpha : I \to X \times Y$, $\alpha(0) = (x_0, y_0)$ y $\alpha(1) = g \cdot (x_0, y_0)$.

Las proyecciones canónicas:

$$p_1 : X \times Y \to X \quad q_1 : G \times H \to G$$

$$p_2 : X \times Y \to Y \quad q_2 : G \times H \to H,$$

inducen las aplicaciones

$$\begin{aligned} (p_1, q_1) : (X \times Y, (x_0, y_0), G \times H) &\longrightarrow (X, x_0, G) \\ \text{con } p_1(g \cdot (x, y)) &= (q_1 g) \cdot (p_1(x, y)), \forall (x, y) \in X \times Y, g \in G \times H, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p_2, q_2) : (X \times Y, (x_0, y_0), G \times H) &\longrightarrow (Y, y_0, H) \\ \text{con } p_2(g \cdot (x, y)) &= (q_2 g) \cdot (p_2(x, y)), \forall (x, y) \in X \times Y, g \in G \times H. \end{aligned}$$

Estas últimas, a su vez, inducen las aplicaciones:

$$\begin{array}{rcl}(p_1,q_1)_*:\sigma_1(X\times Y,(x_0,y_0),G\times H) & \longrightarrow & \sigma_1(X,x_0,G)\\ (p_1,q_1)_*[\alpha,g] & \longmapsto & [p_1\alpha;q_1g],\ \text{y}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}(p_2,q_2)_*:\sigma_1(X\times Y,(x_0,y_0),G\times H) & \longrightarrow & \sigma_1(Y,y_0,H)\\ (p_2,q_2)_*[\alpha,g] & \longmapsto & [p_2\alpha;q_2g].\end{array}$$

Ahora, definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl}\psi:\sigma_1(X\times Y,(x_0,y_0),G\times H) & \longrightarrow & \sigma_1(X,x_0,G)\oplus\sigma_1(Y,y_0,H)\\ [\alpha;g] & \longmapsto & ((p_1,q_1)_*[\alpha;g],(p_2,q_2)_*[\alpha;g])\end{array}$$

La aplicación ψ está bien definida y además es un homomorfismo de grupos, en efecto, para $[\alpha;g],[\beta;h]\in\sigma_1(X\times Y,(x_0,y_0),G\times H)$ se tiene

$$\begin{array}{rcl}\psi([\alpha;g]\star[\beta;h]) & = & \psi([\alpha+g\beta;gh])\\ & = & ((p_1,q_1)_*[\alpha+g\beta;gh],(p_2,q_2)_*[\alpha+g\beta;gh])\\ & = & ([p_1(\alpha+g\beta);q_1(gh)],[p_2(\alpha+g\beta);q_2(gh)])\\ & = & ([p_1\alpha+p_1(g\beta);q_1(gh)],[p_2\alpha+p_2(g\beta));q_2(gh)])\\ & = & *([p_1\alpha+(q_1g)\cdot(p_1\beta);q_1(gh)],[p_2\alpha+(q_2g)(p_2\beta));q_2(gh)])\\ & = & ([p_1\alpha;q_1g],[p_2\alpha;q_2g])\star([p_1\beta;q_1h],[p_2\beta;q_2h])\\ & = & \psi([\alpha;g])\star\psi([\beta;h])\end{array}$$

La inversa de ψ es la aplicación

$$\begin{array}{rcl}\varphi:\sigma_1(X,x_0,G)\oplus\sigma_1(Y,y_0,H) & \longrightarrow & \sigma_1(X\times Y,(x_0,y_0),G\times H)\\ ([\gamma_1;f_1],[\gamma_2;f_2]) & \longmapsto & [(\gamma_1,\gamma_2);(f_1,f_2)],\end{array}$$

donde $(\gamma_1,\gamma_2):I\longrightarrow X\times Y$, $t\longmapsto(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$.
En efecto,

$$\begin{array}{rcl}(\varphi\circ\psi)[\alpha;g] & = & \varphi((p_1,q_1)_*[\alpha;g],(p_2,q_2)_*[\alpha;g])\\ & = & \varphi([p_1\alpha;q_1g],[p_2\alpha;q_2g])\\ & = & [(p_1\alpha,p_2\alpha);(q_1g,q_2g)]\\ & = & [\alpha;g]\end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl}(\psi\circ\varphi)([\gamma_1;f_1],[\gamma_2;f_2]) & = & \psi([(\gamma_1,\gamma_2);(f_1,f_2)])\\ & = & ((p_1,q_1)_*([(\gamma_1,\gamma_2);(f_1,f_2)]),(p_2,q_2)_*([(\gamma_1,\gamma_2);(f_1,f_2)]))\\ & = & ([p_1(\gamma_1,\gamma_2);q_1(f_1,f_2)],[p_2(\gamma_1,\gamma_2);q_2(f_1,f_2)])\\ & = & ([\gamma_1;f_1],[\gamma_2;f_2])\end{array}$$

Por tanto, $\sigma_1(X\times Y,(x_0,y_0),G\times H)\simeq\sigma_1(X,x_0,G)\oplus\sigma_1(Y,y_0,H)$. $\square$

Sea L un lazo topológico Hausdorff compacto, $Mult(L) = \langle L_x, R_x | x \in L \rangle$ actúa por la izquierda en L utilizando en $Homeo(L)$ la topología compacto abierta. De ahora en adelante para L un lazo topológico se tomará $G = MultL$ como el grupo actuando sobre él para el cálculo del grupo de Rhodes.

Teorema 4.4 (I. M. Barahona)**.** *Si $(L, \cdot)$ y $(H, *)$ son lazos topológicos isomorfos y G_1, G_2 sus respectivos grupos multiplicativos entonces $\sigma_1(L, e_1, G_1)$ y $\sigma_1(H, e_2, G_2)$ son isomorfos.*

Demostración. Si $\theta : L \longrightarrow H$ es un isomorfismo de lazos topológicos entonces θ induce un isomorfismo $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$, con $\theta g = (\varphi g)\theta$ para todo $g \in G_1$. Las aplicaciones (θ, ψ) y (θ^{-1}, ψ^{-1}) cumplen la condición para que $(L, \cdot)$ y $(H, *)$ tenga el mismo tipo de homotopía. □

Corolario 4.1. *Si $(L, \cdot)$ y $(L, *)$ son lazos topológicos isotópicos y G_1, G_2 sus respectivos grupos multiplicativos entonces $\sigma_1(L, e_1, G_1)$ y $\sigma_1(L, e_2, G_2)$ son isomorfos.*

Demostración. Si los lazos topológicos $(L, \cdot)$ y $(L, *)$ son isótopicos entonces $G_1 = G_2 = G$. Por lo tanto $(L, \cdot)$ y $(L, *)$ satisfacen la condición del mismo tipo de homotopía con las aplicaciones (id_L, Id_G). □

Corolario 4.2. *Si $(H, *)$ es un lazo topológico isótopico a $(L, \cdot)$ y G_1, G_2 sus respectivos grupos multiplicativos entonces $\sigma_1(L, e_1, G_1)$ y $\sigma_1(H, e_2, G_2)$ son isomorfos.*

Demostración. Si $(H, *)$ es isótopico a $(L, \cdot)$,$(H, *)$ es isomorfo al lazo $(L, \circ)$. Este último es isótopico al lazo $(L, \cdot)$. Por las Proposiciones 4.1 y 4.4 obtenemos el resultado. □

En la Proposición 2.5 Hoffman da otra demostración de que el grupo fundamental de un lazo topológico L, $\pi_1(L, e)$, es abeliano. Para el grupo Rhodes, Moo en [13] demuestra que el grupo de Rhodes $\sigma_1(X, x_0, G)$ es abeliano si X es un $H-$ grupo de transformación, esto es, si existe una aplicación continua $\mu : X \times X \longrightarrow X$ tal que $\mu(gx_0, x) = \mu(x, gx_0) = gx$ para todo $g \in G$.Para nuestro estudio podemos deducir el siguiente lema, cuya demostración se sigue del Teorema 2.5 de [13].

Lema 4.1. *Si X es un grupo topológico abeliano entonces $\sigma_1(X, e, G)$ es un grupo abeliano, con $G = MultX$.*

4.3 Un teorema sobre la solubilidad del grupo de Rhodes

El objetivo de esta sección es demostrar que si L es un lazo topológico centralmente nilpontente y $G = MultL$ entonces $\sigma(L, e, G)$ es un grupo soluble. Para ello tomaremos como base una construcción similar a la hecha por Bruck en [3]

Proposición 4.3 (Bruck)**.** *Si θ un homomorfismo, con núcleo H, del lazo L sobre $\theta(L)$ entonces θ induce un homomorfismo Ψ de $Mult(L)$ sobre $Mult(\theta(L))$ tal que, $\theta g = (\Psi g)\theta$ para todo $g \in Mult(L)$. Si L es un lazo, $G = MultL$, H un sublazo normal de L y*

$$G_H = \{g \in G | g(x) \in xH, \forall x \in L\},$$

entonces G_H es un subgrupo normal de G y el grupo $Mult(L/H)$ es isomorfo a G/G_H.

Demostración. Nótese que si $xy = z$ en L, $\theta(x)\theta(y) = \theta(z)$ en $\theta(L)$. Por lo que $\theta L_a = L_{\theta(a)}\theta$, en efecto

$$\begin{aligned} \theta L_a(x) &= \theta(ax) \\ &= \theta(a)\theta(x) \\ &= L_{\theta(a)}(\theta(x)) \\ &= L_{\theta(a)}\theta(x). \end{aligned}$$

De manera similar se verifica que:

$$\begin{aligned} \theta R_b &= R_{\theta(b)}\theta \\ \theta L_a^{-1} &= L_{\theta(a)}^{-1}\theta \\ \theta R_b^{-1} &= R_{\theta(b)}^{-1}\theta. \end{aligned}$$

Ahora, sea $g \in Mult(L)$, $g = P_{x_1}P_{x_2}\cdots P_{x_r}$, donde $P_{x_i} = R_{x_i}^{\pm}$ ó $L_{x_i}^{\pm}$ para cada i, por lo que

$$\theta g = P_{\theta(x_1)}P_{\theta(x_2)}\cdots P_{\theta(x_r)}\theta.$$

Además, si $g = Id_L$ se verifica

$$\begin{aligned} \theta(y) &= \theta Id_L(y) \\ &= \theta(y), \end{aligned}$$

lo que implica que $P_{\theta(x_1)}P_{\theta(x_2)}\cdots P_{\theta(x_r)} = I_{\theta(L)}$. Por tanto, existe un homomorfismo bien definido Ψ de $Mult(L)$ sobre $Mult(\theta(L))$ tal que $\Psi(L_x) = L_{\theta(x)}$, $\Psi(R_x) = R_{\theta(x)}$ para todo $x \in L$ y $\theta g = (\Psi g)\theta$.

Si θ es la proyección $L \longrightarrow L/H$, $\Psi : Mult(L) \to Mult(L/H)$, es tal que $\Psi(L_x) = L_{xH}$ y $\Psi(R_x) = R_{xH}$ y $\ker \Psi = G_H$, en efecto

$$
\begin{aligned}
g \in \ker \Psi &\Leftrightarrow \theta g = \theta \\
&\Leftrightarrow (\theta g)(x) = \theta(x), \text{ para todo } x \in L \\
&\Leftrightarrow (g(x)H) = xH, \text{ para todo } x \in L \\
&\Leftrightarrow g(x) \in xH, \text{ para todo } x \in L \\
&\Leftrightarrow g \in G_H.
\end{aligned}
$$

Por tanto G_H es subgrupo normal de G y $Mult(L/H) \cong G/G_H$. □

Recordemos que un lazo L es *centralmente nilpotente de clase finita* c, si tiene una serie central superior de la forma

$$L_0 = e < L_1 < L_2 < \cdots < L_{c-1} < L_c = L,$$

donde L_i son sublazos normales de L y L_i/L_{i-1} es el centro de L/L_{i-1} para $i = 1, 2, \ldots, c$.

Proposición 4.4 (I.M. Barahona)**.** *Si L es un lazo centralmente nilpotente de clase finita c entonces existe una cadena ascendente*

$$G_0 < G_1 < G_2 < \cdots < G_{c-1} < G_c = G,$$

del grupo $G = MultL$ con las siguientes propiedades para $i = 0, 1, 2, \ldots, c-1$

I *G_i es un subgrupo normal de G;*

II *$Mult(L/L_i) \cong G/G_i$, y*

III *G_{i+1}/G_i es un grupo abeliano.*

Demostración. De la Proposición 4.3 se deducen (I) y (II) tomando $G_i = G_{L_i}$.
Para (III), siguiendo un razonamiento similar que en la Proposición 4.3 , se deduce que $Mult(L_{i+1}/L_i) \cong G_{i-1}/G_i$ y dado que $L_{i+1}/L_i = Z(L/L_i)$ y este último es abeliano se tiene que G_{i+1}/G_i es también abeliano. □

Teorema 4.5 (I. M. Barahona)**.** *Sea L un lazo topológico Hausdorff y compacto y sea $G = MultL$. Si el lazo subyacente de L es centralmente nilpotente entonces $\sigma(L, e, G)$ es soluble.*

Demostración. Si L es centralmente nilpotente, por la Proposición 4.4 existe una cadena ascendente

$$G_0 < G_1 < G_2 < \cdots < G_{c-1} < G_c = G,$$

Notesé que G_i actúa sobre L_i, ya que la aplicación evaluación $G_i \times L_i \to L_i$ es continua con la topología del subespacio. Entonces se tiene una cadena ascendente de subgrupos de $\sigma(L, e, G)$.

$$\sigma(L_0, e, G_0) < \sigma(L_1, e, G_1) < \cdots < \sigma(L_{c-1}, e, G_{c-1}) < \sigma(L_c, e, G_c) = \sigma(L, e, G).$$

Primero probaremos que $\sigma(L_i, e, G_i)$ es un subgrupo normal de $\sigma(L, e, G)$. Definimos la aplicación $\Phi : \sigma(L, e, G) \longrightarrow \sigma(L/L_i, e, G/G_i)$, $[f; g] \longmapsto [\rho_i f; \Psi g]$, donde Ψ está definida como en la parte final de la Proposición 4.3 y ρ_i es la proyección $L \longrightarrow L/L_i$.

Se tiene que Φ está bien definida y es un homomorfismo de grupos, en efecto

$$\begin{aligned}
\Phi([f_1 : g_1] \star [f_2; g_2]) &= \Phi([f_1 + g_1 f_2; g_1 g_2]) \\
&= [\rho_i(f_1 + g_1 f_2); \Psi(g_1 g_2)] \\
&= [\rho_i f_1 + g_1 \rho_i f_2; \Psi(g_1)\Psi(g_2)] \\
&= [\rho_i f_1; \Psi(g_1)] \star [\rho_i f_2; \Psi(g_2)] \\
&= \Phi([f_1; g_1]) \star \Phi([f_2; g_2]).
\end{aligned}$$

Además, Φ es sobreyectiva desde que ρ_i y Ψ lo son, por tanto $\sigma(L/L_i, e, G/G_i)$ es isomorfo a $\sigma(L, e, G)/\ker \Phi$. Probaremos que $\ker \Phi = \sigma(L_i, e, G_i)$

$$\begin{aligned}
[f; g] \in \ker \Phi \quad &\Leftrightarrow \quad \Phi([f; g]) = [e_{L/L_i}, id_{G/G_i}], \text{ donde } e_{L/L_i} \text{ es el camino constante } I \to e_{L/L_i}, \\
&\Leftrightarrow \quad [\rho_i f; g'] = [e_{L/L_i}, id_{G/G_i}] \\
&\Leftrightarrow \quad \rho_i f \simeq e_{L/L_i} \text{ y } g \in G_i \\
&\Leftrightarrow \quad f : I \longrightarrow L_i \text{ y } g \in G_i \\
&\Leftrightarrow \quad [f; g] \in \sigma(L_i, e, G_i).
\end{aligned}$$

Así, $\sigma(L_i, e, G_i)$ es un subgrupo normal de $\sigma(L, e, G)$ y $\sigma(L, e, G)/\sigma(L_i, e, G_i) \cong \sigma(L/L_i, e, G/G_i)$.

De manera análoga, se deduce que $\sigma(L_{i+1}, e, G_{i+1})/\sigma(L_i, e, G_i) \cong \sigma(L_{i+1}/L_i, e, G_{i+1}/G_i)$.

Finalmente, probaremos que $\sigma(L_{i+1}, e, G_{i+1})/\sigma(L_i, e, G_i)$ es abeliano.

Desde que $\sigma(L_{i+1}, e, G_{i+1})/\sigma(L_i, e, G_i) \cong \sigma(L_{i+1}/L_i, e, G_{i+1}/G_i)$ y L_{i+1}/L_i es un grupo abeliano por el lema 4.1 $\sigma(L_{i+1}/L_i, e, G_{i+1}/G_i)$ es abeliano.

Entonces, la cadena ascendente

$$\sigma(L_0, e, G_0) < \sigma(L_1, e, G_1) < \cdots < \sigma(L_{c-1}, e, G_{c-1}) < \sigma(L_c, e, G_c) = \sigma(L, e, G).$$

satisface para todo $i = 1, 2, \ldots, c$:

1. $\sigma(L_i, e, G_i)$ es un subgrupo normal de $\sigma(L, e, G)$, y
2. $\sigma(L_{i+1}, e, G_{i+1})/\sigma(L_i, e, G_i)$ es abeliano

Por tanto, $\sigma(L, e, G)$ es resoluble. $\square$

Epílogo

En este apartado plateamos algunas preguntas que puedan orientar una investigación a futuro. Sea L un lazo topológico y G el grupo generado por la traslaciones izquierdas de L. Podemos preguntarnos las propiedades que hereda $\mathcal{G}$ de G:

1. Si G actúa transitivamente sobre L, ¿ $\mathcal{G}$ actúa transitivamente sobre $\mathcal{L}$?
2. Si la acción de G sobre L es libre de puntos fijos entonces ¿la acción de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{L}$ también es libre de puntos fijos?

Para cada $H \in \mathcal{S}$, $\widetilde{L}/H$ es un lazo topológico y G^*/H^* es su grupo multiplicativo por lo que se obtiene un sistema proyectivo de grupos topológicos de transformaciones $\{(\widetilde{L}/H, G^*/H^*)\}_{H\in\mathcal{S}}$. ¿ Es posible calcular el grupo de Rhodes de $\mathcal{L}$

1. Usando la acción de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{L}$?
2. Usando la teoría de la forma (shape theory)?

Bibliografía

[1] Arens, R. *Topologies for Homeomorphism Groups.* The Johns Hopkins University, **68** (1946), 593–610.

[2] Arkowitz, M. *Introduction to Homotopy Theory.* Springer. (2010).

[3] Bruck, R. H. *Contributions to the Theory of Loops.* American Mathematical Society. (1944), 245 –354

[4] Chein, O., Pflugfelder, H.O. and Smith, J.D. H. *Quasigroups and loops: theory and applications.* Edited by O. Chein, H.O. Pflugfelder and J.D.H. Smith. Sigma Series in Pure Mathematics, **8**. Heldermann Verlag, Berlin, 1990.

[5] Eilenberg, S., Steenrod, N. *Foundations of Algebraic Topology.* Princenton University Press (1952)

[6] Fox, R.H. *Homotopy groups and torus homotopy groups.* Ann. of Math. (2) **49**, (1948) 471–510.

[7] Golasińki M., P. Wong *Generalizations of Fox Homotopy Groups, Whitehead Products and Gottlieb groups.* Ukr. mat Ωurn. (52) No. **3**, (2005), 320–328.

[8] Golasińki M., P. Wong *A Note on Generalized Equivariant Homotopy Groups.* Ukr. mat Ωurn. (52) No. **3**, (2005), 320–328.

[9] Greenberg, M., Harper, J. *Algebraic Topology A First Course.* The Benjamin Cummings Publishing Company (1981).

[10] Hofmann, K.H. *Topologische Loops.* Math. Zeitschr Bd. 70 , (1958), 13–37.

[11] Hudson, S.N. *Topological loops with invariant uniformities.* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 109, No. **1** (1963), 181–190.

[12] Kim, S., Lawson, J. *Smooth Bruck Loops, Symmetric Spaces and Nonassociative Vector Spaces.* Demostratio Mathematica Vol. XLIV No. **4**, (2011), 755–779.

[13] Moo, W. *Certain subgroups of homotopy groups of a transformation group.* Korean Mathematical Society. Vol (20) N (2) (1983), 223 –233.

[14] Nagy,P., Strambach, K. *Loops in Group Theory and Lie Theory.* Walter de Gruyter (2002).

[15] Napier, T., Ramachandran, M. *An Introduction to Riemann Surfaces.* Birkhauser (2002).

[16] Ranjan, M. *Basic Algebraic Topology and its Applications.* Springer India (2016).

[17] Rhodes, F. *On the fundamental group of a transformation group.* Proc. London Math. Soc (3) **16** (1966), 635–650.

[18] Sabinin, L. *Smooth quasigroups and loops: forty - five of incredible growth* . Comment. Math (2) **41** (2000), 377–400.

[19] Vavpetic, A. Virk, Z. *On the Fundamental Group of Inverse Limits* . Malaysian Mathematical Sciences Society (2017) 941 - 957.

[20] Wilson, J. *Profinite Groups.* London Mathematical Society (1998).